

1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime, JMBAG: _____

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

drugi kolokvij - 2. veljače 2018.

Napomene: Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Detaljno obrazložite svoje tvrdnje. Nemojte koristiti vektore i metode analitičke geometrije.

1. (bodovi: 2+2+2+1)

- Odredite sve trapeze koji su tangencijalni četverokuti.
- Zadan je trokut sa stranicama duljina a , b , c i njima nasuprotnim kutovima α , β , γ . Dokažite sljedeću tvrdnju: ako je γ tupi kut, tada je $a^2 + b^2 < c^2$.
- Dokažite da je centralna simetrija izometrija.
- Navedite sve međusobne položaje dviju ravnina u prostoru.

Ime i prezime, JMBAG: _____

2. Neka u trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle ABC = 75^\circ$ i $\sphericalangle BCA = 20^\circ$. Simetrala stranice \overline{AB} siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama X i Y , tako da se točke C i X nalaze s iste strane pravca AB . Odredite $\sphericalangle XYC$.

3. Oko kružnice polumjera r opisan je trapez kojemu su kutovi uz dulju osnovicu α i β .
Dokažite da je omjer površina trapeza i kruga jednak

$$\frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right).$$

Ime i prezime, JMBAG: _____

4. Tri sukladne kružnice sa središtima A , B i C prolaze istom točkom S . Vanjske zajedničke tangente tih kružnica određuju trokut $A'B'C'$. Neka je I središte upisane, a O središte opisane kružnice trokuta $A'B'C'$.
- (a) Pokažite da su trokuti ABC i $A'B'C'$ slični.
 - (b) Odredite središte upisane i središte opisane kružnice trokuta ABC .
 - (c) Dokažite da točke S , O i I leže na istom pravcu.

5. Na bridu \overline{AD} pravilnog tetraedra $ABCD$ dana je točka M takva da je $|AM| : |MD| = 3 : 1$. Ravnina π prolazi točkom M i okomita je na brid \overline{AD} . Odredite u kojem omjeru ravnina π dijeli volumen tetraedra $ABCD$.

1	2	3	4	5	Σ

Ime i prezime, JMBAG: _____

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

drugi kolokvij - 2. veljače 2018.

Napomene: Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Detaljno obrazložite svoje tvrdnje. Nemojte koristiti vektore i metode analitičke geometrije.

1. (bodovi: 2+2+2+1)

- (a) Odredite sve trapeze koji su tetivni četverokuti.
- (b) Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b, c i njima nasuprotnim kutovima α, β, γ . Ako je α šiljasti kut, dokažite da je $a^2 < b^2 + c^2$.
- (c) Neka je $h: M \rightarrow M$ homotetija ravnine M , sa središtem O i koeficijentom k . Dokažite da za sve točke $A, B \in M$ vrijedi $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$, gdje je $A' = h(A)$, $B' = h(B)$.
- (d) Navedite sve međusobne položaje pravca i ravnine u prostoru.

Ime i prezime, JMBAG: _____

2. Neka u trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BCA = 65^\circ$ i $\sphericalangle CAB = 40^\circ$. Simetrala stranice \overline{BC} siječe kružnicu opisanu trokutu ABC u točkama X i Y , tako da se točke A i Y nalaze s iste strane pravca BC . Odredite $\sphericalangle YXA$.

3. Oko kružnice polumjera r opisan je trapez kojemu su kutovi uz dulju osnovicu α i β .
Dokažite da površina trapeza iznosi

$$2r^2 \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right).$$

Ime i prezime, JMBAG: _____

4. Tri sukladne kružnice sa središtima A , B i C prolaze istom točkom T . Vanjske zajedničke tangente tih kružnica određuju trokut $A_1B_1C_1$. Neka je U središte upisane, a O središte opisane kružnice trokuta $A_1B_1C_1$.
- (a) Pokažite da su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$ slični.
 - (b) Odredite središte upisane i središte opisane kružnice trokuta ABC .
 - (c) Dokažite da točke T , O i U leže na istom pravcu.

5. Na bridu \overline{BD} pravilnog tetraedra $ABCD$ dana je točka N takva da je $|DN| : |NB| = 1 : 3$. Ravnina ρ prolazi točkom N i okomita je na brid \overline{BD} . Odredite u kojem omjeru ravnina ρ dijeli volumen tetraedra $ABCD$.