

Ime i prezime, JMBAG: _____

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

popravni kolokvij - 22. veljače 2023.

Napomene: Vrijeme rješavanja je 150 minuta.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Rješavajte svaki zadatak na zasebnom listu.

- (12 b) Dan je jednakostranični trokut ABC . Točka E nalazi se na stranici \overline{AB} i udaljena je od vrha B za $\frac{1}{3}|AB|$. Trokut $A'B'C'$ je osnosimetrična slika trokuta ABC u odnosu na pravac koji prolazi točkom E okomito na stranicu \overline{AB} . Ako opseg tako nastalog lika (uniije trokuta ABC i trokuta $A'B'C'$) iznosi 24 cm, kolika mu je površina?
- (12 b) Dan je pravokutni trokut ABC sa pravim kutom pri vrhu C u kojem vrijedi $|BC| = 3|AC|$. Neka je P polovište hipotenuze te neka su D i E točke na kateti \overline{BC} takve da vrijedi $|CD| = |DE| = |EB|$. Dokažite da je trokut PDE jednakokračan i pravokutan.
- (12 b) Na kružnici k promjera \overline{AB} odabrana je točka T . Tangente na kružnicu k u točkama A , B i T su redom a , b i t . Pravci a i t sijeku se u točki P , a pravci b i t u točki Q . Dokažite da umnožak $|AP| \cdot |BQ|$ ne ovisi o izboru točke T .
- (12 b) Dan je trokut ABC s kutovima α , β , γ i polumjerom opisane kružnice R . Neka je H ortocentar tog trokuta.
 - Dokažite da je $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{|AH|}{|BC|}$.
 - Prikažite zbroj udaljenosti ortocentra od vrhova trokuta pomoću duljine R i trigonometrijskih funkcija kutova trokuta.
- (12 b) Dana je pravilna četverostrana piramida s osnovkom $ABCD$ i vrhom V . Sve su pobočke jednakostranični trokuti, a svi njeni bridovi duljine a .

Na bočnom bridu \overline{AV} nalazi se točka E takva da je $|VE| = \frac{1}{5}a$. Neka je σ ravnina koja prolazi točkom E i okomita je na brid \overline{AV} . Odredite presjek piramide ravninom σ (skicirajte ga ili opišite) te odredite opseg tog presjeka.

6. (5 + 5 + 5 = 15 bodova)

- (a) Izvedite formulu za zbroj mjera unutarnjih kutova pravilnog n -terokuta.
Kolika je mjera svakog unutarnjeg kuta pravilnog 36-kuta?
- (b) Izvedite formulu za površinu trapeza. Poznatima se smatraju svojstva površina te formule za površinu trokuta, pravokutnika i paralelograma.
- (c) Iskažite i dokažite teorem o obodnom i središnjem kutu.

7. (5 + 5 + 5 = 15 bodova)

- (a) Koristeći samo definiciju funkcije sinus (dakle, bez primjene kružnice i teorema u vezi s kružnicama) dokažite da se stranice bilo kojeg trokuta odnose kao sinusi kutova nasuprot tih stranica.
- (b) Definirajte centralnu simetriju i dokažite da je centralna simetrija izometrija.
- (c) Kada kažemo da su dva pravca u prostoru mimoilazna (mimosmjerna)?
Kada kažemo da su dva mimoilazna pravca okomita?
Navedite primjer dva okomita mimoilazna pravca na kojima leže neka dva brida kocke $ABCD A' B' C' D'$.