

Izborna natjecanje za Vojtěch Jarník

16.02.2007.

I. kategorija

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pokaži da n dijeli cijeli broj najbliži broju

$$\frac{(n+1)!}{e}.$$

2. Neka je A kvadratna matrica reda n i neka je njena determinanta jednaka 1. Označimo s B matricu dobivenu dodavanjem 1 svakom elementu od A . Dokaži da je determinanta od B jednaka $1+s$ gdje je s suma svih elemenata matrice A^{-1} .
3. Neka je f realni polinom stupnja n čiji koeficijenti $(a_i)_{i=0,\dots,n}$ zadovoljavaju svojstvo

$$a_k = a_{n-k} \quad k = 0, \dots, n$$

i među svim koeficijentima je parno mnogo njih različito od nule. Pokaži kako f ima barem jedan korijen apsolutne vrijednosti 1.

4. Neka je zadano $n > 2$ djece, poredanih u krug, koja skupljaju sličice. Na početku svakom djetetu udijelimo jednu od n različitih sličica. Svakog dana jedan od skupljača odluči povećati svoju kolekciju. On to čini tako da pogleda sve sličice djeteta lijevo od sebe i kupi jednaku kolekciju (ako se neka od sličica već nalazi u njegovom posjedu svejedno će biti pridodana). Za koje vrijednosti n je moguće da dva djeteta nakon konačno mnogo dana posjeduju jednake kolekcije?

Izborna natjecanje za Vojtěch Jarník

16.02.2007.

II. kategorija

1. Neka je p polinom stupnja n s realnim korijenima $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Neka je $b \in \mathbb{R}$ takav da je $2b < a_1 + a_2$. Dokažite da vrijedi

$$2^{n-1}|p(b)| \geq |p'(a_1)(b - a_1)|.$$

2. Neka je A realna 3×3 invertibilna matrica u kojoj su sume redaka, stupaca i obaju dijagonala jednake. Dokažite da isto svojstvo vrijedi i za matricu A^{-1} .
3. Dokažite da suma znamenaka broja 5^n u decimalnom prikazu ide u beskonačnost za $n \rightarrow \infty$.
4. U svakoj od n vreća nalazi se proizvoljan broj novčića. Svaka vreća sadrži ili isključivo prave ili samo lažne novčiće. Pretpostavimo da svi pravi novčići imaju masu W koja je poznata. Masa w lažnih novčića unaprijed nije poznata. Na raspolaganju je digitalna vaga. Potrebno je odrediti najmanji broj potrebnih vaganja kojima se može odrediti koje vreće sadrže lažne novčiće kao i vrijednost w .