

Izborna natjecanje za IMC 2006

12. 6. 2006.

Zadatak 1.

Neka je A simetrična regularna $n \times n$ matrica ($n \geq 2$) čiji elementi su strogo pozitivni realni brojevi. Koliki je najveći mogući broj nula u matrici A^{-1} ?

Zadatak 2.

Promotrimo polinome s kompleksnim koeficijentima

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11} + a_{12}x^{12} + a_{13}x^{13}, \\g(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_{10}x^{10} + b_{11}x^{11} + b_{12}x^{12} + b_{13}x^{13},\end{aligned}$$

pri čemu su $a_{13} \neq 0$ i $b_3 \neq 0$. Dokažite da najveći zajednički djelitelj od f i g ima stupanj najviše 6.

Zadatak 3.

Neka je $f: [0, +\infty) \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ klase C^∞ i takva da za svake $k \in \mathbb{N}_0$ i $x \in [0, +\infty)$ vrijedi

$$(-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0.$$

Definirajmo $g: \langle 0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ formulom $g(x) = \frac{1-f(x)}{x}$. Dokažite da za svake $k \in \mathbb{N}_0$ i $x \in \langle 0, +\infty)$ vrijedi

$$(-1)^k g^{(k)}(x) \geq 0.$$

Zadatak 4.

Neka je G jednostavan graf s n vrhova čiji svaki vrh ima stupanj d , neka je A njegova matrica susjedstva te λ_{\min} njena najmanja svojstvena vrijednost. Pretpostavimo da je S neki skup vrhova grafa G takav da nikoja dva vrha iz S nisu spojena bridom. Dokažite da vrijedi

$$\text{card}(S) \leq \frac{-n\lambda_{\min}}{d - \lambda_{\min}}.$$

Zadatak 5.

Pretpostavimo da je za neke $a, C > 0$ dana dvaput derivabilna funkcija $f: \langle a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ za koju vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)e^{-x} = 1 \quad \text{te} \quad (\forall x \in \langle a, +\infty)) \left(|f''(x)| < C|f'(x)| \right).$$

Dokažite da je tada

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)e^{-x} = 1.$$

Zadatak 6.

Konveksni četverokut površine 1 je s nekoliko pravaca “razrezan” na n manjih mnogokuta i u svakog od njih je moguće upisati kružnicu. Dokažite da je zbroj polumjera tih kružnica najviše jednak $\frac{1}{2}\sqrt{n}$.

Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Vrijeme pisanja je 5 sati.

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak