Linearna algebra 1, 2022./2023.

2. domaća zadaća

1. Provjerite koji od sljedećih skupova su vektorski prostori (uz standardne operacije zbrajanja i množenja skalarima):

   (a) $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n : x_1 x_2 = 0\}$

   (b) $B = \{p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{F}) : p(1) = 1\}$

   (c) $C = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{F}) : p(x) = ax^3 + bx^2 - bx + a,\ a, b \in \mathbb{F}\}$

   (d) $D = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$

   (e) $E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{F}) : ad - bc = 0 \right\}$

   Za skupove koji jesu vektorski prostori odredite dimenziju i neku bazu.

2. Neka su M i L potprostori vektorskog prostora V.

   (a) Dokažite da je $M \cap L$ potprostor od V.

   (b) Navedite primjer koji pokazuje da unija $M \cup L$ ne mora biti potprostor od V.

   (c) Dokažite da je $M \cup L$ potprostor od V ako i samo ako je $M \subseteq L$ ili $L \subseteq M$.

3. Vektorski prostor $M = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in \mathbb{C}^5 : z_1 - iz_2 = 0\}$ rastavite na direktnu sumu dva njegova potprostora od kojih je jedan dvodimenzionalan (to jest, nađite $M_1, M_2 \leq M$ takve da je $M_1 \dot{+} M_2 = M$ i $\dim M_1 = 2$.).

4. Neka je $n \in \mathbb{N}$, M potprostor od M_n svih gornjotrokutastih matrica te L potprostor od M_n svih simetričnih matrica. Odredite sumu i presjek ova dva potprostora. Može li se svaka matrica reda n napisati kao zbroj jedne gornjotrokutaste i jedne simetrične matrice? Ako da, nađite taj rastav za matricu $A = [a_{ij}]$, pri čemu je $a_{ij} = i$ za sve $i, j = 1, \dots, n$.

5. (a) Neka je $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $N_k = [\{(1, 0, k)\}]$. Dokažite da je, za svaki $k \in \mathbb{N}$, N_k direktni komplement od M u $\mathbb{R}^3$.

   (b) Nađite beskonačno mnogo direktnih komplemenata potprostora $M = \left[\{(1, 0, 0)\}\right]$ u $\mathbb{R}^3$.