

IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - ZADACI

11. 06. 2015.

Zadatak 1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoji realna, antisimetrična i regularna $n \times n$ matrica.

Zadatak 2. Odredite najmanji prirodni broj n sa svojstvom: *Ako su x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 realni brojevi takvi da postoji n različitih odabira cijelih brojeva $1 \leq p < q < r \leq 5$ takvih da je $x_p + x_q + x_r = 0$, onda je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.*

Zadatak 3. Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z - 1| \leq \frac{1}{2}$. Dokažite da je $|\ln z| \leq 2|z - 1|$.

Zadatak 4. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

Zadatak 5. Dokažite da za svaki prost broj p postoji beskonačno mnogo četvorki međusobno različitih prirodnih brojeva (x, y, z, t) takvih da je

$$(x^2 + pt^2)(y^2 + pt^2)(z^2 + pt^2)$$

potpun kvadrat.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova. Vrijeme pisanja je 240 minuta.