

# MATEMATIČKA ANALIZA 1

## Zadaća 4

1. Odredite infimum i supremum skupova (ako postoje)

(a)  $A = \left\{ \sin \frac{4n+1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ ,

(b)  $B = \left\{ \frac{n-\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

2. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{18 - 2n}{2n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{5 + n \cos(2x - 10) - 2n}{n} : n \in \mathbb{N}, x \in \langle -5, -4 \rangle \right\}.$$

4. Odredite infimum i supremum skupova (ako postoje)

(a)  $A = \left\{ (-1)^n \left( -2 + \cos\left(\frac{1}{4n}\right) \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ ,

(b)  $B = \left\{ \frac{n}{n+3} \cdot (2 + \cos(n\pi)) : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

5. Odredite infimum i supremum skupova (ako postoje)

(a)  $A = \left\{ \frac{m^2 + 7n^2 - 2mn}{n^2} : m, n \in \mathbb{N}, m < 6n \right\}$ ,

(b)  $B = \left\{ \frac{2n^2 + n}{n^2 + 1} \cdot \frac{5m + 1}{1 + (-1)^m \cdot 9m} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

6. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{n^2 - 9}{5n^2 + 3n + 2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

7. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{12m - n - 3mn + 7}{5m - 2n - 2mn + 5} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

8. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{n^2}{m^2 + 2mn + 5n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

9. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \log_{0.5} \frac{n^2 + n}{n^2 + 4} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$



10. Dokažite da je

$$\sup\{x \in \mathbb{Q} : x > 0, : x^2 < 2\} = \sqrt{2}.$$

11. Neka je  $A \subseteq [0, \infty)$ . Ako je  $\inf A > 0$ , dokažite:

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A},$$

gdje je

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\}.$$

12. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{(n+m)^2}{2^{nm}} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

13. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

14. Odredite infimum i supremum skupa (ako postoje)

$$S = \left\{ \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} : a, b, c \in (0, +\infty) \right\}.$$

15. Neka je  $S \subseteq \mathbb{R}$  neprazan i omeđen skup i neka je  $S' \subseteq S$  gust podskup od  $S$ , tj. takav podskup od  $S$  za kojeg vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in S)(\exists x' \in S')(|x - x'| < \varepsilon).$$

(Primijetite da takav podskup uvijek postoji, npr.  $S' = S$ ). Dokažite da je  $S'$  neprazan i omeđen skup te da je

$$\inf S = \inf S' \quad \text{i} \quad \sup S = \sup S'.$$