

Vektorski prostori - nastavnički smjer

4. ispit
13.9.2024.

Zadatak 1

- (i) (8 bodova) Definirajte minimalni polinom i spektar linearnog operatora. Iskažite i dokažite teorem o karakterizaciji minimalnog polinoma.
- (ii) (6 bodova) Definirajte korijene potprostora. Koji je minimalni polinom restrikcije operatora na svoj korijeni potprostor? Svoj odgovor iskažite u obliku teorema. Teorem ne treba dokazivati.

Zadatak 2

- (i) (8 bodova) Definirajte hermitske operatore. Iskažite i dokažite propoziciju o spektru unitarnog operatora.
- (ii) (6 bodova) Iskažite teorem o dijagonalizaciji hermitskog operatora na kompleksnom vektorskom prostoru.

Zadatak 3

Operator $T \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi (e) sa

$$T(e) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) (12 bodova) Izračunajte karakteristični polinom od T , odredite spektar od T te odredite može li se T dijagonalizirati u nekoj bazi.
- (b) (2 boda) Napišite neki polinom $p(x)$ stupnja 3 takav da je $p(T)$ nilpotentan.

Zadatak 4

- (a) (8 bodova) Operator $N \in L(\mathbb{C}^{21})$ je nilpotentan indeksa k . Jordanova forma od N sastoji se od k Jordanovih klijetki. Sve klijetke su međusobno različitih dimenzija. Odredite k .
- (b) (6 bodova) Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^4)$ koji zadovoljava

$$\mu_A(x)^2 \cdot (x - 1) = k_A(x) \cdot (x - 2).$$

Zadatak 5

- (a) (8 bodova) Na prostoru \mathbb{R}^3 dano je preslikavanje $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$\langle (v_1, v_2, v_3) | (w_1, w_2, w_3) \rangle = (v_1 + 2v_2)(w_1 + 2w_2) + (v_2 + 2v_3)(w_2 + 2w_3) + (v_3 + 2v_1)(w_3 + 2w_1).$$

Dokažite da je to skalarni produkt na \mathbb{R}^3 i odredite neku ortonormiranu bazu za \mathbb{R}^3 .

- (b) (6 bodova) Neka je V konačnodimenzionalan unitaran vektorski prostor nad \mathbb{C} . Za hermitski operator $A \in L(V)$ vrijedi $A^3 + A = 2I$. Dokažite da je $A = I$.
-

Vrijeme pisanja: 2h

Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja zadnjih tri zadatka.