Diferencijalni i integralni račun 2

Skripta iz vježbi

Matko Ljulj

7. kolovoza 2022.

Sadržaj

1

Redovi

Definicija 1.1. Red je uređeni par $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ gdje je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$, a $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, odnosno za svaki n vrijedi $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Za red koristimo oznaku $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ako niz parcijalnih suma ima limes S, kažemo da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i pišemo $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. U suprotnom kažemo da red divergira.

Napomena 1.2.

- Definicija na trenutak izgleda zastrašujuće. Ono kako je treba čitati je da je red zapravo suma beskonačno mnogo pribrojnika. Zbroj konačno mnogo pribrojnika je dobro definiran, no zbroj beskonačno mnogo pribrojnika je a priori nejasan. Ipak, koristeći alate naučene u prošlom semestru, tu beskonačnu sumu možemo izreći kao limes parcijalnih suma, kada $n \to \infty$.
- Budući da se definicija reda naslanja na definiciju limesa, opet imamo slične mogućnosti što se događa kada kažemo da red divergira: to može značiti da divergira u $+\infty$ ili $-\infty$ ili "obično".
- Dobro definirati što je red (umjesto izreći da je to beskonačna suma nekih realnih brojeva) nije samo zadovoljenje klasične matematičke forme u kojoj matematičari imaju potrebu sve definirati, nego i zato što bi to moglo dovesti i do nekih pogrešaka. Naime, netko bi mogao očekivati da je beskonačno sumiranje (kao i konačno) komutativno, što nije istina. Naime, postoji vrlo zanimljiv kontraprimjer: elemente reda $a_n = (-1)^n/n$ možemo permutirati tako da suma reda bude proizvoljna vrijednost iz $\mathbb{R}$, ili da divergira u $+\infty$, ili da divergira u $-\infty$.).

Primjer 1.3. Promotrimo neke redove kojima bismo mogli izračunati sumu:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
  Ovo je trik koji je dobro zapamtiti za inače, iako nam više neće biti potreban na

ovom kolegiju. Taj trik pojavljuje se u nekim zadatcima za one koji žele znati više u višim razredima osnovne ili nižim razredima srednje škole (naravno, u kontekstu konačne sume).
Ideja je primijetiti da se svaki pribrojnik može rastaviti kao razlika dva razlomka (što je zapravo rastav na parcijalne razlomke):

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Zato je k-ta parcijalna suma

$$s_k = \frac{1}{1\cdot(1+1)} + \frac{1}{2\cdot(2+1)} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}.$$

Drugi način dobivanja formule za s_k je matematičkom indukcijom. Dalje imamo

$$S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

gdje smo limes na prirodnim brojevima izračunali slično kao što bismo ga izračunali na realnim u slučaju kada $x \to +\infty$.

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$.
  Ili pogađanjem formule i dokazivanjem matematičkom indukcijom, ili korištenjem formule
  $$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$
  (uz $x = 1$, $y = 2^{-1}$) može se dokazati da je k-ta parcijalna suma jednaka $\dfrac{1-2^{k+1}}{1-2^{-1}}$, pa kada $k \to \infty$ dobijemo da red konvergira i da je suma jednaka $S = 2$. No, to nam je bilo i nekako intuitivno i ranije: kada dodajemo 1, pa 1/2, pa 1/4, i tako dalje, uvijek dodajući još pola od onoga što nam nedostaje da dođemo do 2, približavamo se proizvoljno blizu broju 2. Sada imamo i neki alat kako to možemo precizno izreći i dokazati.
  Općenito, za red oblika $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ govorimo o **geometrijskom redu**. Za $|q| < 1$ konvergira i iznosi $\dfrac{1}{1-q}$ (provjerite sami kao što smo to napravili za $q = 2^{-1}$), dok za $|q| \geq 1$ red divergira.

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$
  Ovaj red se razlikuje od gornjih. Kao prvo, teži je za argumentirati, a kao drugo, odluka o konvergenciji je drugačija. On naime divergira. Budući da ćemo kasnije imati lakši dokaz ove tvrdnje, zasada ovu tvrdnju dokazujemo samo u kratkim

crtama: kako za fiksni $k \quad \mathbb{N}$ i za sve $2^k < n \leq 2^{k+1}$ vrijedi da je $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2^k}$, proizvoljna parcijalna suma

$$\begin{aligned} s_{2^k} &= (1) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\ &> \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \end{aligned}$$

može se ocijeniti odozdo tako da se zaključi da je svaka odgovarajuća zagrada veća od $1/2$. Tada je $s_{2^k} > (k+1)/2$. Kako kada $n \to \infty$ suma s_n u sebi "sadrži" sumu oblika s_{2^k} za sve veći k, tako vidimo da je suma odozdo ograničena s nečime što teži u beskonačno, pa mora i suma sama tamo težiti.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
  Ovaj red se po članovima doima još jednostavniji nego onaj iz prvog primjera. Nemamo neku ideju kako bi trebala izgledati formula za parcijalne sume. Ispast će da je za ovaj red potrebno poprilično netrivijalno matematičko predznanje kojim bismo našli sumu reda. Ona iznosi $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Zadnji primjer pokazuje da koliko god jednostavno članovi reda izgledali, da suma reda može biti jako čudnog iznosa. Sjetite se da smo limese, derivacije i integrale računali za mnogo "ružnije" funkcije od $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, s kojom sada imamo problema u kontekstu redova. To je jedan od ključnih razloga zbog kojih u ovoj lekciji i na predmetu se nećemo fokusirati na sume redova, nego samo na odluku o konvergenciju redova. U nastavku će zato svi zadatci biti oblika "odredite konvergira li red ...".

Napomena 1.4. Opišimo neku intuiciju i najavimo metode dokazivanja konvergencije redova.

- Prvih nekoliko članova ne igra ulogu za konvergenciju, ali igra ulogu za rezultat sume. Primjerice, ako imate red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ takav da je $a_n = 1000$ za prvih 100 članova, a nakon toga je $a_n = 2^{-n}$, taj red i dalje konvergira. Koliko god prvih nekoliko članova bilo veliko, dokle god ih je konačno, ne utječu na konvergenciju reda. Konkretno u ovom primjeru, njih 100 zajedno će činiti sumu 100000 (što je velik, ali konačan broj), a za ostale članove znamo kako sumirati. Vidimo da je suma drugačija nego kada bi svi članovi a_n bili jednaki 2^{-n}, ali red i dalje konvergira.
  Iako smo rekli da nas zanima samo odluka o konvergenciji reda, budući da znamo računati sumu geometrijskog reda, budite oprezni s kojim članom kreće suma. Recimo, redovi

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots, \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots$$

se razlikuju u prvom članu. Oba reda su geometrijska i konvergiraju. Suma prvog reda iznosi $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$, no suma drugog reda je manja za 1, upravo za prvi član po kojem se razlikuje od prve sume.

- Ako konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$. Također, ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiraju, onda i $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergira. Za zadnju tvrdnju obrat **ne** vrijedi, npr. za $a_n = 1$ i $b_n = -1$ je $a_n + b_n = 0$). Redovi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergiraju jer im parcijalne sume $s_n = \pm n$ očito divergiraju u $\pm\infty$.
- Intuitivne ideje završavamo s jednom koja se da i precizirati kao teorem koji ćemo koristiti. Da bi parcijalne sume konvergirale u neki ("konačan") broj, koraci a_n za koje se te parcijalne sume mijenjaju moraju biti sve manji i manji, a onda u nekom trenutku težiti u nulu.

Teorem 1.5 (Nužan uvjet konvergencije)**.** Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, tada $a_n \to 0$.

Ovaj kriterij češće ćemo čitati kada na njega primijenimo obrat po kontrapoziciji:

Ako $a_n \nrightarrow 0$*, tada red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira.*

Dakle, provjerimo što se događa s općim članom a_n i konvergira li u nulu. Ako ne konvergira u nulu, tada možemo reći da red s kojim smo krenuli divergira, te smo time gotovi sa zadatkom. Ako se pak dogodi da $a_n \to 0$, ne možemo reći niti da red konvergira niti da divergira. Primjerice, pogledajte redove $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Oba zadovoljavaju da opći član a_n teži u nulu, no jedan od njih konvergira, a drugi ne.

Dakle, gore smo naveli prvi kriterij koji ćemo koristiti za određivanje konvergira li red. On je dosta slab, iako lagan za provjeriti. Sljedeći kriterij je s druge strane poprilično jak, ali ga treba znati koristiti. Intuitivno, radi se o sljedećem: promotrimo dva reda iz primjera s početka, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Za drugi smo relativno lagano odredili da konvergira, dok za prvi, osim zbog toga što vam je rečeno da je tako, ne znamo zapravo konvergira li (odnosno bolje rečeno, ne znamo zašto konvergira). S druge strane, ta dva reda su dosta slična: sumiramo članove koji o n ovise kao recipročna vrijednost kvadratne funkcije. Dapače, n-ti član drugog reda nalazi se po veličini točno između n-tog i $(n+1)$-tog člana prvog reda. Intuitivno, ti redovi su podjednako "jaki", i trebali bismo nekom usporedbom moći argumentirati da imaju jednaku odluku o konvergenciji.

Teorem 1.6 (Usporedni kriterij)**.** Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s **nenegativnim** članovima. Neka postoji $\lim_{n} \frac{a_n}{b_n}$ i neka je jednak q.

- Ako je $q \quad 0, +\infty \quad$, tada oba reda konvergiraju ili oba divergiraju.
- Ako je $q = 0$, tada ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako je $q = +\infty$*, tada ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

**Znamo da realan broj q ne može poprimiti vrijednost ∞, ali također znamo kako čitamo ovu tvrdnju.*

Radi potpunosti ove skripte, pišemo i alternativnu verziju usporednog kriterija. Obje verzije su ekvivalentne i koju od njih koristite samo ovisi o vašem "stilu" rješavanja zadataka.

Teorem 1.7 (Usporedni kriterij, alternativna verzija)**.** Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s **nenegativnim** članovima, i neka je $a_n \leq b_n$.

Ako konvergira $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tada konvergira i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

S druge strane, ako divergira $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tada i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

Napomena 1.8.

- Kao što smo već najavili, ovaj je kriterij relativno jak i s njime ćemo moći mnogo toga dokazati i često ga koristiti.
- Druga verzija teorema možda je za trenutak intuitivnija: ne može red s članovima manjim od divergentnog reda konvergirati, niti red s članovima većim od konvergentnog reda divergirati. Ipak, predlažemo da češće koristimo prvu verziju kriterija jer se ne moramo mučiti sa zadovoljenjem nejednakosti za sve prirodne n.
- Ovaj kriterij, kao što je motivirano prije njihovih iskaza, zamišljeno je da se koristi tako da se za red za koji želimo odrediti konvergira li ili ne, uzme neki njemu sličan red za koji znamo konvergira li i primijenimo kriterij. Ako smo dobro odabrali, ovaj kriterij će nam reći da imaju jednaku odluku o konvergenciji.
- U prvoj verziji teorema, intuicija je sljedeća: ako je $q \quad 0, +\infty \quad$ onda su a_n i b_n otprilike jednaki do na faktor q (tj. kao da vrijedi $a_n \approx q b_n$; barem za velike n, a znamo da ponašanje za male n nije bitno u odluci konvergencije reda). Ako je $q = 0$ onda je a_n puno manji od b_n i obratno ako je $q = +\infty$ onda je b_n puno manji od a_n.

Primjer 1.9. Provjerimo konvergiraju li redovi: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Prvi red s članovima $a_n = \frac{1}{n^2}$ uspoređujemo s redom s članovima $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Oba reda imaju u nazivniku polinom drugog stupnja po n. Zato računamo:

$$q = \lim_n \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_n \frac{1 + 1/n}{1} = 1.$$

Kako je $q = 1 \quad 0, \infty$, tada po usporednom kriteriju imamo da oba reda ili konvergiraju ili divergiraju. Kako znamo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tada i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Slično, za red s članovima $c_n = \frac{1}{n^3}$ uspoređujemo s redom s članovima a_n, za koji smo sada vidjeli da konvergira. Dobivamo da je limes

$$q = \lim_n \frac{c_n}{a_n} = 0,$$

pa stoga možemo zaključiti da kako red s članovima iz nazivnika ovog limesa konvergira, tada i red s članovima c_n (iz brojnika) također konvergira.

Napomena 1.10. Kasnije ćemo vidjeti i sami znati dokazati da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{divergira,} & \text{ako } \alpha \leq 1 \\ \text{konvergira,} & \text{ako } \alpha > 1 \end{cases}$$

Do tada ćemo to koristiti kao poznatu tvrdnju, te ju i vi smijete koristiti na kolokviju.

Primjer 1.11. Odredite konvergiraju li sljedeći redovi:

- (2.1.c)) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + n}$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1000}{\sqrt{n^2(n^9 + \frac{1}{n^{2021}})} + 1}$

U prvom primjeru imamo opći član koji je racionalna funkcija. Jedini kriterij (pored nužnog) koji znamo je usporedni kriterij, pa njega koristimo. Cilj je usporediti s pravim redom kojem znamo odluku. To radimo tako da uzimamo omjer općeg člana iz ovog primjera i nekog reda (vjerojatno s općim članom oblika $1/n^\alpha$, za neki α, jer je to klasa redova za koju znamo odluku). Pitanje je koji ćemo α uzeti. Recimo da smo odredili koji je to α. Usporedni kriterij (osim ako je drugačije navedeno, koristimo prvu verziju) tada bi se primijenio tako da tražimo limes omjera

$$\frac{n^2}{n^4 + n} : \frac{1}{n^\alpha}.$$

Najsretniji smo kada je taj limes q neki broj iz $0, +\infty$. Znamo da je to kada je $\alpha = 2$, pa tako opravdavamo svoj izbor.
Dakle, za red iz zadatka s općim članom $a_n = \frac{n^2}{n^4+n}$, uzimamo red za usporedbu s općim članom $b_n = \frac{1}{n^2}$. Primjenom usporednog kriterija na ta dva reda, imamo

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^4+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} = 1 \qquad 0, +\infty$$

odakle zaključujemo da oba reda konvergiraju ili oba reda divergiraju. Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, isto zadovoljava i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Za vaše rješavanje zadataka na kolokviju općenito ne morate argumentirati zašto ste uzeli neki red za usporedbu, bitno je samo da "radi" i odraditi argumentaciju (reći koji se kriterij koristi i izračunati q). Također, primijetite da smo mogli zapravo uzeti bilo koji α iz intervala $1, 2]$, no izbor $\alpha = 2$ je najlogičniji.
Nastavimo s primjerima dalje. Drugi je ružniji, no način rješavanja je isti. Opet ga želimo usporediti s nekim redom s članom oblika $1/n^\alpha$. Za to je zapravo bitno jedino vidjeti koji su "najjači" članovi (članovi koji se pojavljuju s najvišom potencijom) u brojniku i nazivniku. U brojniku je to jasno n^3, dok je u nazivniku to $\sqrt{n^2 \cdot n^9} = n^{11/2}$. Ne dajte se smesti, član $n^{1/2021}$ je jako slab i on konvergira u nulu, on ne povećava nazivnik. Dakle, cijeli opći član kada $n \to \infty$ ponaša se slično kao da je opći član $\frac{n^3}{n^{11/2}} = \frac{1}{n^{2.5}}$. Zato biramo $\alpha = 2.5$, odnosno uz red s općim članom $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 1000}{\sqrt{n^2(n^9 + \frac{1}{n^{2021}})} + 1}$ biramo red s općim članom $b_n = \frac{1}{n^{2.5}}$. Slično kao gore (provjerite sami) usporedni kriterij daje $q = 1$, pa oba reda konvergiraju ili divergiraju. Kako red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, isto zadovoljava i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Ovo je bio dosta ružan primjer, ali njemu je sadržano sve što trebate znati za inače za redove kojima opći član sadrži racionalnu funkciju i eventualno neke korijene: nađite "najjači" član u brojniku i nazivniku, oduzmite njihove eksponente kako biste dobili red s kojim ćete u konačnici napraviti usporedbu.

Nastavljamo s primjerima dalje. Sad ćemo uključiti i logaritme koji, kao što ćemo vidjeti, ponekad nam mogu pomoći, a ponekad odmoći.

Primjer 1.12. Odredite konvergiraju li sljedeći redovi:

- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \ln n}$
- (2.1.e)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

Promotrimo prvi primjer. Za trenutak ignorirajmo da postoji logaritam u općem članu i pokušajmo riješiti zadatak kako bismo inače. Da se umjesto logaritma ne nalazi ništa, rekli bismo da taj red konvergira. U ovom primjeru zato je prvi logični korak usporediti s redom s članovima $b_n = \frac{1}{n^3}$:

$$q = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^3 \ln n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Sad treba biti oprezan, budući da nismo dobili $q \quad 0, +\infty$. No, zaista se nalazimo u drugoj točki prve verzije usporednog kriterija: $q = 0$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, pa konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Pokušajmo isto i na drugom redu iz primjera. Ponovno bismo usporedili s istim redom s članovima $b_n = \frac{1}{n^3}$. Tada dobivamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(\ln n)^2}{n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n \to \infty} (\ln n)^2 \to +\infty.$$

Sada se nalazimo u problemu, jer ovaj slučaj nije pokriven usporednim kriterijem ($q = +\infty$ i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira). No, nije situacija toliko izgubljena. Ako slutimo da će red konvergirati, ne moramo uspoređivati originalni red samo s redom s članovima $\frac{1}{n^3}$, ostaje nam još mnogo eksponenata α u nazivniku (konkretno, svi $\alpha > 1$). Ponovno krenimo s nekim općenitim α, i uzmimo red s članovima $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$. Tada dobivamo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(\ln n)^2}{n^3}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3-\alpha}}.$$

Ako je $\alpha > 3$, dobit ćemo da omjer još brže ide u $+\infty$. Ali ako je $\alpha < 3$, tada ćemo dobiti omjer logaritma i (pozitivne) potencije. Za to možemo iskoristiti sljedeću tvrdnju, koju pamtimo kao "logaritam je sporiji od svakog polinoma x^a, $a > 0$". Preciznije:

Tvrdnja: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0.$

Dokaz:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^a} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x^a} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{ax^a} = 0.$$

To znači da u našem zadatku za α u članovima b_n možemo uzeti bilo koji $1 < \alpha < 3$, pa recimo uzmemo $\alpha = 2$. Prema usporednom kriteriju, u gornjem računu q poprima vrijednost 0, pa kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Primjer 1.13. (2.2.a)) Odredite konvergira li red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2 + n}$.

Ponovno kao ranije, prvo pogledajmo što bismo radili da nema najkompliciranijeg člana (ili barem člana s kojim znamo najmanje raditi). Kada bi umjesto reda s članovima $a_n = \dfrac{|\cos n|}{n^2+n}$ imali red s članovima $b_n = \dfrac{1}{n^2+n}$, to bi bio lak zadatak, usporedili bismo ga s redom s članovima $c_n = \dfrac{1}{n^2}$, (provjerite da je $q = 1 \in \langle 0, +\infty \rangle$), pa bismo zaključili da i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira.

Vratimo se sada na red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Iako postoje još neke metode rješavanja zadataka s trigonometrijskim članovima, na vježbama ćemo imati samo jednu: ocjena sinusa i kosinusa s 1. Kako je $|\cos n| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tako vrijedi

$$a_n = \frac{|\cos n|}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2+n} = b_n$$

Sada primjenjujemo drugu verziju usporednog kriterija: kako red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira (što smo saznali nakon usporedbe s $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$), konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Napomena 1.14.

- U gornjem zadatku, barem u ovakvom načinu rješavanja, morali smo u drugom koraku primijeniti drugu verziju usporednog kriterija. Kada bismo na iste redove s članovima a_n i b_n primijenili prvu verziju usporednog kriterija, dobili bismo da limes omjera a_n/b_n ne postoji (jer $|\cos n|$ ne konvergira kad $n \to \infty$), i ne bismo mogli ništa zaključiti. Zato smo uveli i međukorak s redom b_n kako bi nam ta usporedba bila što bezbolnija. Može se riješiti i direktno uspoređujući članove a_n i c_n, ali ovako je jednostavnije. Također, moguće je i riješiti ovaj zadatak koristeći red s članovima oblika $1/n^{\alpha}$, gdje je $\alpha \in \langle 1, 2 \rangle$, pa se ne mora primijenjivati druga nego prva verzija usporednog kriterija. Tada se q nađe preko teorema o sendviču. U suštini je sve slično, no smatramo da je ovo najjednostavniji način za rješavanje ovakvog tipa zadatka.
- Kao što ste mogli primijetiti, postoje redovi kojima prvi član kreće s $n = 0$ i oni kojima prvi član kreće s $n = 1$. Postojat će i oni koji će kretati s $n = 2$, i među njima ne postoji nikakva razlika u kontekstu odluke o konvergenciji i primjene kriterija konvergencije. Također, dosta često nam se u primjerima događalo da redovi konvergiraju, ali naravno, slične metode rade i za dokaze da redovi divergiraju.
- Svi primjeri do sada uključivali su polinomne, logaritamske, iracionalne i trigonometrijske izraze u n. Kada se pojavljaju eksponencijalni izrazi u n ili faktorijeli, moguće je i dalje koristiti usporedne kriterije, ali račun postaje ružniji. Za takve primjere postoje primjereniji kriteriji, koje je i lakše primijeniti nego usporedni kriterij.

Teorem 1.15 (D'Alembertov kriterij)**.** Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s **pozitivnim** članovima takav da postoji $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i jednak je q.

- Ako je $q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako je $q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- Ako je $q = 1$, nemamo odluku (ne znamo konvergira li i divergira).

Teorem 1.16 (Cauchyjev kriterij)**.** Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s **pozitivnim** članovima takav da postoji $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ i jednak je q.

- Ako je $q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
- Ako je $q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
- Ako je $q = 1$, nemamo odluku (ne znamo konvergira li i divergira).

Napomena 1.17*.*

- Retci u kriterijima koji se odnose na $q = 1$ i kažu "nemamo odluku" slični su kao i u ostalim kriterijima. Ako za neki red dobijete $q = 1$, jedino što možete zaključiti je da ste primijenili kriterij kojim ne možete ništa dokazati i da trebate naći neki drugi način kako riješiti zadatak. Primjer takvih redova su s članovima $1/n$ i $1/n^2$ (provjerite sami – znamo da jedan od njih konvergira, a drugi divergira, no ova dva kriterija nam to ne kažu). Dapače, za sve redove s članovima $1/n^\alpha$, gdje je $\alpha > 0$, ova dva kriterija dat će nam $q = 1$, odnosno da nemamo odluku.
- U suštini ovi kriteriji su ekvivalentni kao da dani red uspoređujete s nekim geometrijskim redom (s bazom q), samo izvedeno elegentnije. Kako geometrijski red konvergira mnogo brže od bilo kojeg reda s članovima $1/n^\alpha$ (ili divergira, ovisno o vrijednosti baze i α), ovo su dosta slabi kriteriji. Konkretno, kada biste primijenili Cauchyjev i D'Alembertov kriterij na sve primjere do sada, dobili biste $q = 1$, dakle da nemamo odluku. Jedina prednost ovih kriterija je da su jednostavniji za korištenje (nije nam potrebna intuicija s kojim redom ćemo usporediti dani red). Zato ih koristimo gotovo isključivo kada vidimo elemente s eksponencijalnim funkcijama i faktorijelima u članovima reda.

- Cauchyjev kriterij je jači od D'Alembertovog. Preciznije: svaki red koji se može riješiti D'Alembertovim kriterijem može se riješiti i Cauchyjevim kriterijem, dok obrat ne vrijedi. Srećom, takav primjer je dosta umjetno konstruiran, tako da se praktički ne morate time zamarati. Na gotovo svim primjerima koji će se nama pojavljivati ako ćete moći riješiti jednim kriterijem, moći ćete i drugim. Koji ćete kriterij koristiti od ta dva, to je vaša odluka i ovisi o vašem stilu. U pravilu, čini se da je Cauchyjev kriterij bolji kada se pojavljaju ekspoencijalne funkcije, a D'Alembertov kada se pojavljuju faktorijeli.

Primjer 1.18. Odredite konvergiraju li sljedeći redovi

- (2.2.d)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$,
- (2.2.g)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{n^2}}$,
- (2.3.d)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Kao što smo u jednom od gornjih primjera izrekli da je "polinom jači od svakog logaritma" (u kontekstu da jedna od tih funkcija puno brže teži u $+\infty$ od druge), tako se može dokazati da je "polinom slabiji od svake eksponencijalne". Možete to sami i dokazati za vježbu (uzmite omjer x^n/a^x i izračunajte limes kada $x \to +\infty$; to ćete napraviti tako da n puta primijenite L'Hospitalovo pravilo). Zato će činjenica da se u redu u prvom primjeru pojavljuje eksponencijalna funkcija biti ključna i njeno prisustvo je "važnije" od prisustva polinoma – drugim riječima, zato ćemo moći iskoristiti Cauchyjev ili D'Alembertov kriterij.
Iako kada sami rješavate zadatke možete iskoristiti bilo koji od tih kriterija, samo radi primjera, pokazujemo korištenje oba. Za D'Alembertov kriterij, računamo:

$$q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^{10}}{3^(n+1)}}{\frac{n^{10}}{3^n}} = \lim_n \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{3}$$

(u zagradi izraz očito teži u 1, činjenica da to dižemo na potenciju neovisnu o n to ne mijenja). Kako je $q < 1$, red konvergira. Za Cauchyjev kriterij:

$$q = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^{10}}{3^n}} = \lim_n \frac{1}{3}(\sqrt[n]{n})^{10} = \frac{1}{3},$$

zato što $\sqrt[n]{n} \to 1$ kada $n \to +\infty$ (to ćemo još prokomentirati u napomeni ispod primjera). U oba slučaja (ponavljam, vama je dovoljno izabrati jedan) red konvergira.
Za drugi primjer, ponovno je slična situacija, ponovno pokazujemo oba kriterija. D'Alembertov:

$$q = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)^5}{e^{(n+1)^2}}}{\frac{n^5}{e^{n^2}}} = \lim_n \frac{1}{e^{2n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^5 = 0$$

(druga zagrada opet teži k jedan, dok prvi faktor ide u nulu). Kako je $q < 1$, red konvergira. Za Cauchyjev kriterij:

$$q = \lim_n \sqrt[n]{a_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{n^5}{e^{n^2}}} = \lim_n \frac{1}{e^n}(\sqrt[n]{n})^5 = 0$$

(opet produkt izraza koji teži k nuli i koji teži k jedan). I prema ovom kriteriju, red konvergira.
Za zadnji primjer, iskoristit ćemo dva tablična limesa od kojih prvi nismo spominjali prošli semestar:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Kao i sve tablične limese, možete ih koristiti kao apsolutnu istinu. Koristeći prvi, primjena Cauchyjevog kriterija je trivijalna: $q = 1/e < 1$, pa red konvergira. Koristeći D'Alembertov kriterij:

$$\begin{aligned} q &= \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \\ &= \lim_n (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = \lim_n \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Opet red konvergira.

Napomena 1.19. Kada primjenjujemo Cauchyjev kriterij, često ćemo imati limese oblika

$$\lim_n \sqrt[n]{P(n)},$$

gdje je P neki polinom. Gore smo imali $P(n) = n$, pa smo rekli da je tada limes jednak 1. Pokušajte dokazati sami preko L'Hospitalovog pravila: prebacite se na realnu varijablu x, zapišite izraz kao $e^{1/x \cdot \ln x}$, i sjetite se kako to rješavamo preko preko L'Hospitala. Nadalje, taj limes $\lim_n \sqrt[n]{n}$ možete koristiti kao nešto poznato. Slično, kao što smo gore iskoristili, za bilo koju potenciju neovisnu u n (recimo, 2021), imamo $\lim_n \sqrt[n]{n^{2021}} = \lim_n (\sqrt[n]{n})^{2021} = 1^{2021} = 1$. Ako imate neke kompliciranije polinome, to rješavamo preko teorema o sendviču. Pogledajmo dva takva primjera:

- $P(x) = 17$ (ili bilo koja druga konstanta): Kako je $1 < 17 < n$ (za dovoljno velike n), prema teoremu o sendviču:

$$1 = \lim_n 1 = \lim_n \sqrt[n]{1} \leq \lim_n \sqrt[n]{17} \leq \lim_n \sqrt[n]{n} = 1$$

  pa je i $\lim_n \sqrt[n]{17} = 1$.

- $P(x) = 3n^6 + 4n^3 - 18$: Kako je

$$3n^6 + 4n^3 - 18 \leq 3n^6 + 4n^3 \leq 3n^6 + 4n^6 = 7n^6$$

i

$$3n^6 + 4n^3 - 18 \geq 3n^6 - 18 \leq 2n^6$$

(za dovoljno velike n, tj, čim je $n^6 > 18$), prema teoremu o sendviču:

$$\lim_n \sqrt[n]{2n^6} \leq \lim_n \sqrt[n]{3n^6 + 4n^3 - 18} \leq \lim_n \sqrt[n]{7n^6}.$$

Svaki izraz oblika $\sqrt[n]{an^6}$ možemo pisati kao $\sqrt{a}(\sqrt[n]{n})^6$, odakle vidimo da teži u 1, pa i početni izraz tamo teži.

Dakle, na ovih par primjera vidimo da vrijedi

$$\lim_n \sqrt[n]{P(n)} = 1.$$

Ipak, ako vam se takvi izrazi pojave na kolokviju, dokažite tu tvrdnju za konkretni polinom kao što smo ovdje pokazali (korištenjem tvrdnji za $\sqrt[n]{n}$ i $\sqrt[n]{a}$, $a \quad +, +\infty$, kao poznatih).

Napomena 1.20. Do sada smo radili samo s redovima s pozitivnim članovima. Što ako ima negativnih članova?

- Ako su svi negativni članovi negativni, jednostavno rješenje je da pogledamo red pomnožen s -1. Ako je samo konačno pozitivnih/negativnih članova, možemo zanemariti prvih konačno mnogo članova jer oni ne utječu na odluku o konvergenciji reda.

- Ako je nešto kompliciranije, imamo točno jedan od tri načina. Da budemo precizniji, ima više metoda kako općenito riješiti takve zadatke, ali na primjerima koji će se pojavljivati u našim zadatcima, ta tri načina bit će dovoljna:

  – Nužan uvjet konvergencije.
  – Leibnizov kriterij.
  – Apsolutna konvergencija.

Teorem 1.21 (Leibnizov kriterij)**.** Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red takav da a_n alterniraju po predznaku, da vrijedi $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ i da je $\lim_n a_n = 0$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Teorem 1.22. Za red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ kažemo (definiramo) da apsolutno konvergira ako konvergira red $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ako red konvergira apsolutno, tada konvergira i obično.

Napomena 1.23. Gore navedenu uputu najbolje je u praksi provoditi u tom redoslijedu, jer je u tom redoslijedu najjednostavnije i provesti te korake. Počet ćemo s nužnim uvjetom konvergencije, jedinim kriterijem do sada koji se može primijeniti i za redove s negativnim članovima. Provjerit ćemo konvergira li niz članova u nulu. Ako ne, znamo da red divergira i gotovi smo. Ako konvergiraju u nulu, nastavljamo provjere dalje. Tu provjeru najčešće možemo raditi i napamet, jer najčešće nužni uvjet konvergencije nam ne donosi odluku.
Nakon toga krećemo na Leibnizov kriterij. On se primjenjuje na redovima posebnog oblika, naime, predznaci moraju alternirati. Dakle, prvi, treći, peti član, ... u redu je negativan, dok su drugi, četvrti, šesti, ... pozitivni, ili obratno. Takve redove lako je uočiti (najčešće ćete vidjeti faktor $(-1)^n$, eventualno se može pojaviti i nešto poput $\sin(\pi(2n+1)), \cos(2\pi n)$ ili slično), i stoga je lako pokušati primijeniti Leibnizov kriterij. Za njega nakon uočavanja alternirajućih predznaka morate provjeriti još dvije stvari. Zadnji uvjet $\lim_n a_n = 0$ isti je kao kod nužnog uvjeta konvergencije (zato je korisno da ste prije ovog koraka provjerili taj kriterij). Preostalo je još dokazati da niz članova bez predznaka $|a_n|$ pada. To je najteži dio provjere tog kriterija.
Ako ni Leibnizov kriterij ne donosi odluku (najčešće jer red nije alternirajući po predznaku, nego su predznaci "nasumičnije razbacani" po članovima reda, ili jer niz nije padajući), jedino što nam je preostalo je primijeniti svojstvo apsolutne konvergencije. Ona nam sugerira sljedeće: pokušajmo dokazati da red u kojem smo uzeli apsolutnu vrijednost svakog člana konvergira (nekom od prije spomenutih metoda: usporedni kriterij, Cauchyjev kriterij ili D'Alembertov kriterij). Ako uspijemo, iskoristimo ovaj teorem: budući da takav red konvegira, konvergira i originalni (onaj u kojem postoje i pozitivni i negativni članovi).
U primjerima koji slijede pokazat ćemo kako primijeniti Leibnizov kriterij, budući da je nužan uvjet konvergencije trivijalno primijeniti, a tehnika primjene apsolutne konvergencije zapravo se naslanja na primjere od ranije.

Primjer 1.24. Odredite konvergiraju li redovi

- (2.4.f)) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;
- (2.4.d)) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{\ln n}$.

Prije primjene Leibnizovog kriterija uvijek možete pokušati primijeniti i nužan uvjet konvergencije (zapravo, to možete uvijek napraviti), ali ni ovdje se nećemo usrećiti jer nizovi članova oba reda konvergiraju k nuli. Također, u oba reda vidimo da su članovi nizovi s alternirajućim predznacima: članovi su umnošci pozitivnih brojeva s $(-1)^n$. Kako smo na prste (na kolokviju ne samo na prste) provjerili da je $\lim_n a_n = 0$, da bismo iskoristili Leibnizov kriterij, preostalo je provjeriti da su nizovi apsolutnih vrijednosti članova padajući. No, to u oba slučaja ide slično.
Dakle, u prvom primjeru vrijedi $|a_n| = \frac{1}{n}$. Ovaj niz očito je padajući. To možemo

provjeriti na dva načina. Prvo, možemo usporediti dva uzastopna člana:

$$\begin{aligned} |a_{n+1}| &\leq |a_n| \\ \frac{1}{n+1} &\leq \frac{1}{n} \\ n &\leq n+1. \end{aligned}$$

Kako su sve nejednakosti ekvivalentne, i kako vrijedi zadnja, vrijedi i prva, dakle, niz jest padajući.
Drugi način provjere je koristeći alate iz prethodnog semestra. Uvedimo funkciju $f(x) = 1/x$. Tada su članovi $|a_n|$ upravo vrijednosti $f(1), f(2), \ldots$. Vrijedi: ako je funkcija f padajuća, tada je i niz $(|a_n|)_{n\geq 1}$ padajući (budite oprezni, obrat ne mora vrijediti). Lako je provjeriti da je $f(x) = 1/x$ zaista padajuća funkcija (bilo promatranjem grafa, bilo derivacije kao što ćemo raditi kod kompliciranijih primjera), pa je i niz padajući. Kako god napravili provjeru, svi uvjeti Leibnizovog kriterija su zadovoljeni, dakle, red konvergira.
Pogledajmo i drugi primjer. Ponovno treba provjeriti samo pada li niz $(|a_n|_{n\geq 1})$, a tu provjeru možemo napraviti isto kao i prije. Pokušajte sami. Napomenimo da su zapravo ovi primjeri jednostavni, i da zapravo nije potrebno toliko detaljno argumentirati da je niz padajuć.

Zadatak 1.25. (Kolokvij 2020.) Odredite konvergira li red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2 - 10\ln n + 20}$.

Preostao nam je još jedan kriterij, koji je zapravo dosta moćan.

Teorem 1.26 (Integralni kriterij)**.** Neka je $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Neka je $f : [a, \infty \rightarrow \mathbb{R}$ **pozitivna, neprekidna i padajuća funkcija**, za neki $a \geq 0$, takva da vrijedi $a_n = f(n)$ za sve $n \quad \mathbb{N}$. Tada red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergira ako i samo ako nepravi integral $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergira.

Napomena 1.27. Na prvu zvuči dosta apstraktno, ali način razmišljanja je ovakav: u gotovo svakom zadatku jasno je kako članovi reda ovise o varijabli n (uzmimo za primjer $\frac{\sqrt[n]{n^5+1}}{e^n \ln n}$). Funkciju f iz gornjeg iskaza teorema zadajemo tako da ovisnost po n mijenjamo s ovisnosti po x: $f(x) = \frac{\sqrt[x]{x^5+1}}{e^x \ln x}$. Za takvu funkciju f moramo provjeriti dane uvjete.
Snaga kriterija se očituje i u tome što njime možemo dokazati i da red konvergira (ako integral konvergira) i da red divergira (ako integral divergira).
Jedna stvar oko koje treba biti oprezan: kada integral konvergira dobivena vrijednost nema veze sa sumom konvergentnog reda. Ovaj kriterij samo govori o odluci za konvergenciju, ne i vrijednosti tog reda.

Primjer 1.28. U ovisnosti o parametru $\alpha > 0$, odredite konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

To su redovi za koje smo na početku najavili da ćemo koristiti kao poznato konvergiraju li ili ne. Sada možemo i sami provjeriti te tvrdnje iz uvoda. Uvodimo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Ona je očito neprekidna za $x > 0$, te je i pozitivna i padajuća. Treba provjeriti njezin nepravi integral. Prije toga, treba uzeti i neku vrijednost za $a \geq 0$. Praktički je nebitno koju ćemo vrijednost uzeti, recimo uzmimo $a = 1$.

Odluka o konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ovisi o konvergenciji integrala $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$. Pa, izračunajmo taj integral. Znamo da imamo neko posebno ponašanje kada je $\alpha = 1$, pa ćemo to promotriti kasnije. Dakle, za sve $\alpha = 1$ imamo

$$\int_1^B \frac{1}{x^\alpha} dx = \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right) \Big|_{x=1}^{x=B} = \frac{1}{(1-\alpha)B^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}.$$

Sada treba pustiti $B \to \infty$. Kada je $\alpha > 1$, $B^{\alpha-1} \to +\infty$, a kada je $\alpha < 1$, $B^{\alpha-1} \to 0$. Zato je

$$\int_1^B \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{B \to +\infty} \int_1^B \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1. \end{cases}$$

Preostalo je provjeriti slučaj $\alpha = 1$:

$$\int_1^B \frac{1}{x} dx = (\ln x) \Big|_{x=1}^{x=B} = \ln B.$$

Kada $B \to +\infty$, $\ln B \to +\infty$, pa u tom slučaju integral divergira.

Integralni kriterij kaže da u slučajevima kada integral konvergira/divergira, da u istim slučajevima i red konvergira/divergira, a to se poklapa s onime što smo najavili na početku predavanja.

Zadatak 1.29. (2.4.b)) U ovisnosti o parametru $\varepsilon \geq 0$, odredite konvergira li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$.

Zadatak 1.30. U ovisnosti o parametru $\varepsilon \quad 0, 1$, odredite konvergira li red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\varepsilon}}$.

Napomena 1.31. Vratimo se opet na zadatke koje smo rješavali usporednim kriterijem. Jedan od najkompliciranijih koji nam se može pojaviti je oblika $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} (\ln n)^\beta$ (zapravo, može biti i kompliciranije u kontekstu da polinomi mogu imati i niže članove, mogu se pojavljivati i neki korijeni, ali znamo da ćemo ga moći barem u prvom koraku usporediti s redom oblika kao gore). Prokomentirajmo kako bismo ih riješili.

- Ako je $\beta = 0$, red sadrži samo potencije, i to znamo, te dapače, možemo koristiti kao poznato: red konvergira ako i samo ako je $\alpha > 1$.

- Promotrimo slučaj kada je $\beta < 0$ i $\alpha > 1$. Red je oblika $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}}$ ($-\beta$ je pozitivan, pa smo ga spustili u nazivnik). Kada logaritma ne bi bilo, red bi konvergirao. Članovi reda koji promatramo su još manji, dakle konvergirat će "još jače". To ćemo opravdati usporedbom s redom s članovima $\frac{1}{n^{\alpha}}$.

- Slična situacija je u slučaju kada je $\beta > 0$ i $\alpha \leq 1$. Kada u redu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\ln n)^{\beta}$ ne bi bilo logaritma, red bi divergirao, a ovako ima još veće članove. Usporedni kriterij s redom s članovima $\frac{1}{n^{\alpha}}$ će nam dati dokaz te slutnje.

- Prva kompliciranija situacija je u slučaju kada je $\beta > 0$ i $\alpha > 1$. Red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\ln n)^{\beta}$ bez logaritama konvergira, no logaritam povećava njegove članove. Vidjeli smo već ranije da zadatak ne možemo riješiti usporedbom s $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, ali možemo s redom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, gdje je α bilo koji realan broj veći od jedan (kako bi taj novi red konvergirao), ali manji od α (kako bi q u usporednom kriteriju bio jednak nuli). Kako je $\alpha > 1$, uvijek postoji takav α. Pokušajte sami riješiti zadatak $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{4n+3}}(\ln 2n)^{7}$.

- Slično se događa u slučaju kada je $\beta < 0$ i $\alpha < 1$. Čini nam se da red $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{-\beta}}$ divergira, ali ne možemo ga usporediti s redom $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Umjesto α opet mora doći α koji je ponovno između α i 1 (da bi red s α divergirao, te da bi q u usporednom kriteriju bio jednak $+\infty$). Kako je $\alpha < 1$, postoji neki α koji se može između ugurati. Pogledajte zadatak $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+3}}(\ln(n+2))^{-3}$.

- Preostali slučaj je sličan prošlom: $\beta < 0$ i $\alpha = 1$, no on je najkompliciraniji. Sada ne možemo izmisliti α između α i 1, jer α jest jednako 1. No, u ti slučajevi rješeni su integralnim kriterijem u Zadatcima 1.25 i 1.29.

Konačno, zaključujemo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}(\ln n)^{\beta} \begin{cases} \text{divergira,} & \text{ako } \alpha < 1 \text{ ili } \alpha = 1, \beta < -1 \\ \text{konvergira,} & \text{ako } \alpha \geq 1 \text{ ili } \alpha = 1, \beta \geq -1 \end{cases}$$

Ovo ne možete koristiti na kolokviju, nego dokazati kao što je objašnjeno u napomeni.

	$\beta < 0$	$\beta = 0$	$\beta > 0$
$\alpha < 1$	za α t.d. $\alpha < \alpha < 1$ usporedba s $1/n^\alpha$ *divergira*	*divergira*	usporedba s $1/n^\alpha$ *divergira*
$\alpha = 1$	integralni test *kako kad*	*divergira*	usporedba s $1/n^\alpha$ *divergira*
$\alpha > 1$	usporedba s $1/n^\alpha$ *konvergira*	*konvergira*	za r t.d. $\alpha > \alpha > 1$ usporedba s $1/n^\alpha$ *konvergira*

Tablica 1.1: Shematski prikaz metoda za redove oblika $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}(\ln n)^\beta$.

2

Taylorova formula

Teorem 2.1 (Taylorov polinom)**.** Neka f ima $n+1$ derivaciju na a, b R, i neka su x i 0 u tom intervalu. Tada postoji c_x između x i 0 tako da je

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

gdje je

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f\ (0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Taylorov polinom stupnja n, a

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

n-ti ostatak.

Napomena 2.2. Ovaj teorem možemo smatrati generalizacijom Lagrangeovog teorema jer za $n = 0$ dobivamo upravo spomenuti teorem.
Nadalje, ovaj teorem daje način kako općenitu i dovoljno lijepu funkciju aproksimirati polinomom. Polinomi su klasa možda najljepših funkcija – osim što su glatke, njihova evaluacija vrši se samo zbrajanjem, oduzimanjem i množenjem. Nema čak ni dijeljenja, koje je za računalo nešto zahtjevnija situacija. Jedan od načina korištenja ovog teorema, koji ćemo i mi simulirati u nekim zadatcima, upravo je aproksimacija nezgodnih/nepoznatih vrijednosti. Zamislite da nas zanima vrijednost $\sin(0.3)$. Danas je jednostavno, ukucamo u kalkulator i pročitamo rezultat. No, kako bismo to riješili bez kalkulatora, ili kako bismo sami isprogramirali da nam kalkulator da tu vrijednost? Odgovor je upravo Taylorov polinom: aproksimirat ćemo vrijednost $f(0.3)$ (za $f(x) = \sin(x)$) polinomom za $x = 0.3$ i koeficijentima koji ovise o višim derivacijama funkcije sin u točki 0. Znamo da su te sve vrijednosti derivacije jednake ± 1 i 0, pa je polinom jednostavno naći i izračunati. Uskoro ćemo vidjeti kako to izgleda na konkretnom primjeru.
Taylorov polinom općenito ne moramo tražiti oko nule, no radi jednostavnosti na vježbama ćemo raditi tako.

Primjer 2.3. Nađi Taylorov polinom stupnja 6 za funkcije

- $f(x) = \sin x$
- $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

Da bismo pronašli Taylorov polinom, potrebno je mnogo puta derivirati funkciju i evaluirati u nuli. Već iz prošlog semestra znamo da je

$$(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x & n = 4k+1, k \quad \mathrm{N} \\ -\sin x & n = 4k+2, k \quad \mathrm{N} \\ -\cos x & n = 4k+3, k \quad \mathrm{N} \\ \sin x & n = 4k, k \quad \mathrm{N} \end{cases}$$

To znamo lako evaluirati za $x = 0$. Zato je

$$T_6(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{0}{6!} \cdot x^6 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Iako nas se to ne pita eksplicitno, možemo i odrediti ostatak Taylorovog reda: $R_6(x) = \dfrac{-\cos(c_x)}{7!} x^7$. Dobiveno tumačimo na sljedeći način: za neki proizvoljni x, vrijednost $\sin(x)$ aproksimiramo vrijednošću $T_6(x)$. Za neki konkretni x, složit ćete se, vrijednost $T_6(x)$ je lagano izračunati. Greška koju radimo aproksimacijom je $R_6(x)$. Ona ovisi o nekoj točki c_x koja se nalazi između 0 i x. Gotovo nikad se ne može nešto saznati o toj vrijednosti, nego se ona ocjenjuje. Recimo, ovdje možemo ocijeniti da je cos po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 pa je zato

$$|R_6(x)| \leq \frac{x^7}{7!}.$$

Što je ova vrijednost manja, ocjena greške je manja. Ako nismo zadovoljni tom vrijednosti, vjerojatno trebamo uzeti Taylorov polinom višeg stupnja.

Riješimo i drugi primjer. Prvo ćemo prilagoditi funkciju za deriviranje mnogo puta: $f(x) = (1 - x)^{-1}$. Funkcije slične ovoj derivirali smo i u prošlom semestru: svakom novom derivacijom, eksponent izlazi ispred kao faktor, a on se smanjuje za jedan. Za n-tu derivaciju kao faktor dobivamo umnožak prvih n negativnih prirodnih brojeva te n faktora (-1). Nakon sređivanja, dobivamo

$$f^n(x) = n!(1 - x)^{-n-1}.$$

Zato je

$$T_6(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

a ostatak je $R_6(x) = -(1 - c_x)^{-7} x^7$.

Primijetite da kada bismo uzeli beskonačno mnogo članova Taylorovog polinoma, on bi postao geometrijski red u x. Njegova suma upravo je jednaka $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$. Nemamo još dovoljno alata da ovo i preciznije obrazložimo, no imat ćemo u sljedećoj lekciji.

Umjesto da ovaj postupak radimo za sve funkcije, iskoristit ćemo da je to netko već napravio prije nas. Za vježbu provjerite sami da sve formule vrijede.

Formule:

1) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$

$0 \leq x < 1$: $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$,

$-1 < x < 0$: $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$.

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$

$x \quad \mathsf{R}$: $|R_{2m-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$.

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$

$x \quad \mathsf{R}$: $|R_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$.

4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$

$x \geq 0$: $|R_n(x)| \leq \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$,

$x < 0$: $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

5) $\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m-1}(x)$

$-1 \leq x \leq 1$: $|R_{2m-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{2m+1}$.

6) $(1+x)^s = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$, $(s \quad \mathsf{R} \setminus \mathsf{N})$

$-1 < x \leq 0,\ n > s-1$: $|R_n(x)| \leq \frac{|s(s-1)\cdots(s-n)|}{(n+1)!}(1+x)^{s-n-1}|x|^{n+1}$,

$0 \leq x \leq 1,\ n > s-1$: $|R_n(x)| \leq \frac{|s(s-1)\cdots(s-n)|}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Napomena 2.4. Ovih formula nema na kolokviju, što nažalost znači da ćete ih morati naučiti ako ih želite koristiti. Dvije činjenice mogu utješiti: kao prvo, znamo način kako se te formule izvode (za danu funkciju nađite n-tu derivaciju u nuli i primijenite teorem s početka). Kao drugo, na kolokviju se najčešće pojavi ocjena za Taylorov ostatak, koji vas može podsjetiti kako izgleda Taylorov polinom.
Kao što smo rekli u prošlom primjeru, bitno je znati ocijeniti ostatak $R_n(x)$, budući da o toj ocjeni ovisi preciznost aproksimacije Taylorovim polinomom. Te formule koristit

ćemo tako da procijenimo koliko veliki n treba uzeti.
Formula za $f(x) = (1+x)^s$ je za trenutak zastrašujuća. Ukoliko umjesto s uzmete neku prirodnu vrijednost, članovi Taylorovog polinoma podsjetit će vas na članove iz binomnog teorema. (Što se dogodi kada bi zaista s bio prirodan broj? Kako tada izgleda Taylorov polinom visokog stupnja?) Nadalje, kako bismo koristili formule za ocjenu ostatka Taylorovog polinoma, osim to je bitno gdje se nalazi x, bitno je i da je n veći od $s-1$. Kako će najčešće s biti negativan ili racionalan broj manji od 1, to će kod nas često biti trivijalno ispunjeno.
Na kraju, napomenimo da sve formule u funkciji $\ln(1+x)$ vrijede i za $x = 1$, no tada ocjena na ostatak $R_n(x)$ opada presporo kako n raste. Vidjet ćemo i na konkretnom primjeru.

Primjer 2.5. Pronađite aproksimaciju vrijednosti

- (1.3.a)) $\cos 0.1$, s greškom manjom od 10^{-3};
- (1.4.c)) $\sqrt{e}$, s greškom manjom od 10^{-4};
- (1.5.b)) $\ln 2$, greška manja od 10^{-3};
- (1.8) $\sqrt{28}$, greška manja od 10^{-4}.

Promotrimo prvi primjer. Da bismo izračunali $\cos(0.1)$ znamo koju formulu koristimo, i znamo kako izgleda Taylorov polinom stupnja m. Ono što ne znamo je koliki m mora biti kako bismo bili sigurni da će vrijednost Taylorovog polinoma $P_{2m}(x)$ bila dovoljno točna, odnosno da će greška biti manja od 10^{-3}. Zato gledamo ocjenu na grešku: tražimo prirodan m t.d. $\dfrac{|0.1|^{2m+2}}{(2m+2)!} < 10^{-3}$. Sređivanjem dobivamo $10^{1-2m} < (2m+2)!$, a provjerom za male m dobivamo da je $m = 1$. Zato je odgovarajuća aproksimacija

$$\cos 0.1 = 1 - \frac{(0.1)^2}{2} + E, \quad |E| < 10^{-3}.$$

U idealnom slučaju gornju vrijednost bismo izračunali, no nećemo to tražiti na kolokviju, pa to nećemo raditi ni ovdje.
Kao i u prošlom primjeru, i u svim primjerima koji slijede, jedino pitanje koje preostaje je pronaći odgovarajući n. Za vrijednost $\sqrt{e}$ zanima nas zapravo $f(\frac{1}{2})$ gdje je $f(x) = e^x$. Čitajući formule ($\frac{1}{2} > 0$), tražimo n takav da je $\left|\dfrac{e^{1/2}(1/2)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq 10^{-4}$. Sređivanjem, i korištenjem da je $2 > \sqrt{3} > \sqrt{e}1$, tražimo n takav da je $2 \cdot 10^4 < 2^{n+1}(n+1)!$. Provjerom malih brojeva, zaključujemo da je najmanji izbor $n = 5$. Zato je konačno $\sqrt{e} = 1 + \dfrac{1}{2 \cdot 1!} + \ldots + \dfrac{1}{2^3 \cdot 5!} + E, \quad |E| < 10^{-4}$ U trećem primjeru, kao što smo najavili, nećemo raditi direktno tako da uvrstimo $x = 1$ u formulu za $\ln x$. Naime, tada bismo trebali naći n takav da je $|\frac{1}{n+1}| \leq 10^{-3}$, što znači da je najmanji takav n jednak 999. Nije baš lagano zbrojiti skoro tisuću brojeva na papiru, pa tako ne radimo. Koristimo trik (svojstva logaritama):

$$\ln(2) = \ln\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right).$$

Sada smo broj koji želimo aproksimirati zapisali kao zbroj dva broja koja treba aproksimirati. Svaki od njih aproksimirat ćemo na točnost $10^{-3}/2$, pa ćemo zbrajajući ih pogriješiti najviše za 10^{-3}.

Dakle, za x_i ($x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$) tražimo n_i t.d. $|R_{n_i}(x)| \le \frac{x_i^{n_i+1}}{n_i+1} \le \frac{1}{2}10^{-3}$. Pojednostavljivanjem dobivamo $2 \cdot 10^3 < (n_i + 1)(x_i^{-1})^{n_i+1}$, odakle dobijemo $n_1 = 5, n_2 = 7$. Zato je

$$
\begin{aligned}
\ln(2) &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 3} - \frac{1}{3^4 \cdot 4} + \frac{2^1}{3^5 \cdot 5}\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2^2 \cdot 7}\right) + E, |E| < 10^{-3}.
\end{aligned}
$$

Dobivena aproksimacija nam je draža jer ima manje od 1000 sumanada. Također, primijetite da na isti način možete aproksimirati i $\ln(x)$ i za x veće od 2: samo je potrebno x zapisati kao umnožak dovoljno faktora koji se nalaze između 1 i 2, i iskoristiti trik kao gore.

U zadnjem zadatku, opet nećemo uzeti $x = 27$. Razlog je zato što to zaista ne smijemo prema formulama (gledamo funkciju $f(x) = (1 + x)^s$ za $s = \frac{1}{2}$).

Ono što zaista radimo možemo na sljedeći način motivirati: da bismo u glavi aproksimirali broj $\sqrt{28}$ nećemo koristiti činjenicu da znamo koliko iznosi $\sqrt{1}$ (kako smo skoro krenuli rješavati zadatak), nego činjenicu da se vrijednost $\sqrt{28}$ nalazi blizu $\sqrt{25} = 5$ i $\sqrt{36} = 6$. Zato ćemo napraviti neki trik koji će nam pomoći na taj način:

$$
\sqrt{28} = \sqrt{25 + 3} = 5\sqrt{25\left(1 + \frac{3}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{3}{25}} = 5f\left(\frac{3}{25}\right),
$$

uz $f(x) = (1 + x)^{1/2}$. Dakle, $x = \frac{3}{25}$, a tražimo tražimo n t.d.

$$
|R_n(x)| \le \frac{|s(s-1)\dots(s-n)|}{(n+1)!}x^{n+1} < \frac{1}{5}10^{-4}
$$

(nismo zaboravili na faktor 5 koji množi funkciju f). Proces je ružan, no može se dobiti da za $n = 3$ nejednakost vrijedi. Konačno:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{28} &= 5\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{25} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{6}\left(\frac{3}{25}\right)^3 + \frac{E}{5}\right) \\
&= 5\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{25} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{6}\left(\frac{3}{25}\right)^3\right) + E, |E| < 10^{-4}
\end{aligned}
$$

Taylorov polinom možemo primijeniti i kod računanja vrijednosti određenih integrala. Znamo da ne možemo svaki integral eksplicitno, pa svaki način aproksimacije može biti koristan.

Konkretno u zadatcima više nećemo aproksimirati vrijednost funkcije u jednoj točki, nego ćemo morati aproksimirati vrijednost funkcije u svim točkama intervala na kojima integriramo. Točnije, podintegralnu funkciju mijenjamo polinomom i ostatkom.

Primjer 2.6. Odredite aproksimacije integrala s greškom manjom od 10^{-3}:

- (1.9.a)) $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$;
- (1.9.f)) $\int_0^1 \cos\left(x^2\right) dx$.

Složit ćemo se da ovaj integral ne možemo eksplicitno izračunati. Zato ćemo, kao što smo najavili, za funkciju koja nam stvara problem primijeniti Taylorov teorem. Odmah rastavljamo na zbroj dva integrala:

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \frac{T_n(x) - 1}{x} dx + \int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} dx.$$

Prvi integral bit će aproksimacija, a drugi trebamo ocijeniti. To se radi nejednakošću za trokute za integrale. Kao što vrijedi da je apsolutna vrijednost sume manja od sume apsolutnih vrijednosti, slično vrijedi i za integrale:

$$|E| = \left|\int_0^1 \frac{R_n(x)}{x} dx\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_n(x)}{x}\right| dx.$$

Sada iskoristimo ocjenu iz formula za eksponencijalnu funkciju. Ocjenjujemo kako znamo (npr. znamo da je $e^x \leq e^1 \leq 3$; polinomijalni dio možemo eksplicitno integrirati). Dalje imamo

$$|E| \leq \int_0^1 \left|\frac{R_n(x)}{x}\right| dx \leq \int_0^1 \frac{e^x x^n}{(n+1)!} \leq e^1 \int_0^1 \frac{x^n}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)(n+1)!}.$$

Kao u prošlim zadatcima, nalazimo neki n za koji je zadnji izraz manji od 10^{-3}. Dobivamo da je to $n = 5$. Zato zadani integral možemo aproksimirati kao

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = 1 + \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} + E, \ |E| < 10^{-3}.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx &= \int_0^1 \frac{T_n(x) - 1}{x} dx + E \\
&= \int_0^1 \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\right) - 1}{x} dx + E \\
&= \int_0^1 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} dx + E \\
&= 1 + \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} + E, \ |E| < 10^{-3}.
\end{aligned}$$

Kao i u prošlim zadatcima, bilo bi lijepo sada prosumirati i vidjeti eksplicitno što smo dobili kao aproskimaciju, ali to se ne očekuje na kolokviju, pa nećemo ni ovdje.
Za drugi zadatak, pristupamo slično. Primijenit ćemo Taylorov polinom za funkciju

$\cos(x)$ u točkama oblika x^2. Primijenite da ne znamo da nužno da je to isto kao primijeniti Taylorov polinom za funkciju $\cos(x^2)$, ali jest. Postupamo kao u prošlom zadatku:

$$\int_0^1 \cos(x^2)dx = \int_0^1 T_{2m}(x^2)dx + \int_0^1 R_{2m}(x^2)dx$$

$$|E| = \left|\int_0^1 R_n(x^2)dx\right| \leq \int_0^1 \left|R_n(x^2)\right| dx \leq \int_0^1 \frac{x^{4m+4}}{(2m+2)!}dx \leq \frac{1}{(2m+2)!(4m+5)}$$

Dobivamo da je $m = 2$, pa aproksimiramo zadani integral kao

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos\left(x^2\right) dx &= \int_0^1 T_{2m}(x^2)dx + E \\ &= \int_0^1 1 - \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^4}{4!}dx + E \\ &= 1 - \frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{9\cdot 4!} + E,\ |E| < 10^{-3}.\end{aligned}$$

Taylorov polinom može se koristiti i za računanje limesa. Metoda je slična kao i prije: ostatak ocjenjujemo, a iz polinoma tražimo bitne informacije. Ipak, traženje odgovarajućeg stupnja polinoma bit će drugačije.

U suštini rješavanje limesa na ovaj način slično je primjeni L'Hospitalovog pravila - dapače, stupanj polinoma koji ćemo koristiti za Taylorov teorem povezan je s brojem uzastopnih primjena L'Hospitalovog pravila. Razmislite sami kako biste riješili zadatke bez Taylorovog teorema.

Primjer 2.7. Izračunaj limese.

- (1.10.a), izmijenjen) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$;
- (1.10.b)) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{x}$.

Funkcija za koju ćemo očito primijeniti Taylorov polinom je $\cos x$. Za početak, nepoznatog stupnja $2m$. Kao kod integrala, rastavljamo na sumu limesa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{T_{2m}(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{R_{2m}(x)}{x^4} =: L_1 + L_2.$$

Cilj je dobiti da drugi sumand ide u nulu. To će biti kada je R_{2m} mnogo manji od x^4, a to, gledajući ocjenu za ostatak Taylorov polinoma, kada je $m = 2$. To treba formalno i dokazati. Znamo da je $0 \leq \left|\frac{R_4}{x^4}\right| \leq \frac{|x^2|}{6!}$. Kako promatramo limes izraza u nula, moramo koristiti ocjenu za ostatak i za poziitivne i negativne x. Dovršavamo teoremom o sendviču: lijeva i desna strana konvergiraju k nuli kada $x \to 0$, pa mora i ono u sredini. Tako smo odredili limes L_2 (i inače ćemo ga određivati slično, uvijek će biti $L_2 = 0$). Preostalo je odrediti L_1:

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{24}.$$

Drugi primjer je sličan, samo što imamo dvije funkcije od jednom, pa stoga moramo imati i dva Taylorova polinoma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{T_{2m}^{(1)}(x) - T_n^{(2)}}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{R_{2m}^{(1)}(x)}{x} - \frac{R_n^{(2)}(x)}{x} := L_1 + L_2 + L_3.$$

Želimo dobiti $L_2 = L_3 = 0$.

Za L_2 biramo na isti način kao u prošlom primjeru: kako se u ocjeni ostatka pojavljuje potencija x^{2m+2}, slutnja nam je da trebamo uzeti $m = 0$. Zaista, primjena teorema o sendviču na $0 \le \left|\frac{R_0^{(1)}}{x}\right| \le \frac{|x^1|}{2}$ nam daje da je $L_2 = 0$. Za L_3 postupak je malo teži jer, sjetimo se, da bismo promatrali limes kada $x \to 0$, trebamo gledati i pozitivne i negativne brojeve blizu nuli. No, formula za ocjenu ostatka za e^x razlikuje u tim točkama.
Jedan način kako riješiti taj problem je odvojeno gledati limese $x \to 0^+$ i $x \to 0^-$, te za svaki taj limes dokazati da je nula za dovoljno veliki n (koji je jednak za oba ta jednostrana limesa). Drugi način je naći uniformnu ocjenu za pozitivne i negativne x. Primijetite da su obje vrijednosti $\frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$ (za $x > 0$) i $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ (za $x < 0$) kojima ocjenjujemo ostatak manje od $\frac{e^{|x|}x^{n+1}}{(n+1)!}$. Zato kod računanja L_3 možemo uzeti $n = 1$ jer imamo $0 \le \left|\frac{R_1^{(2)}}{x}\right| \le \frac{e^{|x|}|x^1|}{2}$. Teorem o sendviču nam ponovno daje željeno: $L_3 = 0$. Preostalo je s odabranim n i m pronaći L_1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1) - (1+x)}{x} = -1.$$

Zadatak 2.8. (1.10.c)) Izračunaj limes $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin x}$.

Napomena 2.9. Kratka uputa za Zadatak 2.8 je da napišete limes u obliku umnoška limesa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}.$$

Tada zapravo riješite dva zadatka: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ i $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (za drugi limes možete iskoristiti tabličnu vrijednost, ili možete i njega za vježbu riješiti na ovaj način).

3

Redovi potencija

U prošlim lekcijama uveli smo pojam reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, te smo promatrali polinome $\sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ koji dobro aproksimiraju dane funkcije (ovisno o vezi koeficijenata a_n i derivacija funkcije f u nuli). Dapače, primijetili smo da što je stupanj polinoma N veći, u pravilu je aproksimacija funkcije polinomom bolja. Postavlja se pitanje smijemo li umjesto N pisati ∞.

Općenito, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ naziva se **redom potencija**. Kada fiksiramo bilo koji realan x, ovo postaje red, koji može konvergirati ili divergirati, pa ovo i nije toliko nov pojam. S druge strane, kako ova vrijednost ovisi o x, možemo pričati da preslikavanje $x \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definira funkciju po x. Njezina domena je skup x-ova za koji red konvergira.
Ako želimo red potencija povezati s konkretnom funkcijom, birali bismo koeficijente a_n kao n-te derivacije funkcije f u nuli, kao što kaže Taylorov polinom. O vezi između takvih redova potencija i originalnih funkcija pričat ćemo malo kasnije u ovoj lekciji.
Kao što su polinomi lijepe funkcije, tako nam se doima da su i redovi potencija lijepe funkcije jer su nastale zbrajanjem, množenjem i dijeljenjem. Ipak, činjenica da je suma beskonačna mora izazvati oprez što se sve s redovima potencija može raditi. Svaki red potencija definira neku funkciju po x. Za polinome su derivacija i integracija jednostavne, pa bi bilo lijepo kada bismo na isti način (član po član) mogli derivirati i integrirati redove potencija. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 3.1. Neka je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ red potencija, $r = \sup \left\{ |x| : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergira} \right\}$, zovemo ga radijus konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Označimo: (R1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, (R2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, (R2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

1) Redovi R1, R2 i R3 imaju isti radijus konvergencije.

2) Ako je $r > 0$ radijus konvergencije reda R1, onda svi redovi apsolutno konvergiraju za $|x| < r$ te divergiraju za $|x| > r$.

3) Ako je $\rho = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, tada je $r = \frac{1}{\rho}$.

4) Redovi R1, R2 i R3 definiraju funkcije na $\langle -r, r \rangle$, te vrijedi da je R2 derivacija, a R3 primitivna funkcija od R1.

Napomena 3.2.

- U teoremu nije komentirano, ali radijus konvergencije može biti i jednak nuli (pa red potencija konvergira samo za $x = 0$) i može biti ∞, što bi značilo da red potencija konvergira za svaki x.

- Ovaj netrivijalan teorem nam govori jednu stvar koju bismo možda uzeli zdravo za gotovo, a to je da u redu potencija možemo kao i u polinomu derivirati i integrirati član po član. Ne samo to, nego da dapače takve funkcije imaju i isti radijus konvergencije.

- No, budimo oprezni i sa zaključcima koje nam teorem donosi. U slučaju da je za neki red potencija njegov radijus konvergencije r iz $\langle 0, \infty \rangle$, tada znamo ponašanje reda za $|x| > r$ i $|x| < r$, no ne znamo ponašanje za $x = \pm r$. Svi primjeri su mogući (red potencija konvergira u obje te točke, divergira u obje točke, ili konvergira za jedan izbor, a divergira za drugi). Dapače, redovi R1 i R2 (te R3) dijele samo radijus konvergencije, no ne i područje konvergencije: moguće je da za $x = r$ jedan od redova konvergira, a drugi divergira.

- Pazite na kolokvijima čestu grešku da ne pomiješate r i ρ, tj. da se ne dogodi da izračunate ρ i zaboravite izračunati r.

- Definicija broja ρ dana je s $\limsup$. Ukratko, kada bismo pogledali sve konvergentne podnizove nekog niza, limes superior tada bi bila najveća vrijednost među tim limesima podnizova. Zasada se ne brinimo o tome budući da za konvergentne nizove vrijedi da je limes superior upravo jednak limesu.

- Formula za ρ lako je pamtljiva jer nas podsjeća na formulu kod Cauchyjevog kriterija za redove. Možemo se pitati postoji li i takva formula u "D'Alembertovom" stilu, i odgovor je da. Radijus konvergencije r jednak je i $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, ako taj limes postoji. Ono što je bitno je da se ova formula može primijeniti samo ako spomenuti limes potencija konvergira, dok se kriterij Cauchyjevog tipa može primijeniti i za nekonvergentne nizove koristeći limes superior. Zato ćemo u pravilu zadatke u ovoj lekciji rješavati kriterijem Cauchyjevog tipa.

Primjer 3.3. Odredite radijus konvergencije redova

- (3.1.b)) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$;
- (3.1.g)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n} x^n$;
- (3.2.a)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n^{3n}} x^n$;
- (3.1.f)) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$;
- (3.1.h)) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2}{n^n} x^n$.

Prvi primjer jako je jednostavan, ali napravit ćemo ga samo za vježbu formula:

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{n^n} = \lim_n n = +\infty.$$

Zato je $r = 0$. U nastavku ćemo postupati kao ovdje: $\limsup$ kod konvergentnih nizova mijenjamo samo s $\lim$.
U drugom primjeru imamo slično:

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{\ln n}{2^n}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{2}.$$

Preostalo je odrediti kamo ide brojnik. U prvoj lekciji pričali smo o limesima oblika $\sqrt[n]{P(n)}$, i da se rješavaju teoremom o sendviču i usporedbom s limesima oblika $\sqrt[n]{c}$ i $\sqrt[n]{n^k}$. Ovdje pristupamo slično: znamo da za dovoljno velike n vrijedi $1 \leq \ln n \leq n$, pa vrijedi i $\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{\ln n} \leq \sqrt[n]{n}$, odakle teorem o sendviču kaže da je limes brojnika u računu za ρ jednak 1. Zato je $\rho = 1/2$, odnosno $r = 2$.
U trećem primjeru ćemo koristiti tablični limes $\sqrt[n]{n!/n^n} \to 1/e$, ali s oprezom. Izraz koji se pojavljuje moramo namjestiti tako da svugdje gdje piše n napišemo $3n$.

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n^{3n}}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{3^{3n} n^{3n}} \cdot 3^{3n}} = \lim_n \left(\sqrt[3n]{\frac{(3n)!}{(3n)^{3n}}} \right)^3 3^3.$$

Kada $n \to \infty$, tada i $m := 3n \to \infty$, pa tek sad možemo zaključiti da ovo unutar zagrade koja se kubira ide u $1/e$. Zato je $\rho = 27/e^3$, a r je njegova recipročna vrijednost.
U četvrtom primjeru opet se moramo poigrati s faktorijelima. Jedino što znamo o članu oblika $\sqrt[n]{(kn!)}$ je da ga namjestimo na isti tablični limes kao gore. Zato je

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_n \sqrt[n]{(2n)! \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n!}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(2n)^{2n}}{n^n \cdot n^n}}.$$

Dakle, za svaki član koji je sadržavao faktorijele "izmislili" smo odgovarajući član koji sadrži potenciju broja na sebe samog. Na kraju smo morali "platiti" to dodavanjem novog faktora na kraj. Na prva tri razlomka ćemo primijeniti tablični limes, a zadnji treba srediti:

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_n \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \cdot \sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n}}{n^n \cdot n^n}} \\ &= \lim_n \left(\sqrt[2n]{\frac{(2n)!}{(2n)^{2n}}} \right)^2 \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \cdot \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \cdot \sqrt[n]{\frac{2^{2n} n^{2n}}{\cdot n^{2n}}} = e^2 \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} \cdot 4 = 4,\end{aligned}$$

odakle je $r = 1/4$.
U zadnjem primjeru imamo trigonometrijsku funkciju. Već u prvoj lekciji vidjeli smo da s izrazom poput $\cos n^2$ ne može mnogo raditi jer se dosta čudno ponaša. Jedino što možemo napraviti je primijeniti teorem o sendviču: $0 \leq |\cos n^2| \leq 1$ i nadati se da je to dovoljno. Kada bismo umjesto u brojniku imali 1, imali bismo

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_n \frac{1}{n} = 0.$$

Prema teoremu o sendviču imamo

$$0 \leq \lim_n \sqrt[n]{\frac{|\cos n^2|}{n^n}} \leq \lim_n \frac{1}{n} = 0,$$

pa je

$$\rho = \limsup_n \sqrt[n]{\frac{|\cos n^2|}{n^n}} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{|\cos n^2|}{n^n}} = 0,$$

te $r = \infty$.

Napomena 3.4. Vratimo se sada malo detaljnije na $\limsup$. Do sada smo samo koristili da ako je niz konvergentan, da je limes superior tog niza jednak limesu tog niza. Ako niz nije konvergentan, tada bismo, prema definiciji, trebali pogledati sve moguće podnizove niza i sve limese takvih podnizova, i odabrati najveći (odnosno supremum tih vrijednosti).
To nije trivijalan posao općenito. Olakotna okolnost je ta što u primjerima koji će se nama pojavljivati razlog zašto limes neće postojati je taj što će nizovi imati drugačije ponašanje na parnim i neparnim indeksima (najčešće zato što će sadržavati član poput $(-1)^n$). U tim slučajevima dovoljno je pogledati limese iz formule za ρ za parne i neparne indekse, i od njih uzeti veću vrijednost.
Preciznije, ali manje bitno: ako su dvije spomenute vrijednosti jednake, tada je cijeli niz konvergentan; ako se razlikuju, to su jedina dva konvegentna podniza (do na prvih konačno mnogo članova), pa time i dva jedina moguća limesa, te je zato veći upravo jednak limesu superioru.

Primjer 3.5. Odredite radijus konvergencije redova:

- (3.2.b)) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)\, x^n$;

- (3.2.c)) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+(-2)^n)\,x^n$.

U oba primjera imamo član $(-1)^n$, što sugerira da bi nizovi imaju drugačije ponašanje na parnim i neparnim mjestima. I doista je tako: u prvom primjeru zanimaju nas nizovi s članovima $\sqrt[n]{2}$ i $\sqrt[n]{0}=0$ (za neparne i parne n, redom), a u drugom primjeru $\sqrt[n]{2^n-1}$ i $\sqrt[n]{2^n+1}$ (ne zaboravite da formula za ρ ima i apsolutnu vrijednost).
Prvi primjer je dosta jednostavan, ali zapišimo ga kao što ćemo zapisivati i ostale primjere:

$$\rho_1=\lim_{n,\ n \text{ neparan}}\sqrt[n]{1+(-1)^n}=\lim_{n,\ n \text{ neparan}}\sqrt[n]{2}=1,$$

$$\rho_2=\lim_{n,\ n \text{ paran}}\sqrt[n]{1+(-1)^n}=\lim_{n,\ n \text{ paran}}\sqrt[n]{0}=0,$$

pa je

$$\rho=\limsup\sqrt[n]{1+(-1)^n}=\max\{\rho_1,\rho_2\}=1,$$

te je $r=1$.
Slično, ali malo kompliciranije, trebamo odrediti ρ_1 i ρ_2 u drugom primjeru. Za to nam trebaju nejednakosti trokuta, na način sličan kao što to radimo kod n-tog korijena polinoma. Slutnja je da ±1 koji se pojavljuje pored 2^n u korijenu ne bi trebao utjecati na odluku o konvergenciji. To dokazujemo na sljedeći način: za dovoljno velike n vrijedi

$$\frac{1}{2}2^n\le 2^n-1\le 2^n,$$

odakle je

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}2\le\sqrt[n]{2^n-1}\le 2,$$

što prema nejednakosti trokuta znači da je limes srednjeg niza jednak 2. Dobili smo

$$\rho_1=\lim_{n,\ n \text{ neparan}}\sqrt[n]{2^n-1}=2.$$

Na sličan način dokažite da je i $\rho_2=2$, pa je $\rho=2$ i $r=1/2$.

Zadatak 3.6. (3.2.f)) Odredite radijus konvergencije reda $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{n(n+1)}x^n$.

Napomena 3.7. Do sada smo se bavili redovima potencija i određivali njihove radijuse konvergencija. Rekli smo da ti redovi potencija određuju neke funkcije. S druge strane, Taylorov teorem sugerira nam da kako bismo za neke poznate funkcije našli njihov red potencija. Možemo pokušati da za konkretnu funkciju koja ima beskonačno derivacija promotrimo red $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$. Taj red naziva se **Taylorov red** potencija. Ako je funkcija dovoljno "lijepa", taj red konvergira na nekom skupu i konvergira upravo prema vrijednosti funkcije $f(x)$. Treba zapamtiti da to inače ne mora biti tako (recimo, čak red može i konvergirati, samo ne prema vrijednosti funkcije $f(x)$ od koje smo stvorili Taylorov red). Ipak, funkcije koje će se nama pojavljivati (konkretno iz formula u nastavku) su dovoljno "lijepe". Usporedite te formule s onima iz prošle lekcije.

Formule:

1) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad r = 1.$

2) $\sin x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \quad r = \infty.$

3) $\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad r = \infty.$

4) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad r = \infty.$

5) $\operatorname{arctg} x = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1}, \quad r = 1.$

6) $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n, \quad r = 1,$ gdje je $\binom{s}{n} := \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!}.$

7) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad r = 1.$

Napomena 3.8. U sljedećem zadatku tražit ćemo Taylorove redove za neke konkretne funkcije. Jedan način je da zaista izračunamo n-tu derivaciju funkcije u nuli i pronađemo uzorak. Lakši način je koristiti gornje formule, i još nekoliko trikova:

- Taylorov red polinoma je taj polinom sam;
- red funkcije $f(ax^k)$ je red od funkcije f uz to da zamijenimo x sa ax^k;
- red funkcije $x^k f(x)$ jer red od funkcije f pomnožen s x^k;
- za redove (anti)derivacija funkcija kojima znamo Taylorov red možemo koristiti Teorem 3.1;
- red sume funkcija jednak je sumi redova funkcija.

Primjer 3.9. Razvijte u red potencija sljedeće funkcije:

- $f(x) = x \sin x^2$;
- $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$;
- $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$.

Za prvu funkciju imamo redom:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \\
\sin x^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(x^2)^{2m-1}}{(2m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{4m-2}}{(2m-1)!}, \\
x \sin x^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} x \cdot \frac{x^{4m-2}}{(2m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{4m-1}}{(2m-1)!},
\end{aligned}$$

i time je prvi primjer gotov.
U drugom primjeru bitno je primijetiti da je $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ derivacija funkcije $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Zato je

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \\
f(x) &= g\ (x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.
\end{aligned}$$

To se može zapisati i kao $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ (pomicanjem indeksa za jedno mjesto).
Zadnji primjer riješite sami, barem jednim od ova tri načina: 1) rastav na parcijalne razlomke; 2) korištenjem $f(x) = 2xg(x^2)$, $g(x) = (1-x)^{-1}$; 3) primjećivanjem $f(x) = [-\ln(1-x^2)]$. Za rješenje se dobije $\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{2n+1}$

Primjer 3.10. Neka je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Pokažite da je $x^2 f\ \ (x) + x f\ (x) = 4x^2 f(x)$.
Oduzmimo lijevu i desnu stranu, i dokažimo da je toj razlici Taylorov red jednak nuli (odnosno da je svaki član u redu potencija jednak nuli). Prvo zapišimo funkciju i njene derivacije koje se pojavljuju u identitetu:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}, \\
f\ (x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n!)^2} (2n), \\
f\ \ (x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(n!)^2} (2n)(2n-1).
\end{aligned}$$

Sljedeće, pomnožimo drugu i prvu derivaciju s x^2 i x redom, jer tako stoji i u identitetu:

$$\begin{aligned} x^2 f\;\;(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}(2n)(2n-1), \\ x f\;(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}(2n). \end{aligned}$$

Isto radimo i s članom $4x^2 f(x)$, te dodatno zapišemo taj član drugačije. U zadnjem koraku htjet ćemo sumirati sve redove, pa se pripremimo da svi pribrojnici budu oblika "faktor puta x^{2n}":

$$4x^2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4\frac{x^{2n+2}}{(n!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 4\frac{x^{2n}}{((n-1)!)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2} 4n^2.$$

Konačno, računamo razliku:

$$x^2 f\;\;(x) + x f\;(x) - 4x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}\left[(2n)(2n-1) + (2n) - 4n^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot x^{2n} = 0.$$

Za kraj, navedimo još jednu stvar. Ako znamo kako glasi Taylorov red neke funkcije, onda znamo i kako glasi Taylorov polinom te funkcije proizvoljnog stupnja, te možemo odrediti i vrijednost derivacije te funkcije u nuli. Naime, Taylorov polinom funkcije čiji je red jednak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$ upravo je jednak sumi prvih nekoliko članova tog reda, ovisno o stupnju polinoma koji nas zanima. Vrijednost n-te derivacije prepoznajemo iz koeficijenta $\frac{f^n(0)}{n!}$.

Primjer 3.11. (Kolokvij 2020., izmijenjen) Odredite Taylorov polinom oko 0 stupnja 8 funkcije $f(x) = x^3 \sin(2x)$. Koliko iznosi $f^{(100)}(0)$?
Da je zadatak odredite Taylorov red, to bismo znali iz prošlih zadataka:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \\ \sin 2x &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{(2x)^{2m-1}}{(2m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} 2^{2m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}, \\ f(x) = x^3 \sin 2x &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} 2^{2m-1} \frac{x^{2m+2}}{(2m-1)!}. \end{aligned}$$

Za Taylorov polinom stupnja 8 zanima nas početni komad Taylorovog polinoma koji ide do člana uz x^8 (uključivo). Za to trebamo gledati članove do $2m + 2 = 8$, odnosno do $m = 3$:

$$T_8(x) = \sum_{m=1}^{3} (-1)^{m-1} 2^{2m-1} \frac{x^{2m+2}}{(2m-1)!} = 2x^4 - \frac{4}{3}x^6 + \frac{4}{15}x^8.$$

Da bismo odredili 100-tu derivaciju, zanima nas član koji stoji uz x^{100} u Taylorovom redu. Za $m = 49$ odgovarajući sumand je $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}x^{100} = (-1)^{(49-1)}2^{(2\cdot 49-1)}\frac{x^{(2\cdot 49+2)}}{(2\cdot 49-1)!}$, pa je

$$f^{(100)}(0) = 100! \cdot 2^{97}\frac{1}{97!} = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 2^{97}.$$

4

Limesi

Nakon prve tri lekcije, prelazimo na drugačiju temu. U ovoj i narednim lekcijama obrađivat ćemo teme vektorskih funkcija više varijabli. Do sada smo se upoznali i najčešće radili s funkcijama jedne varijable: $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ (ili podskupovima tih domena i kodomena). Možemo pričati što ako je domena višedimenzionalna, ili kodomena višedimenzionalna (ili oboje): $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$.

Kao prvo, ako kodomena naše funkcije više nije R nego R^m, primijetite da to možemo promatrati kao m funkcija kojima je kodomena R, i time svesti problem na nešto što već znamo.

Veći izazov je razmišljati o funkcijama više varijabli. Apstraktno gledajući, na prethodnim kolegijima naučili smo definiciju funkcije na bilo kojim skupovima, pa možemo i na ovima. Za neku funkciju $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ (kakve ćemo najčešće gledati u ovoj lekciji; za domenu možemo uzeti i neki podskup od R^2) kažemo da je to preslikavanje koje svakom uređenom paru (x, y) R^2 pridaje jednu vrijednost z R.

Zamišljajući, funkcije jedne varijable najčešće se poistovjećivali s njenim grafom, koji je bio neka krivulja u ravnini. Na x-osi nalazili su se elementi domene, a na y-osi nalazili su se elementi kodomene. Da bismo slično napravili i za funkcije dvije varijable, moramo ići u prostor. U x, y-ravnini postavit ćemo elemente domene, na z-os ćemo postaviti elemente kodomene, a graf više nije krivulja nego ploha. Funkcije više od dvije varijable malo je teže zamisliti jer nam treba više od tri dimenzije.

Neki pojmovi koje smo imali prije možemo jednostavno preslikati i u ovaj slučaj. Razmislite sami što bi bile domena, kodomena ili slika neke konkretne funkcije $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$, te kada bi neka funkcija bila injekcija ili surjekcija. Čak možemo shvatiti i što bi bila prirodna domena neke funkcije. Teži pojmovi koje moramo ponovno definirati su limes, neprekidnost i derivacija. Nešto su kompliciraniji i za objasniti i njima se bavimo u nastavku. Ono što ćemo sigurno koristiti je da su zbroj/razlika/umnožak/kvocijent/kompozicija elementarnih funkcija jedne varijable primijenjenih na varijablama funkcije opet neprekidna funkcija.

Definicija 4.1 (neprecizna). Funkcija $f : \Omega \to \mathsf{R}$ (Ω R^2) ima limes L u (x_0, y_0) ako za svaki niz $(x_n, y_n)_{n \geq 1}$ vrijedi

$$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) = \quad f(x, y) \to L.$$

Ako je $f(x_0, y_0) = L$, funkcija je neprekidna u (x_0, y_0).

Napomena 4.2. Ovu definiciju lagano možemo poopćiti i na funkcije više varijabli, ali kao što smo najavili, u ovoj lekciji većinom ćemo se baviti samo funkcijama dvije varijable. Kao i prije, limes, ako postoji, jedinstven je. Također, ne može biti $\pm\infty$, ali kao i inače, ako funkcija divergira, može biti jer ide u $+\infty$, ili u $-\infty$ ili jednostavno jer divergira. Umjesto niza $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$, kao i inače u jednoj varijabli, možete razmišljati o svakom načinu kako neki točke (x, y) u domeni se mogu približavati danoj točki (x_0, y_0). (Radi jednostavnosti, u nastavku radimo kao da je $(x_0, y_0) = (0, 0)$.)
I tu dolazimo do najbitnije točke u uvodu ove lekcije. Kod funkcija jedne varijable, iako je definicija slična, razmišljanje o limesu mogli smo svesti na jednakosti limesa slijeva i limesa zdesna. Odnosno, iako je definicija rekla da nas zanimaju svi načini kako se x-evi približivaju nekoj točki x_0, bilo je dovoljno gledati kako x-evi rastu zdesna u x_0 i kako x-evi padaju slijeva u x_0 (sjetite se zadataka oblika "Odredite parametar tako da ova po dijelovima definirana funkcija bude neprekidna").
Kod funkcija više varijabli ne možemo gledati na taj način. Ako funkcija konvergira kada se (x, y) približavaju zdesna (konkretno za $(x, y) = (h, 0)$ za $h \to 0^+$), ili kada se približavaju slijeva (konkretno za $(x, y) = (-h, 0)$ za $h \to 0^+$), te u oba slučaja limes iz definicije postoji, to nije dovoljno za reći da funkcija ima limes u $(0, 0)$. Čak i ako dodamo točke koje se približavaju odozgo i odozdo ($(x, y) = (0, \pm h)$, za $h \to 0^+$), pa čak ni ako se približavaju bilo kojim pravcem u ishodište ($(x, y) = (ah, bh)$, za $h \to 0^+$ i proizvoljne realne konstante a, b), funkcija i dalje može divergirati. I zato ovakvi zadatci mogu biti netrivijalni.
Jedina pozitivna stvar ovakvog načina razmišljanja je prilikom dokazivanja da neka funkcija nema limes u točki. Za to je dovoljno dokazati da vrijedi suprotna tvrdnja iz definicije: da za barem jedan izbor približavanja (x, y) u točku (x_0, y_0) limes iz definicije ne postoji, ili da postoje dva različita načina koji daju drugačije limese (usporedite s filozofijom lijevog i desnog limesa u jednoj varijabli).
Zato, u zadatcima oblika "Pronađite limes ako postoji", predlažemo ovakvu kuharicu:

1) *Pokušajmo dokazati da limes ne postoji:* Dovoljno je naći jedan "niz" za koji limes divergira, ili dva niza koja daju različite rezultate (ako limes nije jedinstven, ne može postojati). Primjeri takvih nizova (odnosno načina približavanja točaka (x, y) točki $(0, 0)$) su $(\pm h, 0), (0, \pm h), (\pm h, \pm h), (ah, bh)$.

2) *Pokušajmo dokazati da limes postoji:* Iskoristit ćemo znanja tabličnih limesa funkcija jedne varijable i kompoziciju s neprekidnim funkcijama ("supstitucija").

3) *I dalje pokušavamo dokazati da limes postoji, ali gornje nam nije pomoglo:* Iskoristit ćemo teorem o sendviču.

Ako imate intuiciju oko nekog limesa, kuharicu možete i u drugačijem redoslijedu primijeniti.

Primjer 4.3. Odredi prirodnu domenu funkcije, limese, i odredite može li se funkcija dodefinirati u promatranoj točki tako da bude neprekidna:

- (4.1.a)) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$;
- (4.1.d)) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy}$;
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2+y^2\right)^{1/(x^2+y^2)}$.

Prvi primjer je rijetkost iz dva razloga: gotovo nikad više vam se neće pojaviti ovako lagan primjer, i preskačemo "kuharicu". Naime, funkcija je definirana za sve x, y R, pa joj je domena cijeli R^2. Također, funkcija je i neprekidna na svojoj domeni (jer su e^x, y i množenje neprekidne funkcije), pa je limes upravo jednaka vrijednost te funkcije u $(0,0)$, i iznosi 0.
Drugi primjer dosta je sličan prvom. Za domenu vidimo da iz R^2 trebamo izbaciti sve točke u kojima je $x = 0$ ili $y = 0$. Grafički, to je cijela ravnina R^2 s izbačenim koordinatnim osima. Za računanje limesa prvo pojednostavnimo izraz:

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \frac{x^2+2xy+y^2-y^2+2xy-y^2}{xy} = \frac{4xy}{xy}.$$

Dakle, imamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{xy} = 4.$$

Razlog zašto smo na kraju smjeli podijeliti s xy je sličan kao i u funkcijama više varijabli: za limes bitne su točke koje se nalaze proizvoljno blizu točke $(0,0)$, no ne i sama ta točka (ili točke koje joj nisu u prirodnoj domeni).
U trećem primjeru ćemo ipak primijeniti kuharicu. Kao prvo, zaključujemo da je domena cijeli R^2 bez ishodišta. Nakon toga, nemamo neki jednostavan argument kako bismo pronašli limes. Kuharica kaže: promotrimo koliko bi limesi iznosili za neke konkretne načine približavanja (x, y) prema $(0, 0)$. Zaista,

- kada su (x, y) oblika $(h, 0)$ (kad $h \to 0^+$), izraz $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ teži u $\dfrac{h\cdot 0}{h^2+0^2} = 0$;
- kada su (x, y) oblika (h, h) (kad $h \to 0^+$), izraz $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ teži u $\dfrac{h\cdot h}{h^2+h^2} \to \dfrac{1}{2}$.

Kada bi postojao limes, svi ovakvi limesi trebali bi imati istu vrijednost L. Mi smo dobili dvije različite, dakle limes u ovom slučaju ne postoji.
U zadnjem primjeru pogledajmo kako dokazati da neki limes postoji. Kao prvo, primijetimo da je prirodna domena cijeli opet cijeli R^2 bez ishodišta. Ako želite, možete primijeniti prvi korak kuharice, no on vam ne bi pomogao jer biste svaki put dobili da je

limes ovog niza e. Slutimo da limes postoji i da je jednak upravo e. Također, primijećujemo da je zapravo ova funkcija izražena pomoću $x^2 + y^2$. Jedan način je za primijetiti da je $(1+x^2+y^2)\frac{1}{x^2+y^2} = F(G(x,y))$, gdje je $F(t) = (1+t)^{1/t}$ i $G(x,y) = (x^2+y^2)$. Ovo je i jedan način kako bismo dovršili zadatak (G je neprekidna na domeni, $G(0,0) = 0$, te F ima limes u nuli), smijete ga i inače koristiti, ali je previše formalan, možemo raditi nekako prirodnije. To ćemo riješiti pomoću supstitucije:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1 + x^2 + y^2\right)^{1/(x^2+y^2)} = \begin{bmatrix} t = x^2 + y^2 \\ (x,y) \to (0,0) \ = \quad t \to 0^+ \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0^+} (1+t)^{1/t} = e,$$

gdje smo na kraju primijenili tablični limes.

U zadnjem primjeru bilo je bitno paziti kamo varijabla t konvergira, kako bismo mogli primijeniti limes koji znamo iz gradiva vezanog uz funkcije jedne varijable.

Primjer 4.4. Odredi prirodnu domenu funkcije, limese, i odredite može li se funkcija dodefinirati u promatranoj točki tako da bude neprekidna:

- (4.1.c)) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{xy}$;
- (4.1.e)) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y}$;
- (4.2.b)) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4 + y^4}$;
- (4.2.d)) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;
- (4.2.e)) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$;
- (4.2.i)) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^8}$.

Prvi primjer nalikuje na primjer koji smo već rješavali, ali drugačiji je. Ponovno je domena $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pojednostavljenje izraza daje

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{xy} = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}.$$

Postoje razni primjeri kojima možemo dokazati da limes ne postoji, ali najbrži je ako pogledamo $(x,y) = (h^2, h)$, $h \to 0^+$, tada gornji izraz teži u

$$\frac{2h^4 + 2h^2}{h^2 h} = 2h + \frac{2}{h} \to +\infty.$$

Dakle, limes ne postoji.
Drugi primjer nas podsjeća na tablični limes jedne varijable: $\sin x/x$, pa ćemo to i iskoristiti. Prvo recimo da je domena funkcije R^2 bez osi x, a zatim zapišimo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot y.$$

Limes drugog faktora će očito biti nula, dok za prvi koristimo supstituciju:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \begin{bmatrix} & t = xy & \\ (x,y) \to 0 & = & t \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Zato i originalan limes teži u $1 \cdot 0 = 0$.
Brojnik trećeg primjera smo već vidjeli, te to koristimo (domena funkcije je R^2 bez ishodišta):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4 + y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}{x^4} \cdot \frac{x^4}{x^4 + y^4}.$$

Prvi faktor teži u $1/24$, dok za drugi još ne znamo kamo teži. No, ispast će da ne teži nikamo, tj. da divergira. Uvrštavanjem $(x,y) = (h,0)$, izraz $\frac{x^4}{x^4+y^4}$ teži u 1, dok za $(x,y) = (h,h)$, izraz $\frac{x^4}{x^4+y^4}$ teži u $1/2$, što znači da drugi faktor nema limes. To znači da ni originalan izraz nema limes. Zaista, iz gornjeg raspisa vidimo da za isti izbor $(x,y) = (h,0)$ i $(x,y) = (h,h)$ originalan izraz $\frac{1-\frac{x^2}{2}-\cos x}{x^4+y^4}$ teži u $1/24$ i $1/48$, redom, dakle limes ne postoji.
U četvrtom primjeru ponovno je prvi logičan korak možda namještati na limes oblika $\sin x/x$, no slično kao u prošlom primjeru, to neće biti potrebno jer ćemo dokazati da limes ne postoji. Uvrstite $(x,y) = (h,0)$ i $(x,y) = (0,h)$ i uvjerite se sami. Domena je R^2 bez ishodišta.
Peti primjer je primjer u kojem nam prva dva koraka kuharice neće pomoći. Naime, za sve izbore (x,y) ovisne o h dobivat ćemo limes 0, no ne možemo ni svesti na neki limes jedne varijable. Trik je pomoću teorema o sendviču i tzv. *A–G nejednakosti*. Za dva broja ona se može izreći i kao $2\sqrt{ab} \le a + b$, što je ekvivalentno $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$. Za detaljni iskaz nejednakosti pogledajte ispod ovog primjera. Primijenimo li tvrdnju za $a = x^2$ i $b = y^2$, dobijemo:

$$0 \le \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \le |x| \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x|.$$

Kada $(x,y) \to (0,0)$, obje strane teže u nulu, pa tamo teži i izraz iz zadatka. Domena je R^2 bez ishodišta.
Zadnji primjer je teorijskog značaja. U ovom primjeru za sve odabire $(x,y) = (ah, bh)$, $h \to 0^+$ (dakle, približavanja točaka (x,y) po polupravcima k ishodištu) dobit ćemo da bi limes trebao biti jednak nuli. No, za $(x,y) = (h, h^2)$ (inspirani prvim članom u nazivniku), dobijemo da u tom slučaju izraz teži u $1/h^3 \to +\infty$, što znači da limes ne postoji. Domena je R^2 bez ishodišta.

Teorem 4.5 (A–G nejednakost)**.** Za pozitivne realne brojeve $x_1, x_2, \dots, x_n$ općenito vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Zadatak 4.6. (4.1.g)) Odredi prirodnu domenu funkcije, limese, i odredite može li se funkcija dodefinirati u promatranoj točki tako da bude neprekidna: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.

5

Parcijalne derivacije

Kod funkcija jedne varijable, derivacija funkcije bila je $f\ (x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Njeno uvođenje motivirali smo brzinom i tangentom. U funkcijama više varijabli nije jasno što se nalazi u brojniku, ni što bi se nalazilo u nazivniku niti kako je to povezano s brzinom ili tangentom neke krivulje ili plohe. Jedino što bismo možda znali je uzeti jednu komponentu funkcije (ako joj je kodomena višedimenzionalna), uzeti jednu varijablu (ostale promatrati kao parametar) i derivirati izraz po toj varijabli. Time bismo dobili **parcijalnu derivaciju**. Ako je dimenzija domene n, a kodomene m, parcijalnih derivacija ima $n \times m$. Postavlja se pitanje što s njima raditi.

Definicija 5.1. Za $f : \Omega \to \mathsf{R}^m$ $(\Omega \quad \mathsf{R}^n)$, matrica derivacija u točki c je

$$Df(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(c) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(c) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(c) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(c) \end{bmatrix}.$$

Napomena 5.2. Ukratko, pojam derivacija sam po sebi kod vektorskih funkcija više varijabli više ne postoji. Postoje sljedeći pojmovi:

- Parcijalna derivacija. Oznake: $\partial_x f_3, \partial_{x_2} f_3, \partial_1 f_3, \frac{\partial f_3}{\partial x}$. Najsličnije derivaciji u funkcijama jedne varijable. Deriviraj neku komponentu funkcije po jednoj varijabli, dok sve ostale promatraj kao parametar.

- Matrica derivacija (ili Jacobijeva matrica). Oznaka: Df. Tablica parcijalnih derivacija. Postoji i Jakobijan (oznaka: J_f): to je determinanta Jacobijeve matrice (ako je ona kvadratna).

- Diferencijal. Poistovjećuje se s matricom derivacija. Linearni operator kojem je matrica derivacija matrični prikaz u kanonskoj bazi. Vjerojatno pojmovi koji su gore navedeni vam nisu poznati. Kada ćete ih naučiti na Lineranoj algebri 1 i 2, vratite se i pročitajte ovo ponovno, a do tada poistovjetite diferencijal s matricom derivacija.

- Gradijent. Oznaka: f (čita se "nabla"). Definira se samo za funkcije kojima je kodomena jednodimenzionalna. Nastaje transponiranjem matrice derivacija, i predstavlja vektor iz R^n kojem su elementi parcijalne derivacije, te se nalazi u domeni funkcije.

Primjer 5.3. Odredi parcijalne derivacije, matricu derivacije i gradijent funkcije $f(x, y) = x^y$.
Kako je kodomena funkcije R, parcijalne derivacije postoje dvije, nastale deriviranjem po prvoj i drugoj varijabli:

$$\partial_x f(x, y) = yx^{y-1}, \quad \partial_y f(x, y) = x^y \ln x.$$

Matricu derivacija dobijemo kada postavimo ove derivacije u 2×1 matricu:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} yx^{y-1} & x^y \ln x \end{bmatrix}.$$

Gradijent je transponirana matrica derivacije:

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} yx^{y-1} \\ x^y \ln x \end{bmatrix}.$$

Prokomentirajmo da za ovu funkciju Jakobijan ne postoji budući da matrica derivacije nije kvadratna.

Primjer 5.4. Izračunajte matricu parcijalnih derivacija:

- (5.2.b)) $f(x, y) = \left(x^2 + \sin y, \mathrm{e}^x + xy^2\right)$;
- (5.2.f)) $g(x, y, z, u, v) = x^2 + ux + 3zv^2 + y^3 - y$;
- (5.2.g)) $h(x) = \left(x^3 + 2 \sin x, -x + e^x, 2x\right)$.

Deriviranjem, redom dobivamo sljedeća rješenja:

$$\begin{aligned} Df(x, y) &= \begin{bmatrix} 2x & \cos y \\ e^x + y^2 & 2xy \end{bmatrix}; \\ Dg(x, y, z, u, v) &= \begin{bmatrix} 2x + u & 3y^2 - 1 & 3v^2 & x & 6zv \end{bmatrix}; \\ Dh(x) &= \begin{bmatrix} 3x^2 + 2 \cos x \\ e^x - 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zadatak 5.5. (5.2.c)) Izračunajte matricu parcijalnih derivacija za

$$f(x, y, z) = \left(\sin x \cos y + z^2, xz\right)$$

Napomena 5.6. Za parcijalne derivacije vrijede standardna pravila (derivacija zbroja, razlike, umnoška, kvocijenta). Vrijedi i pravilo derivacije kompozicije, koje je malo čudnije kad se radi o matricama.

Teorem 5.7. Neka su $f : \mathsf{R}^m \to \mathsf{R}^p$, $g : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ derivabilne funkcije. Tada je i kompozicija $f \circ g$ diferencijabilna, te za svaki c vrijedi

$$\mathrm{D}(f \circ g)(c) = \mathrm{D}\, f(g(c))\mathrm{D}g(c).$$

Napomena 5.8. Kod kompozicije treba paziti da se dimenzija kodomene od g poklapa s domenom domene od f. To je logično i u kontekstu množenja matrica.

Primjer 5.9. Izračunajte diferencijal kompozicije $f \circ g$ sljedećih funkcija:

- (5.5.c)) $f(x,y) = \left(\mathrm{tg}(x-1) - e^y, x^2 - y^2\right), g(u,v) = (e^{u-v}, u-v)$ u $(1,1)$;
- (5.5.d)) $f(x,y,z) = (e^{x-z}, \cos(x+y) + \sin(x+y+z))$,
  $g(u,v) = (e^u, \cos(v-u), e^{-v})$ u $(0,0)$.

Da bismo izračunali derivaciju kompozicije, trebamo izračunati matricu derivacije za g, evaluirati je u danoj točki c, te matricu derivacije za f i evaluirati je u $g(c)$.
U prvom primjeru derivacije funkcija f i g su

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos^2(x-1)} & -e^y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}, \quad Dg(u,v) = \begin{bmatrix} e^{u-v} & -e^{u-v} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vrijednosti tih matrica u $g(1,1) = (1,0)$ i $(1,1)$ su

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad Dg(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Umnožak tih matrica je

$$\mathrm{D}(f \circ g)(1,1) = \mathrm{D}\, f(g(1,1))\mathrm{D}g(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

U drugom primjeru slično, derivacije funkcija f i g su

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{x-z} & 0 & -e^{x-z} \\ -\sin(x+y) + \cos(x+y+z) & -\sin(x+y) + \cos(x+y+z) & \cos(x+y+z) \end{bmatrix},$$

$$Dg(u,v) = \begin{bmatrix} e^u & 0 \\ \sin(v-u) & -\sin(v-u) \\ 0 & -e^{-v} \end{bmatrix},$$

vrijednosti tih matrica u $g(0,0) = (1,1,1)$ i $(0,0)$ su

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\sin 2 + \cos 3 & -\sin 2 + \cos 3 & \cos 3 \end{bmatrix}, \quad Dg(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a umnožak tih matrica je

$$\mathrm{D}(f \circ g)(0,0) = \mathrm{D}\, f(g(0,0))\mathrm{D}g(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \cos 3 - \sin 2 & -\cos 3 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 5.10. (5.5.a)) Izračunajte diferencijal kompozicije $f \circ g$ funkcija $f(x, y) = (y + \ln(1 + x), y), g(u, v) = (u - v, v + 1)$ u $(0, 0)$.

Napomena 5.11. Ponekad u vas zadatcima neće tražiti da odredite sve parcijalne derivacije, nego samo određenu. Tada ne treba odrediti cijele matrice derivacija za funkcije f i g, nego samo određeni stupac ili redak. Konkretno, da je zadatak "odredite parcijalnu derivaciju po prvoj varijabli druge komponente funkcije $f \circ g$ funkcija iz prvog primjera", tada bi nas zanimala samo vrijednost u prvom stupcu i drugom retku matrice $\mathrm{D}(f \circ g)(1, 1)$, za što nam je potrebno odrediti samo drugi redak matrice $Df(x, y)$ u $g(1, 1)$ i prvi stupac matrice $Dg(u, v)$ u $(1, 1)$, te dobiveno pomnožiti.

Kao što je u jednoj varijabli derivacija bila povezana s tangentom na krivulju, tako je ovdje diferencijal povezan s tangencijalnom plohom.

Teorem 5.12. Neka je dana funkcija $F : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$. Definiramo ***nivo skup funkcije*** F (za neku vrijednost $c \quad \mathrm{R}$) kao skup $\{(x_1, \ldots, x_n) : F(x_1, \ldots, x_n) = c\}$.
Tangencijalna ravnina na plohu danu nivo skupom $F(\boldsymbol{x}) = c$ je u točki $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ je dana s

$$\partial_1 F(\boldsymbol{x}^0)(x_1 - x_1^0) + \ldots + \partial_n F(\boldsymbol{x}^0)(x_n - x_n^0) = 0.$$

Napomena 5.13. Općeniti nivo skup funkcije $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, za dovoljno lijepu funkciju F, skup je točaka u prostoru koje su povezane jednim uvjetom. Zbog tog (jednog) uvjeta taj skup u prostoru gubi jedan stupanj slobode i zbog toga je to neka ploha u prostoru (intuitivno, neprecizno rečeno). Konkretno, na nekom primjeru, primijetite da je nivo skup funkcije $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ za $c = 0$ sfera radijusa r.
U nekim izvorima vidjet ćete definiciju skupa samo u slučaju s $c = 0$. To nama ne stvara problem, jer tada možete definirati funkciju $G(x, y) = F(x, y) - c$ i promatrati "pravi" nivo skup funkcije G. Primijetite da se F i G imaju isti gradijent.
Iz gornje formule primjećujemo i sljedeće: gradijent funkcije F je normala na njegovu tangencijalnu ravninu. Ovdje prvi put vidimo ulogu gradijenta i neki razlog zašto bi netko uvodio taj pojam umjesto matrice derivacije (gradijent je ovdje vektor, dok bi matrica derivacije bila jednoretčana matrica).
Analogno kao u prošlom semestru, za općeniti zadatak određivanja tangencijalne ravnine, prije nego određujemo tangencijalnu ravninu, ključno je provjeriti nalazi li se točka na plohi. Ako se točka ne nalazi na plohi, problem postaje teži i ne možemo ga riješiti na klasičan način (računanje gradijenta u točki danoj u zadatku).
Osim klasičnih zadataka oblika "odredi tangencijalnu ravninu na plohu", bit će i kompliciranijih zadataka koji više testiraju vaše znanje iz analitičke geometrije. Zato se sjetite: što je presjek dviju ravnina u R^3, koja je općenita formula pravca u prostoru, kako se računa kut presjeka između ravnina, itd.

Primjer 5.14. Odredite jednadžbu tangente ravnine na:

- (5.6.a)) plohu $x^2 + y - z = 0$ u $(1, 0, 1)$;
- (5.6.b)) graf funkcije $f(x, y) = \sin x + xy^2$ kroz $(0, 2, 0)$.

Za prvu plohu definirajmo funkciju $F(x, y, z) = x^2 + y - z$. Njen nivo skup $F(x, y, z) = 0$ upravo je ploha iz zadatka. Točka $(1, 0, 1)$ nalazi se na plohi jer je $1^2 + 0 - 1 = 0$, pa je normala tangencijalne ravnine jednaka

$$F(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

te je jednadžba tangencijalne ravnine $2(x - 1) + 1(y - 0) - (z - 1) = 0$, odnosno jednostavnije $2x + y - z - 1 = 0$.
U drugom primjeru imamo već danu funkciju f, ali ona nam ne definira nivo skup, nego je preko nje dan graf funkcije za plohu koja nas zanima. Prvo nam zapravo treba funkcija $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ – uistinu, graf funkcije f je nivo skup funkcije F.
Točka $(0, 2, 0)$ uistinu se nalazi na plohi jer je $\sin 0 + 2 \cdot 0^2 = 0$, pa je normala tangencijalne ravnine jednaka

$$F(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} \cos x_0 + y_0^2 \\ 2x_0 y_0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

te je jednadžba tangencijalne ravnine $2(x - 0) + 0(y - 2) - (z - 0) = 0$, odnosno jednostavnije $5x - z = 0$.

Zadatak 5.15. (5.6.e)) Odredite jednadžbu tangente ravnine na plohu $xyz = 1$ u $(1, 1, 1)$.

Napomena 5.16. (Jedna napomena za znatiželjne.) U funkcijama jedne varijable derivacija je određivala tangentu na krivulju, dok ovdje derivacija određuje normalu na plohu. Razlog toj čudnoj pojavi je što ovdje zapravo rješavamo malo drugačiji problem nego u funkcijama jedne varijable. U funkcijama jedne varijable pravac koji dira krivulju određivali smo iz krivulje dane kao graf funkcije, dok ovdje ravninu koja dira plohu određujemo iz nivo skupa funkcije.
Objasnimo to na konkretnom primjeru: pogledajmo problem određivanja tangente na parabolu $y = x^2$ u R^2 u točki $(1, 1)$. U prošlom semestru to smo radili tako što smo krivulju promatrali kao graf funkcije $f(x) = x^2$. Derivirajući i računajući, dobili bismo da je tangenta pravac $y - 1 = 2 \cdot 1(x - 1)$. No, taj isti problem možemo rješavati pomoću nivo plohe. Za tu krivulju "izmišljamo" funkciju $F(x, y) = x^2 - y$. Skup $F(x, y) = 0$ je uistinu nivo ploha naše parabole, pa je gradijent $F(x^0, y^0) = \begin{bmatrix} 2x^0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektor normale na tangentu u točki (x^0, y^0). Računajući dalje, dobivamo da je tangencijalni pravac na krivulju u točki $(1, 1)$ dan implicitnom jednadžbom $2 \cdot 1(x - 1) + (-1)(y - 1) = 0$. Primijetite da smo dobili isti pravac na oba načina rješavanja.

Zadatak 5.17. (5.8.b)) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na graf funkcije $f(x, y) = e^x \sin y$ koja prolazi točkom $\left(\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3\right)$.

Primjer 5.18. (5.9) Odredite presjek tangencijalnih ravnina na plohe $xy + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ u $(2, 1, -2)$.
Prvo računamo tangencijalne ravnine na dane plohe. Primijetimo da se točka $(2, 1, -2)$ nalazi na obje plohe jer je $2 \cdot 1 + (-2) = 0$ i $2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$. Za prvu plohu definiramo $F_1(x, y, z) = xy + z$. Njezin nivo skup daje tangencijalnu plohu: $F_1(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} y_0 & x_0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, pa je ta jednadžba ravnine dana s $(x - 2) + 2(y - 1) + (z + 2) = 0$. Iako se ta jednadžba može pojednostavniti, zbog nastavka zadatka nećemo. Slično, za drugu plohu definiramo $F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$, računamo $F_1(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T$, i dobivamo drugu jednadžbu ravnine: $4(x - 2) + 2(y - 1) - 4(z + 2) = 0$.
Kako bismo izračunali presjek ravnina, trebamo riješiti sustav zadan dvjema jednadžbama ravnina. Primijetite da budući da jednadžbe nisu raspisane (nismo primjenjivali distributivnost), iz zapisa vidimo da obje plohe prolaze točkom $(2, 1, -2)$ (što je i uvjet zadatka), pa znamo da će i pravac presjeka prolaziti opet tom točkom. To ćemo iskoristiti prilikom rješavanja sustava. Kao prvo, oduzmimo te dvije jednadžbe. Dobivamo $3(x - 2) - 5(z + 2) = 0$. Prebacimo izraze na različite strane jednadžbe i podijelimo s 15, dobivamo $\frac{x-2}{5} = \frac{z+2}{3} =: t$. Ovom zapisu nedostaje još izraz vezan uz y da bismo dobili jednadžbu pravca. U bilo koju jednadžbu ravnina uvrstimo t umjesto x i z, te računom dobijemo $y - 1 = -4t$, odnosno jednadžba pravca je

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}.$$

Postoji još jedan način za riješiti zadatak, a to je tako da vektor smjera pravca izračunamo kao vektorski produkt vektora normala tangencijalnih ravnina (kako se vektor presjeka nalazi na obje ravnine, okomit je na obje normale). Ovo možemo raditi dokle god ravnine nisu paralelne.

Primjer 5.19. (5.10) Izračunajte kut između ploha $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ i $x - z^2 - y^2 = -3$ u $(-1, 1, -1)$.
Kao i kod krivulja, kut između ploha definira se kao odgovarajući kut između tangencijalnih ravnina. Točka $(-1, 1, -1)$ nalazi se na obje plohe ($(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 - 3 = (-1) - (-1)^2 - 1^2 + 3 = 0$), pa normale tangencijalnih ravnina računamo iz gradijenata funkcija $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ i $F_2(x, y, z) = x - z^2 - y^2 + 3$. Dobivamo

$$\vec{n}_1 = \quad F_1(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \quad F_2(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2y_0 \\ -2z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Primijetite da za račun kuta između ploha ne trebamo cijele jednadžbe ravnina, nego samo njihove normale. Kut između ravnina računamo po formuli $\cos\phi = \left| \frac{\vec{n}_1, \vec{n}_2}{\vec{n}_1 \quad \cdot \quad \vec{n}_2} \right|$:

$$\cos\phi = \left| \frac{(-2, 2, -2), (1, -2, 2)}{(-2, 2, -2) \quad \cdot \quad (-1, -2, 2)} \right| = \frac{2+4+4}{\sqrt{12}\sqrt{9}} = \frac{10}{6\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

Ovu vrijednost ne znamo izračunati, pa ostavljamo $\phi = \arccos \frac{5}{3\sqrt{3}}$. Za kutove poput $\phi = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ i sl. treba znati prepoznati vrijednost $\cos\phi$.

U nastavku ćemo navesti još jednu ulogu gradijenta u analizi.

Definicija 5.20. Za funkciju $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ i vektor $v \in \mathsf{R}^n$ definiramo ***derivaciju funkcije*** f ***duž vektora*** v kao $\frac{\partial f}{\partial v}(c) = \mathrm{D}f(c)v$.

Teorem 5.21. Za funkciju $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$, smjer najbržeg rasta funkcije f u točki c dan je s (normiranim) gradijentom $\nabla f(c)$. (Točnije, derivacija u smjeru funkcije f u točki c je najveća u smjeru $\nabla f(c)/\|\nabla f(c)\|$).
Analogno, smjer najbržeg pada je u smjeru (normiranog) negativnog gradijenta $-\nabla f(c)$.

Kao prvo objasnimo definiciju. Za funkciju definiranu na više varijabli može nas zanimati kako se funkcija lokalno mijenja u nekom smjeru. Recimo, za funkciju $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ i konkretnu točku (x_0, y_0) može nas zanimati kako izgleda funkcija duž nekog pravca (u domeni) koji prolazi kroz tu točku. To ponašanje opisujemo derivacijom u smjeru vektora (ako je vektor paralelan tim pravcem), te saznajemo pada li ili raste funkcija u tom smjeru, te kojom brzinom.
Ono što teorem želi reći je sljedeće: zamislimo neku funkciju $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ (tj. zamislimo njezin graf) i fiksirajmo jednu točku (x_0, y_0) u njenoj domeni. Ako se želimo odabrati smjer u domeni R^2 takav da jednim korakom (infitezimalno male duljine) u tom smjeru ostvarimo najveći mogući rast, uzet ćemo smjer gradijenta funkcije f. Sjetite se, gradijent je vektor koji se nalazi u istom prostoru kao i domena funkcije. Ako želimo naći najveći pad, uzet ćemo smjer negativnog gradijenta.

Primjer 5.22. (5.12) Kapetan Ivo je u nevolji. Kraj sunčane strane Merkura temperatura broda je dana funkcijom $f(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$. Ako se brod trenutno nalazi u točki $(1, 1, 1)$, u kojem smjeru treba nastaviti da najbrže smanji temperaturu?
Kao prvo, kao i inače kod zadataka s riječima, treba shvatiti što je autor htio reći. U nekom dijelu prostora (kraj sunčane strane Merkura, što nije bitno) u svakoj točki dana je temperatura nekom zatvorenom formulom. Za konkretnu točku $(1, 1, 1)$ treba odrediti smjer najbržeg pada temperature.
Prema gornjem teoremu, zanima nas $-\nabla f(1, 1, 1)$, odnosno, odgovarajući normirani vektor. Kako je

$$\nabla f(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}\begin{bmatrix}-2x\\-4y\\-6z\end{bmatrix},$$

dobivamo da je odgovarajući smjer $2e^{-6}(1, 2, 3)$, odnosno njegov normirani $\frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$.

Zadatak 5.23. (5.13) Mrav se nalazi u ishodištu koordinatnog sustava u toksičnoj atmosferi. Koncentracija toksina dana je funkcijom $f(x, y, z) = e^{-3x} + \sin(yz)e^{-y^2}$. U kojem smjeru mrav treba bježati da se koncentracija toksina najbrže smanji?

Napomena 5.24. Kako pravce možemo zadati eksplicitno ili parametarski, isto možemo i s krivuljama u R^n. Recimo da slično možemo raditi i s plohama, ali to nećemo raditi

na vježbama ovog kolegija.
U nastavku radimo s vektorskim funkcijama jedne varijable. Iako za njih ne postoji derivacija kao u smislu prošlog semestra, označavat ćemo ju na klasičan način (s), imajući u vidu da se radi o jednostupčanoj matrici (odnosno, vektoru).

Definicija 5.25. Za krivulju $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ vektor smjera tangente u točki $c(t_0)$ dan je s $c\ (t_0)$. Parametarska jednadžba tangente je $p(t) = c(t_0) + tc\ (t_0)$.

Napomena 5.26. O krivulji $c(t)$ možete razmišljati kao trag koji neka čestica ostavlja (i koji je ostavljala) gibajući se u vremenu $t \quad \mathbb{R}$. Razmišljajući na taj način: kako bismo odredili presjek dviju krivulja $c_1(t)$ i $c_2(t)$? Krivi način bio bi naći neku vrijednost t_0 za koju je $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ (jer bi to značilo da tražimo točku u kojoj su se dvije čestice nalazile u isto vrijeme). Pravi način je naći vrijednosti t_1 i t_2 takve da je $c_1(t_1) = c_2(t_2)$ (jer bi to značilo da tražimo točku u kojoj se se dvije čestice nalazile u potencijalno različitim vremenima). Usporedite to s primjerom $c_1(t) = (t, 0, 0)$, $c_2(t) = (0, t + 1, 0)$. Prva krivulja je x-os, a druga y-os – znamo što mora ispasti kao presjek.

Primjer 5.27. Napišite parametarsku jednadžbu tangente na parametarski zadanu krivulju:

- (5.15.a)) $c(t) = \left(\cos^2 t, 3t - t^3, t\right)$ u trenutku $t_0 = 0$;
- (5.15.d)) $c(t) = \left(e^{3t}, e^{-3t}, \sqrt[3]{2t}\right)$ u trenutku $t_0 = 1$.

Računamo redom: $c(t) = \left(\cos^2 t, 3t - t^3, t\right)$, $c\ (t) = \left(2\cos t \sin t, 3 - 3t^2, 1\right)$, $c(0) = (1, 0, 0)$, $c\ (0) = (0, 3, 1)$, pa je tangenta dana implicitnom jednadžbom $p(r) = (1, 0, 0) + r \cdot (0, 3, 1), r \quad \mathbb{R}$. Vjerojatno ste više navikli na ovakav zapis:

$$p(r) = (1 + 0r, 0 + 3r, 0 + r), \quad r \quad \mathbb{R},$$

no primijetite da su oni ekvivalentni.
Za drugi zadatak, imamo slično: $c(t) = \left(e^{3t}, e^{-3t}, \sqrt[3]{2t}\right)$, $c\ (t) = \left(3e^{3t}, -3e^{-3t}, \sqrt[3]{2}\right)$, $c(1) = \left(e^3, e^{-3}, \sqrt[3]{2}\right)$, $c\ (1) = \left(3e^3, -3e^{-3}, \sqrt[3]{2}\right)$, i konačno $p(r) = \left(e^3, e^{-3}, \sqrt[3]{2}\right) + r \cdot \left(3e^3, -3e^{-3}, \sqrt[3]{2}\right), r \quad \mathbb{R}$.

Primjer 5.28. (5.16., izmijenjen) Pokažite da se krivulje $c_1(t) = (e^t, e^{2t}, 1 - e^{-t})$ i $c_2(t) = (-t, \cos(t+1), \sin(t+1))$ sijeku u točki $(1, 1, 0)$ i izračunajte kut između njihovih tangenti u toj točki.
Za provjeru presjeka, trebamo provjeriti nalazi li se točka $(1, 1, 0)$ na obje krivulje, odnosno trebamo naći realne t_1 i t_2 takve da je trebamo riješiti sustav $c_1(t_1) = c_2(t_2) = (1, 1, 0)$, odnosno

$$\begin{aligned} &e^{t_1} = 1,\ e^{2t_1} = 1,\ 1 - e^{-t_1} = 0, \\ &-t_2 = 1,\ \cos(t_2 + 1) = 1,\ \sin(t_2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Jednostavno vidimo da je $t_1 = 0$ i $t_2 = -1$.
Za kut između tangenti trebamo odrediti samo vektore smjerova tangenti. To računamo

iz $c_1(t) = (e^t, 2e^{2t}, e^{-t})$ i $c_2(t) = (-1, -\sin(t+1), \cos(t+1))$ i dobiavamo $c_1(0) = (1,2,1), c_2(-1) = (-1,0,1)$. Konačno, kut je

$$\phi = \arccos\left|\frac{1\cdot(-1) + 2\cdot 0 + 1\cdot 1}{2\sqrt{3}}\right| = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Primjer 5.29. (5.18.) Čestica se kreće u ravnini po krivulji $c(t) = (e^t\cos t, e^t \sin t)$. Izračunajte kut između vektora brzine i položaja u svakom trenutku t_0 $\mathbb{R}$.
Ovo je prvi zadatak u kojem imamo krivulju u $\mathbb{R}^2$ umjesto u $\mathbb{R}^3$, no način rješavanja je isti kao da je treća koordinata jednaka nuli. Kao i prije, računamo $c(t) = (e^t\cos t, e^t \sin t)$, $c\ (t) = (e^t\cos t - e^t \sin t, e^t \sin + te^t \cos t)$, pa imamo

$$\phi = \arccos\left|\frac{e^{2t}(\cos t, \sin t)\cdot(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)}{e^te^t\sqrt{2}}\right| = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Teorem 5.30. Duljina luka krivulje $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ dana je s $\int_a^b c\ (t)\ dt$.

Napomena 5.31. Nećemo riješiti puno takvih zadataka jer produciraju netrivijalne integrale s DIR-a 1, te to nije poanta ovog semestra. Ipak, za vježbu ih sami riješite i prisjetite se tehnika.

Primjer 5.32. Izračunajte duljinu luka krivulje:

- (5.19.a)) $c(t) = (\cos t, \sin t, t)$ od $t = 0$ do $t = 1$;
- (5.19.f)) $c(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$ od $t = 0$ do $t = 1$.

Kako bismo primijenili formulu, trebamo prvo izračunati $c\ (t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, odakle je $c\ (t) = \sqrt{2}$. Zato je duljina luka krivulje jednaka

$$\int_0^1 \sqrt{2}dt = \sqrt{2}.$$

U drugom primjeru slično: $c\ (t) = (1, 2t, 2t^4)$, odakle je $c\ (t) = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 2t^2 + 1$. Zato je duljina luka krivulje jednaka

$$\int_0^1 2t^2 + 1dt = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

6

Lokalni ekstremi

Kao i kod funkcija jedne varijable, možemo pričati o lokalnom (i globalnom) ekstremu: funkcija u nekoj točki ima veću ili manju vrijednost nego u svim točkama neke okoline. Ponovno su točke lokalnih ekstrema same po sebi manje korisne, više su koristan alat za određivanje globalnih ekstrema. U funkcijama jedne varijable kandidati za točke lokalnih ekstrema bile su stacionarne točke (nultočke prve derivacije). U funkcijama više varijabli opet imamo istu situaciju. Razlika je u tome što smo prije za određivanje stacionarnih točaka u funkcijama jedne varijable imali jednu jednadžbu s jednom nepoznanicom, a sada ćemo imati n jednadžbi (možda i nelinearnih) s n nepoznanica.

Veći problem u funkcijama više varijabli je određivanje je li stacionarna točka ujedno i točka lokalnog ekstrema. U prošlom semestru poznavali smo dvije metode (iako smo na vježbama pretežno radili jednu): određivanje intervala monotonosti u okolini ekstrema i promatranje druge derivacije u stacionarnoj točki. U funkcijama više varijabli ćemo prilagoditi drugu metodu.

Definicija 6.1. Za funkciju $f : \Omega \to \mathrm{R}$ ($\Omega \quad \mathrm{R}^n$) definiramo matricu drugog diferencijala ili Hesseovu matricu:

$$Hf(c) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_1}(c) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n \partial x_n}(c) \end{bmatrix}.$$

Hesseovu matricu (ponekad i *Hesijan*) čine druge parcijalne derivacije. Oznake za više parcijalne derivacije slične su oznakama i za prve parcijalne derivacije: $\partial^2_{1,2} f, \partial^2_y f, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y}$. Moguće je derivirati proizvoljno mnogo puta funkciju (ako je ona dovoljno glatka), samo je ponovno bitno po kojim varijablama i (zasada) u kojem redoslijedu. U Hesseovoj matrici nalazi se svih n^2 drugih parcijalnih derivacija.

Primjer 6.2. Hesseova matrica funkcije $f(x) = \dfrac{1}{x} + xe^{-y}$ je

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3} & -e^{-y} \\ -e^{-y} & xe^{-y} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je matrica simetrična. To nije slučajno, jer postoji **Schwarzov teorem** koji ukratko kaže (za dovoljno glatke funkcije): $\partial^2_{j,i} f = \partial^2_{i,j} f$. Slično vrijedi i u više dimenzija, što znači da je nebitno kojim redoslijedom treba derivirati funkciju ako želite odrediti neku parcijalnu derivaciju.

Postavlja se drugo pitanje: kako nam Hesseova matrica daje do znanja da se točka u kojoj smo je računali točka lokalnog ekstrema. U funkcijama jedne varijable pogledali bismo predznak derivacije, što ovdje jasno ne možemo, jer imamo matricu. Ipak, uvodi se sličan pojam.

Definicija 6.3. Neka je $\boldsymbol{A}$ $\quad \mathsf{M}_n$ simetrična matrica, te $\boldsymbol{x}$ vektor duljine n. Kažemo da je matrica $\boldsymbol{A}$

- pozitivno definitna (oznaka: $\boldsymbol{A} > 0$): ako za sve $\boldsymbol{x} = 0$ vrijedi $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0$;
- pozitivno semidefinitna (oznaka: $\boldsymbol{A} \geq 0$): ako za sve $\boldsymbol{x}$ vrijedi $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \geq 0$;
- negativno definitna (oznaka: $\boldsymbol{A} < 0$): ako za sve $\boldsymbol{x} = 0$ vrijedi $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} < 0$ (ekvivalentno: $-A$ je pozitivno definitna);
- negativno semidefinitna (oznaka: $\boldsymbol{A} \leq 0$): ako za sve $\boldsymbol{x}$ vrijedi $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} \leq 0$ (ekvivalentno: $-A$ je pozitivno semidefinitna);
- indefinitna: ako nije ništa od navedenog.

Napomena 6.4. Kao što ime (ali i definicija) sugerira, pozitivna definitnost povlači pozitivnu semidefinitnost, te negativna definitnost povlači negativnu semidefinitnost. Ako je matrica indefinitna, ne može biti ništa drugo. Jedina matrica koja je istodobno pozitivno semidefinitna i negativno semidefinitna je nulmatrica. Oznake za (semi)definitnost koristite oprezno. Iako postoje neka pravila za "$>$" koja , relacija "$>$" nije relacija potpunog uređaja na simetričnim matricama. Najbolje bi bilo da koristimo oznaku onako kako gore i piše, a to je da kao da je s desne strane jednog od znakova $>, <, \geq, \leq$ "zalijepljena" nula.

Gornji pojam bitan je za sljedeći teorem.

Teorem 6.5. Neka je $f : \Omega \to \mathsf{R}$ $(\Omega \quad \mathsf{R}^n)$ funkcija klase C^2.

- Ako je $c \quad \Omega$ stacionarna točka i $Hf(c)$ negativno definitna matrica, onda f ima lokalni maksimum u c.
- Ako je $c \quad \Omega$ stacionarna točka i $Hf(c)$ pozitivno definitna matrica, onda f ima lokalni minimum u c.
- Ako je $c \quad \Omega$ stacionarna točka i $Hf(c)$ indefinitna matrica, onda f nema lokalni ekstrem u c, tj. c je sedlasta točka funkcije f.

Napomena 6.6. Ako u gornjim tvrdnjama uzmemo $n = 1$, te izbacimo pojam "definitnost matrice", dobivamo analogni rezultat koji znate iz funkcija jedne varijabli. U funkcijama više varijabli, primjeri funkcija za gornje pojave su redom $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$, $f(x, y) =$

$x^2 + y^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. U zadnjem slučaju točku zovemo sedlastom jer zaista graf funkcije u okolini te točke nalikuje na sedlo.
Nešto se zna i u slučajevima kada je Hesseova matrica semidefinitna, ali za potrebe vježbi nam to nije bitno.
U ovom trenutku je veći problem kako za neku matricu odrediti je li ona pozitivno ili negativno definitna. Pokazat ćemo dva načina, a vi sami izaberite način koji ćete koristiti. Za prvi nam treba rezultat iz Linearne algebre koji kaže da simetrična matrica ima realne svojstvene vrijednosti.

Teorem 6.7. Neka je $\boldsymbol{A}$ simetrična matrica reda n. Tada vrijedi:

- $\boldsymbol{A} > 0$ ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti pozitivne;
- $\boldsymbol{A} < 0$ ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti negativne;
- $\boldsymbol{A} \geq 0$ ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti nenegativne;
- $\boldsymbol{A} \leq 0$ ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti nepozitivne;
- $\boldsymbol{A}$ je indefinitna ako i samo ako postoji barem jedna pozitivna i barem jedna negativna svojstvena vrijednost.

Teorem 6.8 (Sylvestereov kriterij)**.** Neka je $\boldsymbol{A}$ hermitska matrica reda n, te $(\Delta_i)_{i=1,\ldots,n}$ niz glavnih minora matrice $\boldsymbol{A}$ (determinanti podmatrica matrice $\boldsymbol{A}$ u kojem promatramo samo prvih i redaka i stupaca). Tada je matrica $\boldsymbol{A}$:

- pozitivno definitna ako i samo ako su sve minore pozitivne;
- negativno definitna ako i samo ako minore alterniraju po predznaku počevši s minusom; drugim riječima, ako i samo ako vrijedi $(-1)^i \Delta_i > 0$ za sve $i \leq n$.

Dodatno, ako niz minora nije nijedan od gore navedenih (cijeli pozitivan, ili alternirajući počevši s negativnim), a determinanta cijele matrice nije jednaka 0, tada je matrica indefinitna.

Napomena 6.9. Drugi kriterij je nešto lakši za korištenje jer ne trebamo računati svojstvene vrijednosti matrice, nego samo nekoliko minora. Za matrice reda 2, posao je gotovo trivijalan budući da je determinanta prve minore samo element u gornjem lijevom kutu. Ipak, mana Sylvestereovog kriterija je što ne daje odgovore u svim slučajevima (poput kada su neke minore uključujući zadnje jednake nuli). Zato je dobro znati oba kriterija. Koji ćete koristiti u svojim rješenjima, ovisi o vama.
Treba napomenuti da postoji i tzv. profinjeni Sylvestereov kriterij koji donosi odluku u svim slučajevima, no zbog njegove kompleksnosti ga ne prezentiramo. Ako ga znate i želite ga koristiti, smijete.

Napomena 6.10. Budući da na drugim kolegijima možda još niste radili pojam svojstvene vrijednosti, cilj ove napomene je to rasvijetliti. Ovo što slijedi, ako niste, naučit ćete na Linearnoj algebri, a sada pročitajte ako vas zanima.
Ukratko, svojstvene vrijednosti neke kvadratne matrice $\boldsymbol{A}$ računat ćemo na sljedeći način:

- Matrici na dijagonalna mjesta dopišite članove "$-\lambda$".
- Izračunajte determinantu nove matrice, u ovisnosti o varijabli λ. Dobit ćete polinom stupnja n, jednakom redu matrice.
- Svojstvene vrijednosti tada su nultočke tog polinoma.

Detaljnije, za neku kvadratnu matricu $\boldsymbol{A}$ reda n definiramo ***svojstvenu vrijednost*** λ R i ***svojstveni vektor*** $\boldsymbol{v}$ R^n ($\boldsymbol{v} = 0$) ako vrijedi $\boldsymbol{A}\lambda = \lambda\boldsymbol{v}$. Ako je neki vektor svojstven za neku vrijednost λ, tada je i svaki vektor kolinearan s njime svojstven s istom tom vrijednošću. Svojstvene vrijednosti se inače definiraju na kompleksnom skupu (i prostoru), no kod nas to neće biti slučaj jer postoji teorem koji kaže da simetrična realna matrica ima isključivo realne svojstvene vrijednosti.
Pogledajmo kakve veze to ima s algoritmom za računanje svojstvenih vrijednosti opisanim gore. Jednadžbu $\boldsymbol{Av} = \lambda\boldsymbol{v}$ možemo zapisati na drugačiji način kao

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Av} &= \lambda\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{Av} &= \lambda\boldsymbol{Iv}, \\ \boldsymbol{Av} - \lambda\boldsymbol{Iv} &= \boldsymbol{0}, \\ (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Kako su sve jednakosti ekvivalentne, dobiveno čitamo kao: par $(\lambda, \boldsymbol{v})$ je par svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora (ili kraće: svojstveni par) ako se vektor $\boldsymbol{v}$ nalazi u jezgri operatora $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$. Možete gledati da brojevi iz vektora $\boldsymbol{v}$ definiraju skalare kojima treba pomnožiti stupce matrice $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ kako bi se dobio nul-vektor (odnosno ti skalari pokazuju linearnu zavisnost stupaca). Kako god izrekli, dobivamo da je λ svojstvena vrijednost ako je matrica $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ singularna. Jedan način provjere singularnosti je da pogledamo je li joj determinanta jednaka nuli. Pokazuje se da je determinanta matrice $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ polinom u λ stupnja n, pa su zaista nultočke tog polinoma ono što tražimo. Taj polinom $k_{\boldsymbol{A}}(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})$ naziva se ***karakteristični polinom matrice*** $\boldsymbol{A}$. Ukoliko polinom ima nultočku λ_0 kratnosti m, tada ćemo reći da je λ_0 svojstvena vrijednost matrice $\boldsymbol{A}$ (algebarske) kratnosti m.

Primjer 6.11. (6.4.a)) Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 2x + 2y - x^2 + y^2 + 5$. Prvo odredimo prve i druge derivacije:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} -2x + 2 & 2y + 2 \end{bmatrix}, \quad Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prve derivacije nam daju stacionarne točke. Kada je izjednačimo s [0 0], dobivamo jednostavne jednadžbe iz kojih dobivamo samo jednu stacionarnu točku $(x_0, y_0) = (1, -1)$. U toj točki treba izračunati Hesseovu matricu, no u ovom zadatku ona je ionako konstantna:

$$Hf(1, -1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prirodu te točke treba odrediti u ovisnosti o definitnosti gornje matrice. Za potrebe primjera, odredimo to na oba naučena načina. Kao prvo, svojstvene vrijednosti dijagonalne matrice su upravo dijagonalni elementi $-2, -2$ jer kada dopišemo na dijagonalu $-\lambda$, karakteristični polinom upravo je umnožak tih dijagonalnih elemenata. Kako je jedna pozitivna, a druga negativna, matrica je indefinitna. Drugim načinom vidimo da je niz minora je $2, -4$, pa je matrica indefinitna (one alterniraju po predznaku, ali počinju s pozitivnim predznakom).
U oba načina vidimo da je matrica indefinitna, pa je točka $(1, -1)$ sedlastog tipa (funkcija nema lokalni ekstrem).

Napomena 6.12. Navedimo neke tvrdnje koje su korisne i za ubuduće. Provjerite ih i sami na nekom primjeru.

- Svojstvene vrijednosti dijagonalne matrice upravo su dijagonalni elementi te matrice (to smo vidjeli i u prošlom primjeru).
- Ako je funkcija linearna (različita od konstante), nema lokalnih ekstrema jer je gradijent konstantan (različit od nule). Ako je funkcija kvadratna, račun za stacionarnu točku svede se na linearan sustav n jednadžbi s n nepoznanica, a Hesseova matrica je konstantna.
- Kod nelinearnih sustava jednadžbi nema pravila kako pristupiti u rješavanje jednadžbi. Jedan savjet je da ako imamo simetričan sustav (zamjenom varijabli x i y dobijemo isti sustav), tada je dobar potez oduzeti jednadžbe i tako svesti na slučaj $x = y$.

Primjer 6.13. Odredite lokalne ekstreme funkcija:

- (6.4.b)) $f(x, y) = x^3 - 3x + y$;
- (6.4.e)) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 5y$;
- (6.4.f)) $f(x, y) = y + x \sin y$;
- (6.4.g)) $f(x, y) = xy^{-1} - yx^{-1}$;
- (6.4.i)) $f(x, y) = \sin x \sin y, 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi$;
- (6.4.k)) $f(x, y) = (x - 3) \ln xy$;
- (6.4.m)) $f(x, y) = \left(\dfrac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \cos x, -2\pi < x < 2\pi$.

Obratimo pažnju na pitanje u zadatku: ne zanimaju nas samo točke lokalnih ekstrema, nego i oni sami (vrijednosti u tim točkama).
U prvom primjeru, matrica (prvih) derivacija je $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3 & 1 \end{bmatrix}$, pa vidimo da nema stacionarnih točaka, a time ni lokalnih ekstrema.

U drugom primjeru je matrica prvih derivacija $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2x - 2y - 3 & 4y - 2x + 5 \end{bmatrix}$, a Hesseova matrica

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Rješavanjem linearnog sustava dobivamo stacionarnu točku: $(1/2, -1)$. Prva minora Hesseove matrice je 2, a druga 4, pa je matrica pozitivno definitna, odakle zaključujemo da je to točka lokalnog minimuma. On iznosi $f(1/2, -1) = 13/4$.
U trećem primjeru je matrica prvih derivacija $Df(x,y) = \begin{bmatrix} \sin y & x\cos y + 1 \end{bmatrix}$, a Hesseova matrica je

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \cos y \\ \cos y & -x\sin y \end{bmatrix}.$$

Pronađimo stacionarne točke. Iz prve jednakosti $\sin y = 0$ dobivamo $y = k\pi$, k $\mathbb{Z}$. Odavde zaključujemo da je $\cos y = \pm 1$, ovisno o parnosti broja k, pa imamo dva slučaja. U prvom slučaju, kada je $y = 2n\pi$, n $\mathbb{Z}$, vrijedi da je $\cos y = 1$, pa je iz druge jednadžbe $x = -1$. U drugom slučaju slično dobivamo $x = 1$. Dakle, stacionarne točke su $(-1, 2n\pi), (1, (2n+1)\pi)$, n $\mathbb{N}$. Za tih beskonačno mnogo slučajeva imamo dvije različite Hesseove matrice:

$$Hf(-1, 2n\pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Hf(1, (2n+1)\pi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obje matrice su indefinitne (ili jer im je prva minora 0, a druga -1, ili jer su im svojstvene vrijednosti ± 1), pa su sve stacionarne točke sedlaste, nema lokalnih ekstrema.
Jacobijeva matrica u sljedećem primjeru iznosi

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x^2+y^2}{x^2 y} & -\frac{x^2+y^2}{y^2 x} \end{bmatrix}.$$

Da bi ona bila jednaka nuli, mora biti $x^2 + y^2 = 0$, odakle je $x = y = 0$. No, točka $(0,0)$ ne nalazi se u prirodnoj domeni funkcije f. Zato ni u ovom slučaju nemamo stacionarnih točaka.
U sljedećem primjeru matrica derivacija je $Df(x,y) = \begin{bmatrix} \cos x \sin y & \cos y \sin x \end{bmatrix}$, a Hesseova matrica je

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{bmatrix}.$$

Da bismo riješili sustav za stacionarne točke, treba malo vještine kako ne bismo imali previše slučajeva i potrošili previše vremena. Kako god, radi se o slučajevima kada su neki faktori nula. Ako je u prvoj jednakosti $\cos x = 0$, tada je $\sin x = \pm 1$, pa stoga mora biti $\cos y = 0$. Ako je pak u prvoj jednakosti $\sin y = 0$, tada slično mora biti $\sin x = 0$. Zajedno s uvjetima, dobivamo stacionarne točke $(\pi/2, 3\pi/2)$, $(3\pi/2, \pi/2)$, $(3\pi/2, 3\pi/2)$,

$(\pi/2, \pi/2)$ i (π, π). Hesseove matrice za te sedlaste točke iznose redom

$$Hf(\pi/2, 3\pi/2) = Hf(3\pi/2, \pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$Hf(3\pi/2, 3\pi/2) = Hf(\pi/2, \pi/2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$Hf(\pi, \pi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

U prvim dvjema matricama na dijagonalama vidimo svojstvene vrijednosti, pa možemo zaključiti da u točkama $(\pi/2, 3\pi/2)$ i $(3\pi/2, \pi/2)$ funkcija ima lokalni minimum (iznosi -1), a u točkama $(3\pi/2, 3\pi/2)$ i $(\pi/2, \pi/2)$ funkcija ima lokalni maksimum (iznosi 1). U točki (π, π) Hesseova matrica je indefinitna (isti razlozi kao u trećem primjeru), pa je ta točka sedlasta.
U predzadnjem primjeru, Jacobijeva matrica je $Df(x, y) = \begin{bmatrix} \ln(xy) + (x-3)/x & (x-3)/y \end{bmatrix}$, a Hesseova

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} (x+3)/x^2 & 1/y \\ 1/y & -(x-3)/y^2 \end{bmatrix}.$$

Rješavanjem sustava, iz druge jednadžbe prvo vidimo da je nužno $x = 3$, a iz prve da je $y = 1/3$. Kako je

$$Hf(3, 1/3) = \begin{bmatrix} 2/3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

indefinitna matrica (minore su $2/3$ i -9), stacionarna točka je sedlasta.
U zadnjem primjeru, Jacobijeva matrica je $Df(x, y) = \begin{bmatrix} -\sin x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) & \cos x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \end{bmatrix}$, a Hesseova

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -\cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) & -\sin x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) \\ -\sin x \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right) & \cos x \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) \end{bmatrix}.$$

Izraz u zagradi u parcijalnoj derivaciji po x nikad nije nula (jer suma eksponencijalnih funkcija nikad nije nula), pa je nužno $\sin x = 0$. Zato iz druge parcijalne derivacije imamo da je $y = 0$. Uzimajući u obzir domenu, dobivamo stacionarne točke $(\pm\pi, 0)$ i $(0, 0)$. Hesseove matrice u ovim točkama su dijagonalne, s time da su na dijagonali vrijednosti suprotnih predznaka:

$$Hf(\pm\pi, 0) = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix}, \quad Hf(0\pi, 0) = \begin{bmatrix} -e & 0 \\ 0 & e \end{bmatrix},$$

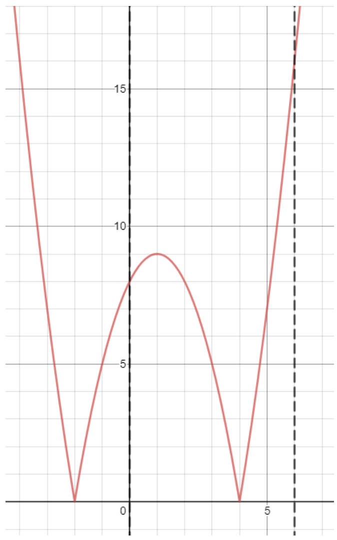
pa su sve matrice indefinitne, a stacionarne točke sedlaste.

7

Globalni ekstremi

Zadatke s globalnim ekstremima u prošlom semestru (s funkcijama jedne varijable) rješavali smo tako što smo imali funkcije definirane na (najčešće) otvorenim intervalima, određivali bismo stacionarne točke i intervale monotonosti. Postoji još jedan način koji se koristi za funkcije definirane na zatvorenim intervalima. Sada ćemo ga pokazati, budući da ćemo takav način razmišljanja koristiti kod funkcija više varijabli.

Primjer 7.1. Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x) = |x^2 - 2x - 8|$ na domeni $[0, 6]$. Primjer ćemo prvo riješiti (namjerno) na malo neprecizan način.
Funkcija ima apsolutnu vrijednost, pa se drugačije ponaša kad je izraz koji se u nalazi u zagradama pozitivan ili negativan. Ipak, nultočka derivacije je ista: dobivamo je iz $2x - 2 = 0 \implies x = 1$. Jedini kandidat za točke ekstrema je (zasada) $x = 1$. Kako je funkcija neprekidna i definirana na zatvorenom intervalu, trebala bi imati i minimum i maksimum, no dobili smo samo jednu točku kao kandidat za ekstrem. Očito smo nešto smetnuli s uma.
Kao prvo, u funkciji se pojavljuje apsolutna vrijednost koja nije derivabilna u nuli. Dakle, točke u kojima je ono što se nalazi u apsolutnim zagradama ima vrijednost jednaku nuli treba obraditi posebno (rezultati o stacionarnim točkama kao kandidate za ekstreme vrijede samo za točke u kojima je funkcija derivabilna). Nultočke kvadratne funkcije $x^2 - 2x - 8$ su $x = -2, 4$. Točka -2 nije u domeni, pa je ne promatramo.
Sada su kandidati za nultočke $x = 4$ i $x = 1$. Imamo dva, pa možemo pomisliti da smo gotovi. U tom slučaju maksimum bi trebao biti veća od vrijednosti $f(4) = 0$ i $f(1) = 9$, a minimum manja. Ipak, crtanjem slike, vidimo da to nije sve. Maksimum se postiže u $x = 6, f(6) = 16$.
Sa slike uočavamo da nismo uključili rubove. Funkcija u njima iznosi $f(0) = 8$ i $f(6) = 16$. Zato je maksimum ipak 16, a minimum otprije dobivena 0.



Napomena 7.2. Precizirajmo malo bolje metodu rješavanja ovakvih zadataka. Ako tražimo globalne ekstreme funkcije jedne varijable na zatvorenom intervalu, teorija nam kaže da će funkcija sigurno imati maksimum i minimum (Bolzano–Weierstrassov teorem kaže da je slika neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu ponovno zatvoren interval). Zato nalazimo sve kandidate u kojima točka može imati minimum ili maksimum, i među tih konačno mnogo vrijednosti biramo najveću i najmanju. Te točke koje treba provjeriti su:

- stacionarne točke,
- točke u kojima derivacija nije definirana,
- točke rubova.

Napomena 7.3. Primijetite da za ovakvu analizu nije potrebno provjeravati niti intervale monotonosti, niti drugu derivaciju. Jednostavno koristimo teorem koji kaže da maksimum i minimum moraju postojati, i biramo najveću i najmanju vrijednost iz konačnog skupa. To ne možemo koristiti ako domena nije zatvoren interval, jer tada nemamo garanciju da minimum i maksimum postoje.
Provjera točaka u kojima derivacija nije definirana je bitan dio provjere kao i sve drugo, ali u zadatcima koji slijede derivacija će najčešće biti definirana u svim točkama.
Ovaj način razmišljanja generaliziramo u više dimenzija. Generalizacija zatvorenog intervala u domeni je tzv. ***kompaktan skup***. Neprecizno rečeno, to je skup koji je ograničen, te uključuje svoj rub. Recimo, pravokutnik $[0, 3] \times [-2, 7]$ ili krug s rubom $\{(x, y) \quad \mathsf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ jesu kompaktni, no prvi kvadrant (bilo s uključenim osima ili bez), ili krug bez ruba $\{(x, y) \quad \mathsf{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$ nisu.

Primjer 7.4. (7.1.a)) Odredi globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 2 - 3x + 2y$ na domeni

$$\left\{(x, y) \quad \mathsf{R}^2 : \frac{x}{4} + \frac{y}{6} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Tražimo globalne ekstreme na kompaktnom skupu (skup je trokut koji je očito ograničen i uključuje svoje rubove), pa primjenjujemo gornji algoritam. Nema točaka u kojima derivacija nije definirana, te to nećemo više ni spominjati. Stacionarne točke određujemo iz prve derivacije: $Df(x,y) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}$. Očito nema stacionarnih točaka.
Sada treba obraditi rubove. U slučaju funkcija jedne varijable rubovi su samo točke. Ovdje su to krivulje, što znači da i među tih beskonačno mnogo točaka treba naći onih konačno mnogo koje su kandidati za ekstreme. To radimo tako da rubove parametriziramo, a zatim promatramo kompoziciju funkcije i ruba. Time dobivamo funkcije jedne varijable definirane na zatvorenim intervalima kojima treba naći globalne ekstreme. Dakle, problem smo sveli na onaj sličan uvodnom iz ove lekcije. Promotrimo rubove redom:

1) Prvi rub koji promatramo je dio gdje je $y = 0$. To je dužina od točke $(0,0)$ do $(4,0)$. Jedan način parametrizacije te dužine je krivuljom $c_1(t) = (t,0)$, $t \quad [0,4]$. Kompozicija originalne funkcije i te parametrizacije je $f_1(t) = (f \circ c_1)(t) = 2 - 3t$. Derivirajući se uvjerimo da nemamo stacionarnih točaka. Ostali kandidati za ekstreme su rubne točke funkcije f_1, ali to su zapravo vrhovi trokuta originalne domene funkcije f. Njih ćemo trebati gledati za svaku od stranica, pa ih možemo i pogledati sve zajedno na kraju.

2) Drugi rub koji promatramo je $x = 0$. Parametriziramo ga s $c_2(t) = (0,t)$, $t \quad [0,6]$, a kompozicija je $f_2(t) = (f \circ c_2)(t) = 2 + 2t$. Opet nema stacionarnih točaka.

3) Za treći rub imamo rub $x/4 + y/6 = 1$. Jedan način parametrizacije je da izrazimo jednu varijablu preko druge i koristimo je kao argument u krivulji. Imamo $x = 4 - 2/3y$, pa zato definiramo $c_3(t) = (4 - 2/3t, t)$. Rubne točke su $(4,0)$ i $(0,6)$, pa za domenu parametrizacije uzimamo $t \quad [0,6]$. Na kraju imamo $f_3(t) = (f \circ c_3)(t) = -10 + 4t$. Opet nema stacionarnih točaka.

Obradu krajnjih točaka svakog dijela ruba smo ostavili za kraj, pa ga sada obrađujemo. Treba još provjeriti vrijednosti funkcije vrhovima trokuta, tj. u točkama $(0,0)$, $(4,0)$ i $(6,0)$. Neformalno ćemo te točke nazivati ***rubovi rubova***. To su ujedno i jedine točke koje u ovom primjeru dolaze u obzir. Vrijednosti u tim točkama su $f(0,0) = 2$, $f(0,6) = 14$, $f(4,0) = -10$, pa je konačno: globalni maksimum funkcije je 14, a globalni minimum je -10.

Napomena 7.5. Pojasnimo malo još obradu rubova. Nakon što provjerom stacionarnih točaka provjerimo vrijednosti funkcije u unutrašnjosti, kao i prije treba provjeriti rubove. Na svakoj od dužina u prošlom primjeru, funkcija ima određeno ponašanje (zamislite taj dio domene u $\mathbb{R}^2$, te dio grafa nad tom domenom – to je neka krivulja). Najlakši način obrade te krivulje je da ju promatramo kao funkciju jedne varijable. Za to nam pomaže parametrizacija ruba u domeni.
Primijetite da je funkcija u gornjem primjeru bila linearna. Za očekivati je da linearna funkcija (osim konstante) nema stacionarnih točaka (jer je gradijent netrivijalna konstanta). Također, kako je domena trokut, svi rubovi su dužine, parametrizabilne novim linearnim funkcijama. Kompozicije linearnih funkcija ponovno je linearna funkcija, pa

zato ni u rubovima nismo dobivali stacionarne točke.
Slično tako, analizu rubova možete (ako se za to ukaže prilika) raditi kraće. Ako primijetite da je funkcija jedne varijable duž ruba strogo rastuća ili padajuća, nema potrebe za njenim deriviranjem, jasno je da nema stacionarnih točaka. Kada je funkcija kvadratna, isto znate što možete raditi.
Oznake funkcija na parametrizacijama $f_i(t)$ su neki načini kako skratiti zapis funkcije na rubovima. Možete ih označavati kako želite. Također, u narednim primjerima manje ćemo davati pažnje parametrizacijama (tj. kompozicijama), bit ćemo manje precizni i kratit ćemo duljinu rješenja.

Primjer 7.6. Odredi globalne ekstreme sljedećih funkcija:

- (7.1.b)) $f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2\right\}$;
- (7.1.c)) $f(x,y) = y(x-3)$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$;
- (7.1.d)) $f(x,y) = 3 + x - y + xy$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4\right\}$;
- (7.1.f)) $f(x,y) = (x-3)^2 + y^2$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : 0 \leq x \leq 4, x^2 \leq y \leq 4x\right\}$;
- (7.1.h)) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + x - 2y$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ (samo komentirati elipsu);
- (7.1.i)) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\right\}$;
- (7.1.j)) $f(x,y) = xy - \left(1 - x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{2}}$ na $\left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

U prvom primjeru imamo kompaktan skup jer se radi o kvadratu (stranice su mu paralelne s osima, i uključene su u domenu). Prvo tražimo stacionarnu točku (ako postoji, i ako je u domeni): $Df = \begin{bmatrix} 2x+2y & 2x+6y \end{bmatrix}$. Rješavanjem sustava jedina stacionarna točka je $(0,0)$ i nalazi se u domeni. Promotrimo rubove:

1) Na $y = 2$ definiramo f_1 tako da umjesto y uvrstimo 2. Dobijemo $f_1(x) = x^2 + 4x + 12$. To je kvadratna funkcija s tjemenom u $x = -2$. Dobili smo jednu stacionarnu točku na ovom rubu: $(-2, 2)$.

2) Na $y = -2$ slično definiramo $f_2(x) = x^2 - 4x + 12$ i dobijemo još jednu stacionarnu točku: $(2, -2)$.

3) Na $x = 2$ imamo $f_3(x) = 3y^2 + 4y + 4$. Stacionarna točka je $(2, -2/3)$.

4) Na $x = -2$ imamo $f_4(x) = 3y^2 - 4y + 4$ i stacionarnu točku $(-2, 2/3)$.

Ovim točkama treba pridodati "rubove rubova", što su vrhovi kvadrata $(\pm 2, 2)$ i $(\pm 2, -2)$. Sada uspoređujemo vrijednosti funkcije u svim dobivenim točkama:

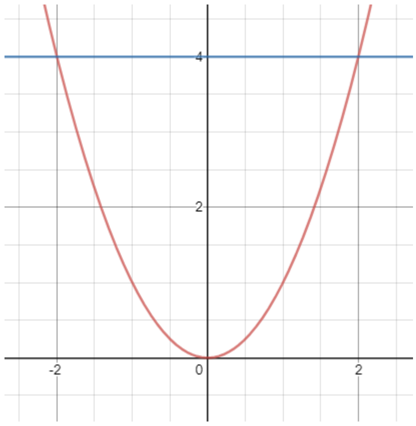
$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(2,-2) = f(-2,2) &= 8, \\ f(-2,2/3) = f(2,-2/3) &= 8/3, \\ f(-2,-2) = f(2,2) &= 24. \end{aligned}$$

Zaključujemo: globalni minimum funkcije f je 0 i postiže se u ishodištu, a globalni maksimum funkcije f je 24 i postiže se u $(2,2)$ i $(-2,-2)$.
U drugom primjeru ćemo imati jedan trik koji već poznajemo kod parametrizacije domene. No, krenimo redom. Za stacionarne točke računamo $Df = \begin{bmatrix} y & x-3 \end{bmatrix}$, odakle je jedina stacionarna točka $(3,0)$. Primijetite da ako dobijemo da se stacionarna točka nalazi na rubu, da nju nije nužno analizirati (osim ako to kaže i analiza ruba). Sada treba analizirati rub. Njega parametriziramo trigonometrijskim funkcijama: $c(t) = (3\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Dobivamo $f_1(t) = 9\sin t(\cos t - 1)$. Treba naći stacionarne točke za tu funkciju: $f_1(t) = 9\cos t(\cos t - 1) - 9\sin^2 t = 9(2\cos^2 t - \cos t - 1)$. Ovo je kvadratna funkcija po $\cos t$, koja ima nultočke $\cos t = 1, -1/2$.
Sada se na tren zaustavimo. Iz ovih izraza možemo izračunati vrijednost za t (dapače, one su relativno lijepe vrijednosti). No, nama ne treba t. Nama treba točka (ili više njih) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ koju reprezentira stacionarna točka funkcije $f_1(t)$. Za vrijednost $\cos t = 1$, iz posljedice Pitagorinog poučka imamo $\sin t = 0$, pa nas zapravo zanima točka $(3,0)$. Slično, iz $\cos t = -1/2$ saznajemo $\sin t = \pm\sqrt{3}/2$, pa dobijemo još dvije bitne stacionarne točke na rubu: $(-3/2, \pm 3\sqrt{3}/2)$.
Ostalo je provjeriti "rubove rubova". Po definiciji, to su one točke za koje je parametrizacija kružnice evaluirana u rubovima intervala, dakle u točkama (tj. točki) $c(0) = c(2\pi) = (3,0)$. Slučajno, u ovom primjeru, tu točku već jesmo promatrali kao stacionarnu. Inače, da se ona nije pojavila u gornjoj analizi, tu točku zapravo ne treba uzeti. Ako niste sigurni zbog argumentacije (u nastavku), možete je za svaki slučaj uzeti u obzir (ne košta mnogo provjeriti još jednu točku). Intuitivno, do sada smo rubove rubova uzimali točke domene u kojima su se različite parametrizacije spajale, i bilo ih je lako uočiti jer su bili vrhovi/šiljci domene. Toga sada nema, nema točke na kružnici koja bi trebala biti uzeta kao vrh. Formalnije, analizom ruba se uvjerimo da nijedna druga točka (osim konačno mnogo njih, dovbivene promatranjem funkcije na rubu) ne može biti točka globalnog ekstrema osim možda točke $(3,0)$, jer se u njoj spaja parametrizacija. Ponovimo li argument s bilo kojom drugom parametrizacijom kružnice, primjerice $\tilde{c}(t) = (3\cos(t+\pi), 3\sin(t+\pi))$, $t \in [0, 2\pi]$, dobit ćemo da ne treba gledati nijednu točku osim konačno mnogo njih (dobivene prethodnom analizom) i eventualno nove točke gdje se spaja kružnica. Zato ne treba gledati točku $c(0)$ (niti $\tilde{c}(0)$).

Usporedimo vrijednosti funkcije u svim dobivenim točkama:

$$\begin{aligned} f(3,0) &= 0 \\ f(-3/2, 3\sqrt{3}/2) &= -\frac{27\sqrt{3}}{4}, \\ f(-3/2, -3\sqrt{3}/2) &= \frac{27\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Odavde lako čitamo minimum i maksimum.
U trećem primjeru pristupamo kao i prije. Jacobijeva matrica je $Df(x,y) = \begin{bmatrix} y+1 & x-1 \end{bmatrix}$, odakle dobivamo stacionarnu točku $(1,-1)$. Crtajući sliku, vidimo da treba promatrati dva ruba:

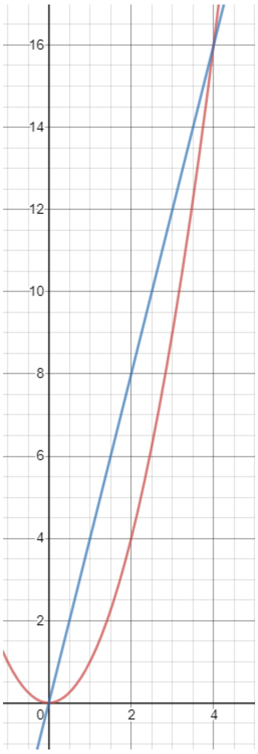


1) Na $y = 4$ imamo $f_1(x) = 5x - 1$. Linearna funkcija nema stacionarnih točaka.
2) Na $y = x^2$ imamo $f_2(x) = x^3 - x^2 + x + 3$. Derivacija daje $f_2(x) = 3x^2 - 2x + 1$, što nema realnih rješenja, pa ni tu nema stacionarnih točaka.

Preostali su rubovi rubova: $(\pm 2, 4)$. Evaluiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} f(1,-1) &= 4 \\ f(2,4) &= 9, \\ f(-2,4) &= -11. \end{aligned}$$

Globalni maksimum je 9 i postiže se u $(2,4)$, a globalni minimum je -11 i postiže se u $(-2,4)$.
Za četvrti primjer imamo $Df(x,y) = \begin{bmatrix} 2(x-3) & 2y \end{bmatrix}$ i stacionarnu točku $(3,0)$.



No, sa slike vidimo da stacionarna točka nije u domeni, pa je ne promatramo. Za rubove imamo

1) Na $y = 4x$ imamo $f_1(x) = 17x2 - 6x + 9$, odakle je stacionarna točka $(3/17, 12/17)$.
2) Na $y = x^2$ imamo $f_2(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$, $f_2(x) = 4x^3 + 2x - 6$. Da bi našli nultočke, trebamo se baviti polinomom trećeg stupnja. Moramo mu pogoditi nultočku (koju tražimo prvo kao djelitelja broja 6, a zatim kao razlomke a/b, gdje $a|6$, $b|4$). Srećom, već je $x = 1$ jedno rješenje, pa dijelimo polinome i dobijemo $f_2(x) = (x - 1)(4x^2 + 4x + 6)$. Druga zagrada nema realnih rješenja, dobivamo jednu točku $(1, 1)$.

Preostali su rubovi rubova: $(0, 0)$, $(4, 16)$. Evaluiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} f(3/17, 12/17) &= \frac{144}{17} \\ f(1, 1) &= 5, \\ f(0, 0) &= 9, \\ f(4, 6) &= 257. \end{aligned}$$

Globalni maksimum je 257 i postiže se u $(4, 16)$, a globalni minimum je 5 i postiže se u $(1, 1)$.
Peti primjer pokušajte sami. Sjetite se parametrizacije kružnice, pa zaključite kako biste

ovdje parametrizirali rub.
Šesti primjer riješimo kao i ostale. Jacobijeva matrica daje $Df(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{-x}{(x^2+y^2)^{-3/2}} & \frac{-x}{(x^2+y^2)^{-3/2}} \end{bmatrix}$, odakle zaključujemo da nema stacionarnih točaka jer $(0,0)$ nije u prirodnoj domeni. Na rubovima $x = 1$, $x = 3$ i $y = 1$ i $y = 4$ imat ćemo funkcije oblika $f_i(t) = (t^2 + b^2)^{-1/2}$ (za $b \in \{1,3,4\}$), koje su sve padajuće. Možete se i sami uvjeriti u to deriviranjem, ili primijetiti da izraz u zagradi raste po x. Zato odluka pada na vrhove pravokutnika. Kako je $f(1,1) = 1/\sqrt{2}$, $f(3,1) = 1/\sqrt{10}$, $f(1,4) = 1/\sqrt{17}$, $f(1,3) = 1/5$, zaključujemo da je $\sqrt{2}/2$ globalni maksimum, a $1/5$ globalni minimum. Kada ponovno pogledamo zadatak, primijetimo da smo to mogli i kraće zaključiti. Naime, funkcija je recipročna vrijednost udaljenosti točke od ishodišta – jasno je da je ona manja što je točka dalja od ishodišta, te veća što mu je bliža.
Za zadnji primjer imamo Jacobijevu matricu $Df(x,y) = \begin{bmatrix} y + \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} & x + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{bmatrix}$. Primijetite da derivacija nije definirana na jediničnoj kružnici, no nju ćemo ionako promatrati kao rub domene. Nadalje, da bismo našli stacionarnu točku, moramo riješiti netrivijalan nelinearan sustav po x, y. Ipak, on je simetričan po x i y, što je olakotna okolnost (ako u jednoj jednadžbi zamijenimo uloge od x i y, dobijemo drugu jednadžbu). Zato to možemo iskoristiti. Jedan način je da samo oduzmemo jednadžbe (pokušajte sami – izlučite faktor $(x - y)$). Drugi način je da prije oduzimanja napravimo još jedan korak: pomnožimo prvu jednadžbu s y, drugu s x, a tek onda oduzmemo. Time smo uklonili članove s korijenima i dobili $y^2 - x^2 = 0$. Imamo dva slučaja, $x = y$ i $x = -y$. Uvrštavajući dobiveno u bilo koju od jednadžbi, nakon sređivanja jednadžbi s jednom nepoznanciom dobijemo samo jednu stacionarnu točku $(0,0)$.
Rub znamo parametrizirati: $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Odavde je $f_1(t) = \cos t \sin t = 1/2 \sin(2t)$, i $f_1'(t) = \cos(2t)$. Nultočke su točke oblika $t = (2k+1)\pi/4$, za $k = 0,1,2,3$, odnosno $(\pm\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ i $(\pm\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$. Evaluiranjem dobivamo

$$\begin{aligned} f(0,0) &= -1 \\ f(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = f(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) &= \frac{1}{2}, \\ f(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = f(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

odakle je globalni maksimum $\frac{1}{2}$, a globalni minimum -1.

Napomena 7.7. Što bismo radili u zadatcima s funkcijama tri varijable? Isti, ali dugotrajniji postupak. Prvo pronađemo stacionarne točke. Nakon toga treba obraditi rubove koji su plohe – njih parametriziramo funkcijama dvije varijable. Svaku od njih treba riješiti kako smo inače rješavali: stacionarne točke unutrašnjosti, pa rubovi koji su nakon parametrizacija funkcije jedne varijable, pa u konačnici njihove rubove koji su točke.
Također, zadatci riječima, iako ih studenti inače ne vole, ovdje mogu olakšati stvari jer se u njima najčešće traži jedan od globalnih ekstrema (ili minimum ili maksimum). Ako neka točka ili neki rub vodi prema nalasku globalnog minimuma, a u zadatku se traži globalni minimum, znamo da te točke ne treba promatrati i postupak rješavanja se može skratiti.

Primjer 7.8. (7.2.) Odredite pozitivne x, y, z tako da je $x + y + z \leq 30$ i xyz^2 maksimalan.
U ovom zadatku prvi put imamo funkciju tri varijable kojoj treba naći globalne ekstreme. Riješit ćemo ju na dva načina: jedan će pokazati kako se inače baviti funkcijama tri varijable, a drugi će pokazati jedan primjer kako to ponekad možete izbjeći.
Kao prvo, matematički zapisano, tražimo maksimum funkcije $f(x, y, z) = xyz^2$ na domeni $\{(x, y, z) \quad \mathsf{R}^3 : x+y+z \leq 30, x, y, z > 0\}$. Problem je što ovaj skup nije kompaktan jer ne uključuje svoje rubove. No, naći maksimum funkcije na gore napisanoj domeni isto je kao naći maksimum funkcije na domeni $\Omega = \{(x, y, z) \quad \mathsf{R}^3 : x+y+z \leq 30, x, y, z \geq 0\}$, jer točke koje smo uključili sigurno nisu točke globalnog maksimuma. Naime, u tim točkama f je jednaka nuli, a u svim ostalim točkama je pozitivna (i općenito je globalni maksimum sigurno pozitivan). Dakle, uključivanje tih točaka pomaže analizi, a ne kvari konačan rezultat.
Analizirajmo prvo unutrašnjost. Jacobijeva matrica je $Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} yz^2 & xz^2 & 2yz \end{bmatrix}$. Rješavanjem dobivamo da su barem dvije koordinate jednake nuli. No, čim je već jedna koordinata jednaka nuli, u takvim točkama f ima vrijednost jednaku nuli. Takve točke sigurno nećemo analizirati, jer u njima nećemo dobiti globalni maksimum (kao što smo najavili prije ovog primjera).
Prelazimo na četiri ruba. Tri od njih se nalaze na koordinatnim ravninama, na kojima je jedna od koordinata jednaka nuli. Ponovno ta tri ruba ne treba promatrati. Preostala je samo ravnina $x + y + z = 30$. Nju treba parametrizirati pomoću dvije varijable. Jedan od načina je tako da z izrazimo pomoću druge dvije koordinate. Dobivamo $g(x, y) = xy(30 - x - y)^2$. Kako su $x, y \geq 0$, ali i $30 = x + y + z \geq x + y$, tu funkciju gledamo na domeni $\Omega = \{(x, y) \quad \mathsf{R}^2 : x + y \leq 30, x \geq 0, y \geq 0\}$. Tek smo sad zadatak sveli na tip zadatka od ranije. Za stacionarne točke te funkcije računamo $Dg(x, y) = \begin{bmatrix} y(30 - x - y)\,[(30 - x - y) - 2x] \\ x(30 - x - y)\,[(30 - x - y) - 2y] \end{bmatrix}$. Ovo je simetričan sustav po x, y. Oduzimanjem dobivamo $xy(30 - x - y)(2y - 2x) = 0$. Kao i prije, slučajeve kada su x, y ili $30 - x - y$ jednaki nula ne gledamo (vode prema tome da je funkcija jednaka nuli), pa dobivamo $x = y$. Uvrštavajući u bilo koju od koordinata u $Dg(x, y) = [0\ 0]$ dobivamo $x = y = 15/2$ (te $z = 15$).
Sada treba prijeći na rubove domene Ω . No, na bilo kojem od rubova te domene funkcija g (pa i f) je jednaka nuli, pa ju opet ne treba gledati. Konačno, odbacujući mnoge točke koje ne vode prema globalnom maksimumu, jedina preostala točka je $(15/2, 15/2, 15)$, te se u njoj postiže globalni maksimum koji iznosi $15^4/4$.
Najavili smo dva načina rješavanja ovog zadatka. Drugi način rješavanja leži u tome da brže zaključimo da treba promatrati samo točke na ravnini $x + y + z = 30$. Naime, ako uzmemo bilo koju drugu točku (x, y, z) iz Ω, zbroj njenih koordinata je manji od 30. No, to znači da bilo koju od koordinata možemo uvećati tako da dobijemo novu točku kojoj zbroj koordinata postane jednak 30, čime ćemo uvećati vrijednost funkcije f. Ne znamo hoćemo li time doći do maksimalne vrijednosti, ali to pokazuje da se globalni maksimum sigurno ne postiže ni za jednu točku za koju je $x + y + z < 30$. Dakle, nakon takvog obrazloženja možemo odmah prijeći na funkciju g i domenu Ω .

Zadatak 7.9. (6.8.) Odredite maksimalan volumen kvadra upisanog u $x^2+y^2+z^2=3$. Budući da je kvadar upisan u sferi, jedan mu se vrh nalazi na sferi. Također, ako mu je to vrh (x_0, y_0, z_0), i ako pretpostavimo da su mu bridovi paralelni s koordinatnim osima (što smijemo bez smanjenja općenitosti, u suprotnom zarotiramo sliku), onda su svi vrhovi kvadra oblika $(\pm x_0, \pm y_0 \pm z_0)$ (predznaci se biraju za svaku koordinatu neovisno). Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da za prvopromatranu točku (x_0, y_0, z_0) vrijedi da su sve koordinate pozitivne.
U tom slučaju, stranice kvadra su duljina $2x_0$, $2y_0$, $2z_0$, te je volumen $8x_0y_0z_0$. No, točka se nalazi na sferi, pa te točke koje biramo zadovoljavaju $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$ (uz $x_0, y_0, z_0 > 0$). Kako te točke zadovoljavaju jednu dodatnu jednakost, moramo je se riješiti prilikom definiranja funkcije kojoj tražimo globalni ekstrem. (Razmišljajte ovako: ako za neku točku iz unutrašnjosti n-dimenzionalne domene funkcije kojoj tražite ekstrem se ne možete pomaknuti u svih n smjerova i ostati u domeni, onda morate smanjiti broj varijabli u problemu). Najlakše se riješiti jedne varijable pomoću $z_0 = \sqrt{3-x_0^2-y_0^2}$.
Konačno imamo: trebamo odraditi globalni maksimum funkcije $f(x,y) = 8xy\sqrt{3-x^2-y^2}$ na domeni $\Omega = \{(x,y) \quad \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 3\}$. Mogućnost varijabli x, y da budu jednake nuli smo uključili kao u prošlom zadatku (sigurno za te vrijednosti funkcija nema maksimalnu vrijednost), dok smo drugi uvjet uključili zbog prirodne domene funkcije.
Sada pristupamo kao prije. Matrica derivacija funkcije f je

$$Df(x,y) = 8\left[y\sqrt{3-x^2-y^2} + xy\frac{-x}{\sqrt{3-x^2-y^2}} \quad x\sqrt{3-x^2-y^2} + xy\frac{-y}{\sqrt{3-x^2-y^2}}\right].$$

Jednadžbe su simetrične. Pomnožimo prvu jednadžbu s y, drugu s x i oduzimamo: $(y^2-x^2)\sqrt{3-x^2-y^2} = 0$. Ako je izraz pod korijenom jednak nuli, onda se nalazimo na rubu (kružnom luku), što ćemo analizirati kasnije. Ako je prva zagrada jednaka nuli, tada je $x = \pm y$. Kako su oba broja nenegativna, imamo $x = y$. Uvrštavanjem u bilo koju jednadžbu imamo $\frac{1}{\sqrt{3-2x^2}}3(x-x^3)$ odakle je $x = y = 1$ (pa je i $z = 1$). U toj točki vrijednost funkcije f (i time volumen) je jednak 8.
Sada prelazimo na rubove. Na svakom od rubova ($x = 0$, $y = 0$ ili $x^2+y^2 = 3$) vrijednost funkcije jednaka je nuli, pa se maksimum ne postiže.
Zaključujemo da je maksimalan volumen kvadra jednak 8 (i postiže se za kocku sa stranicama duljine 2).

Zadatak 7.10. (7.3) Odredite maksimalan volumen kvadra u prvom oktantu kojemu je jedan vrh ishodište, a dijagonalno suprotni leži na ravnini $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$.

Napomena 7.11. U svim primjerima u ovoj lekciji zadatak je bio naći ekstrem funkcije na kompaktnom skupu. Kada nemamo kompaktnu domenu, zadatak je teži. Ne postoji neki uobičajeni način, ali spomenut ćemo dva pristupa.

- Možemo koristiti sljedeću **tvrdnju**: za konveksnu funkciju na konveksnom skupu vrijedi da je lokalni minimum ujedno i globalni minimum. Funkcija je konveksna na svojoj domeni ako joj je Hesseova matrica pozitivno definitna u svim točkama domene. Domena je konveksna ako za svake dvije točke te domene je i cijela dužina koja spaja te dvije točke je u domeni (laički rečeno, nema rupu). To znači da ako vrijede navedeni uvjeti (funkcija i domena su konveksne), i ako nađemo jednu stacionarnu točku, ona je lokalni minimum (zbog konveksnosti u toj točki), pa je i globalni minimum.

- Drugi način je "izmisliti" neki kompaktan podskup domene. Taj podskup analiziramo kao i prije (s manjim naglaskom na obradu rubova). Na ostatku domene analiziramo što se događa s vrijednošću funkcije kada točke teže u (neku) beskonačnost. Ovdje ima mnogo sloboda i mnogo verzija "algoritma".

Primjer 7.12. (6.6.) Koja je točka eliptičnog konusa $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ najbliža točki $(1, 2, 0)$?
Odrediti najbližu točku znači naći točku koja ima najmanju udaljenost, odnosno znači minimizirati funkciju udaljenosti. Također, slično kao u prošlom semestru, točka u kojoj se postiže minimum funkcije ista je kao i točka u kojoj se postiže kvadrat minimuma funkcije (ako je funkcija nenegativna). Nakon što izrazimo jednu varijablu (prirodno je to z) preko ostalih, dobivamo da treba naći globalni minimum funkcije $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (\sqrt{x^2 + 2y^2} - 0)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x^2 + 2y^2)$ na domeni $\Omega = \mathbb{R}^2$. Ta domena nije ograničena, pa nije kompaktna. Ipak, ona je konveksna. Dakle, dovoljno je provjeriti je li funkcija konveksna i naći stacionarnu točku (koja će biti i lokalni minimum). Matrica prvih derivacija je $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2(x-1) + 2x & 2(y-2) + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - 2 & 6y - 4 \end{bmatrix}$, a matrica drugih. $Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Hesseova matrica je konstantna na cijeloj domeni i pozitivno je definitna. Jedina stacionarna točka (dobivena iz matrice prvih derivacija) je $(x, y) = (1/2, 2/3)$, te je ona i točka lokalnog minimuma zbog konveksnosti funkcije, ali i točka globalnog minimum zbog tvrdnje najavljene prije zadatka. Dakle, najbliža točka je $(1/2, 2/3, \sqrt{41}/6)$, udaljenost je $\sqrt{f(1/2, 2/3)} = \sqrt{114}/6$.

Zadatak 7.13. (6.7) Odredite točku na ravnini $3x - 4y + 2z + 32 = 0$ najbližu točki $P(-1, 2, 4)$.

Zadatak 7.14. (7.4) Odredite pravac $y = ax + b$ koji minimizira sumu kvadrata udaljenosti $d_i = |y_i - (ax_i + b)|$ za $i = 1, 2, 3$ od točaka $T_1(-1, 2), T_2(0, -1), T_3(1, 1)$.

Primjer 7.15. (7.5.) Ako postoje, odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ na $\left\{(x, y) \quad \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\}$.
Ovo je zadatak koji ćemo riješiti drugačije. Možete pokušati kao ranije, no ova funkcija nije konveksna na svojoj domeni. Kao kompaktan skup prirodno je odvojiti trokut $\Omega := \left\{(x, y) \quad \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\right\}$, budući da je tamo funkcija pozitivna, a inače negativna. Kako je Ω kompaktan, a samo na tom skupu je funkcija pozitivna, globalni maksimum postoji i nalazi se u Ω. Za globalni minimum, ako postoji, treba analizirati dio domene izvan Ω.
Promotrimo prvo dio izvan Ω. Prirodno je pogledati što se događa s točkama kad one idu

u beskonačnost u nekom smjeru. Recimo, za izbor točaka $(x, y) = (h, h)$, kad $h \to \infty$, vrijednost funkcije ide u $-\infty$. Zato globalni minimum ne postoji.
Promotrimo sada kompaktan skup Ω. Tamo je funkcija nenegativna. Obrađujemo kao inače: $Df(x, y) = \begin{bmatrix} 3x^2y^2(1 - x - y) - x^3y^2 & 2x^3y(1 - x - y) - x^3y^2 \end{bmatrix}$. Odavde dobivamo $x^2y^2(3 - 4x - 3y) = 0$, $x^3y(2 - 2x - 3y) = 0$. Slučajeve kada su neke od varijabli jednake nuli ćemo obrađivati kad ćemo obrađivati rubove domene. Stoga preostaje sustav $3 = 4x + 3y, 2 = 2x + 3y$ s jedinstvenim rješenjem $(x, y) = (1/2, 1/3)$. Na svim rubovima trokuta Ω funkcija ima vrijednost nula, dok u pronađenoj stacionarnoj točki ima vrijednost $f(1/2, 1/3) = 1/432$. Zato je to globalni maksimum funkcije f na Ω, ali i na cijeloj njenoj domeni.

Zadatak 7.16. (7.6) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = \left(x^2 + 2y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ na $\mathbb{R}^2$, ako oni postoje.

8

Dvostruki i trostruki integral

Ovim poglavljem ulazimo u zadnju cjelinu na ovom kolegiju: integriranje funkcija više varijabli. Kod funkcija jedne varijable određeni integral reprezentirao je površinu područja ispod grafa funkcije nad intervalom na kojem se integrira. Slično je i kod funkcija više varijabli. **Dvostruki integral**

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

reprezentira volumen područja ispod grafa funkcije $f(x,y)$ nad domenom Ω. Kao i kod funkcija jedne varijable, u slučaju da f poprima negativne vrijednosti, tamo se volumen područja uzima s negativnim predznakom.

Dvostruke integrale rješavamo pomoću dva jednostruka integrala. Jedan primjer je $\int_0^1 \int_{x-2}^{\sqrt{x^2+1}} xy\ dydx$. Primijetite da su ovo doista dva jednostruka integrala: unutarnji integral je integral po varijabli y s rubovima koji ovise o varijabli x. Tom integracijom dobit ćemo izraz ovisan po x, koji onda integriramo od 0 do 1. Inače kod takvih primjera s više jednostrukih intervala pazite na pravila: rubovi vanjskih integrala moraju biti konstante, rubovi sljedećeg integrala mogu ovisiti samo o "vanjskoj" varijabli. U slučaju još više integrala (kod problema vezanih uz trostruke integrale), sljedeći rubovi mogu ovisiti o još i sljedećoj varijabli, itd.

Da bismo dvostruke integrale sveli na više jednostrukih integrala, najbitnije je dobro odrediti granice integracije, a to ćemo raditi crtanjem domene. Vidjet ćemo na primjerima: idemo od vanjskog integrala i određujemo najveći i najmanji x koji se nalaze u domeni i pišemo ih na rubove integrala. Nakon toga za fiksni x tražimo najveći i najmanji y (možda ovisan o x) koji se nalaze u domeni, i pišemo ih na rubove integrala. Nakon toga samo preostaje izračunati dva jednostruka integrala. Smijemo i zamijeniti uloge x i y, dapače, to će ponekad biti i nužno.

Prije primjera, sjetite se da je integral neparne funkcije na simetričnoj domeni nula (pa slično vrijedi i ovdje), te da je integral pozitivne funkcije uvijek pozitivan.

Primjer 8.1. (9.1.a)) Izračunajte $\iint_{\Omega} e^{x+y}dxdy, \Omega = \left\{(x,y) \quad \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3\right\}$.
Domena na kojoj integriramo je pravokutnik $[0,1] \times [0,3]$. Od dvostrukog integrala ra-

dimo dva jednostruka integrala. Neka je x varijabla za vanjski integral. U domeni Ω najmanji i najveći x koji se pojavljuju su 0 i 1, pa će to biti granice za vanjski integral. Sada odredimo granice za unutarnji interval. Povucimo lagano pravac oblika $x = c$ koji siječe Ω (koji označava skup točaka s jednakom x-koordinatom). Na tom pravcu tražimo točke s najmanjom i najvećom y-koordinatom. Neovisno o tome koji pravac uzmemo, te vrijednosti su iste: 0 i 3. Zato imamo $\iint_\Omega e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \int_0^3 e^{x+y}dydx$. Da smo računali prvo s vanjskom varijablom y, a unutarnjom x, imali bismo iste rubove, tj. imali bismo izraz $\int_0^3 \int_0^1 e^{x+y}dxdy$. Računamo dva jednostruka integrala. Unutarnji promatramo kao funkciju po y, uz parametar x. Primitivna funkcija od funkcije e^{x+y} je ista ta funkcija, pa imamo

$$\iint_\Omega e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \int_0^3 e^{x+y}dydx = \int_0^1 \left(e^{x+y}\right)\Big|_{y=0}^{3} dx = \int_0^1 \left(e^{x+3} - e^{x+0}\right) dx.$$

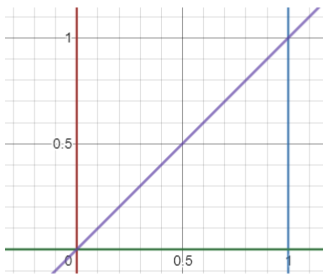
Preostalo je izračunati zadnji integral po x:

$$\iint_\Omega e^{x+y}dxdy = \int_0^1 \left(e^{x+3} - e^{x+0}\right) dx = \left(e^{x+3} - e^{x+0}\right)\Big|_{x=0}^{1} = e^4 - e^3 - e + 1.$$

Primjer 8.2. Izračunajte:

- (9.1.b)) $\iint_\Omega x^3ydxdy$, $\Omega = \left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\right\}$;
- (9.1.e)) $\iint_\Omega \left(x + y^3\right) dxdy$, $\Omega = \left\{(x,y) \quad \mathsf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$;
- (9.1.g)) $\iint_\Omega \left(x^4 + y^2\right) dxdy$ Ω skup omeđen sa $y = x^3$ i $y = x^2$;
- (9.1.l)) $\iint_\Omega e^{x^2}dxdy$, Ω skup omeđen sa $y = 0, 2y = x$ i $x = 2$;
- (9.1.k)) $\iint_\Omega \left(4 - y^2\right) dxdy$, Ω skup omeđen sa $y^2 = 2x$ i $y^2 = 8 - 2x$;
- (9.1.m)) $\iint_\Omega \left(3xy^3 - y\right) dxdy$, Ω skup omeđen sa $y = |x|$ i $y = -|x|$ za $x \quad [-1, 1]$.

Pogledajmo prvi primjer. Prvo nacrtajmo domenu.



Radi se o pravokutnom trokutu (uz x-os). Pronađimo dva jednostruka integrala kojima je "vanjska" varijabla x. U ovom trokutu najmanji i najveći x koji se pojavljuju su 0 i 1, pa su to rubovi integracije. Sada pogledajmo unutarnje rubove. Za fiksan x (povlačimo okomit pravac koji presijeca domenu), najmanji y je onaj koji se nalazi na x-osi, a najmanji onaj koji se nalazi na pravcu $y = x$. Zato su rubovi integracije 0 i x (kao najveća i najmanja vrijednost koju y poprima, ovisne o x). Zato imamo

$$\iint_\Omega x^3 y dxdy = \int_0^1 \int_0^x x^3 y dydx = \int_0^1 x^3 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{12}.$$

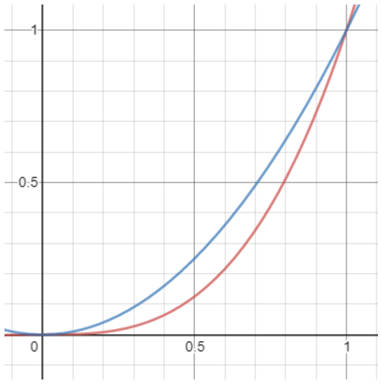
Pokažimo na istom tom (prvom) primjeru kako zapisati dvostruki integral u obrnutom redoslijedu. Prvo, najmanji i najveći y koji se pojavljuju u domeni su 0 i 1. Drugo, za fiksan y (povlačimo pravac oblika $y = c$) promatramo najmanju i najveću x-koordinatu na tom pravcu. Najmanja je kad pravac presijeca pravac $y = x$ (ekvivalentno, $x = y$), a najveća kad pravac presijeca pravac $x = 1$. Zato su rubovi y i 1, te računamo:

$$\iint_\Omega x^3 y dxdy = \int_0^1 \int_y^1 x^3 y dxdy = \int_0^1 y \left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=y}^{1} dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (y - y^5) dy = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}.$$

U drugom primjeru imamo kompliciraniju domenu – jedinični krug. Najmanji i najveći x koji se pojavljuju u toj domeni su -1 i 1. Nadalje, za svaki x, najmanji i najveći y su onda kada pravac paralelan s y-osi siječe kružnicu, jednom iznad x-osi, a drugi put ispod x-osi. Zanima nas koliko iznosi y u ovisnosti o x na tim krivuljama. Znamo da je rub dan jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$, odakle izražavamo y preko x: $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Predznak upravo određuje dio kružnice iznad odnosno ispod x-osi. Zato imamo

$$\iint_\Omega \left(x + y^3\right) dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(x + y^3\right) dydx = \int_{-1}^1 \left(xy + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_{-1}^1 \left(2\sqrt{1 - x^2}x\right) dx = 0.$$

Zadnja jednakost vrijedi jer se radi o neparnoj funkciji na simetričnoj domeni.
Primijetimo da smo do sličnog zaključka mogli doći i brže. Funkcija $f_1(x, y) = x$ je neparna po x, a domena je osnosimetrična u odnosu na y–os, pa je integral te funkcije jednak nuli. Funkcija $f_2(x, y) = y^3$ je neparna po y, a domena je osnosimetrična u odnosu na x–os, pa je integral te funkcije jednak nuli. Zato je i ukupan integral jednak nuli.
Riješimo treći primjer. Nacrtajmo prvo sliku.

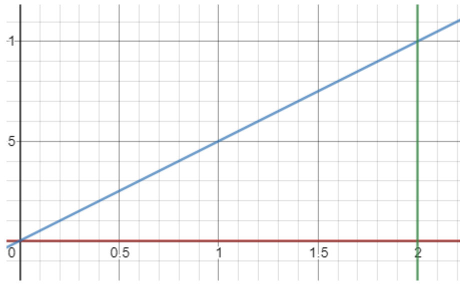


Prilikom crtanja slike pazite na to koja od dviju krivulja sličnog izgleda je $y = x^2$, a koja $y = x^3$. Nadalje, do sada nismo pazili na poredak varijabli u integraciji (bilo nam je svejedno koji redoslijed ćemo uzimati). U ovom primjeru pokušat ćemo paziti na redoslijed kako bi nam rješavanje kasnije bilo što jednostavnije. Kako je domena dana krivuljama $y = x^2$ i $y = x^3$, logično je upravo te izraze staviti kao rubove unutarnjeg integrala. To znači da će nam "unutarnja" varijabla u dva jednostruka integrala biti y, a vanjska x. Ne bi bilo pogrešno rješavati na obrnuti način, ali tada bi rubovi integracije ovisili o drugom i trećem korijenu funkcije, što bi moglo biti ružno.
Dakle, kako je "vanjska" varijabla x, gledamo najmanju i najveću x-koordinatu koje se pojavljuju u domeni. To su 0 i 1. Nadalje, za svaku x–koordinatu, najmanja y–koordinata je za onu točku koja se nalazi na krivulju $y = x^3$, a najveća na krivulji $y = x^2$. Zato imamo:

$$\iint_\Omega \left(x^4 + y^2\right) dxdy = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \left(x^4 + y^2\right) dydx = \int_0^1 \left(x^4 \left(y\right)\Big|_{y=x^3}^{x^2} + \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x^3}^{x^2} \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^6 - x^7 + \frac{x^6}{3} - \frac{x^9}{3} \right) dx = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{21} - \frac{1}{30} = \frac{9}{280}.$$

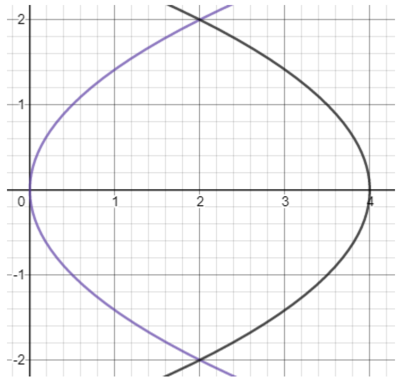
U ovom primjeru moglo se dogoditi da pogriješimo u određivanju odnosa krivulja $y = x^2$ i $y = x^3$ na skici. U tom slučaju dobili bismo negativno rješenje, što bi trebao biti alarm za uzbunu, budući da je podintegralna funkcija nenegativna.
Prelazimo na četvrti primjer. Ovdje nećemo paziti na poredak integracije samo da bismo olakšali zadatak, nego i zato što ga drugačije nećemo znati riješiti. Podintegralna funkcija je jedan od primjera funkcija (jedne varijable) kojoj ne postoji primitivna funkcija zapisana preko elementarnih funkcija. To znači da ne želimo izabrati onaj poredak integracije u kojem ćemo u prvom koraku integrirati po x, a u drugom po y. Dakle, želimo da je y "unutarnja" varijabla, a x unutarnja varijabla. Crtamo domenu.



Granice za x su 0 i 2. Za fiksni x, najmanji y je na x-osi, a najveći na pravcu $y = x/2$. Zato imamo

$$\iint_{\Omega} e^{x^2} dxdy = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} e^{x^2} dydx = \int_0^2 \frac{x}{2} e^{x^2} dx = \begin{bmatrix} t = x^2, & dt = 2xdx \\ x = 0 & = \quad t = 0 \\ x = 2 & = \quad t = 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \int_0^4 e^t dt = \frac{1}{4}(e^4 - 1).$$

U sljedećem primjeru opet razmislimo o odabiru redoslijeda varijabli. Podintegralna funkcija ništa ne sugerira, ali mogla bi domena.



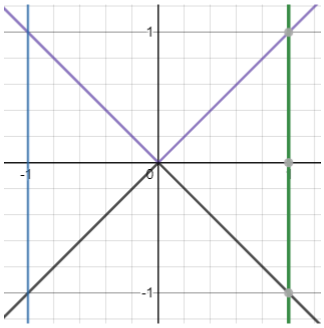
Ako uzmemo da je vanjska varijabla x, tada ćemo u računu granica za y gledati koje krivulje presijecaju pravci oblika $x = c$. Vidimo drugačije ponašanje za točke za koje vrijedi $x \geq 2$ i za točke za koje je $x \leq 2$. Ako ustrajemo u ovom rješenju, jedina mogućnost je da originalan integral zapišemo kao zbroj dva integrala, u ovisnosti o ta dva dijela domene. To bi izgledalo ovako:

$$\iint_{\Omega} \left(4 - y^2\right) dxdy = \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \left(4 - y^2\right) dydx + \int_2^4 \int_{-\sqrt{8-2x}}^{\sqrt{8-2x}} \left(4 - y^2\right) dydx.$$

Ipak, za time nema potrebe ako odaberemo da je vanjska varijabla y. Sa slike vidimo da su granice za y su -2 i 2. Za fiksni y, horizontalni pravac presijeca obje krivulje $y^2 = 2x$ i $y^2 = 8 - 2x$, redom. Vrijednosti za x dobijemo izražavanjem varijable x preko y iz gornjih jednadžbi. Dobivamo

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(4 - y^2\right) dxdy &= \int_{-2}^2 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\frac{8-y^2}{2}} \left(4 - y^2\right) dxdy = \int_{-2}^2 (4 - y^2)(4 - y^2) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left(16 - 8y^2 + y^4\right) dy = 16 \cdot 4 - \frac{8}{3} 16 + \frac{1}{5} 64 = \frac{512}{15}. \end{aligned}$$

U prošlom primjeru "hint" za bolji poredak u jednadžbama mogao je biti i način zadavanja skupa. U obje jednadžbe rubnih krivulja lakše je izraziti x preko y nego obratno (nema potrebe za korijenovanjem i biranjem predznaka).
U zadnjem zadatku krećemo s crtanjem domene.



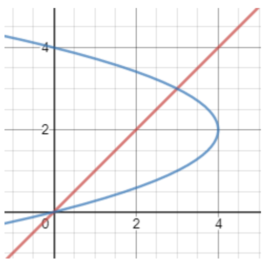
Domenu čine dva pravokutna trokuta s pravim kutem u ishodištu i hipotenuzama paralelnim s y-osi. Primijećujemo da je nezgodno odrediti poredak varijabli u dva jednostruka integrala. Ipak, ne trebamo to uopće raditi. Podintegralna funkcija je neparna po varijabli y (jer vrijedi $f(x,y) = -f(x,-y)$), a domena je osnosimetrična po osi x. Dakle, traženi integral je 0.

Do sada znamo jedan način za traženje površine nekog skupa. Ako se nalazi između dviju krivulja oblika $y = f(x)$ i $y = g(x)$, tada je površina tog skupa dana (jednostrukim) integralom razlike tih funkcija. Pokažimo sada drugi način određivanja površina skupova koji će biti još korisniji kada naučimo alate iz sljedeće lekcije. Znamo da dvostruki integral predstavlja volumen nekog tijela nad područjem Ω. Tada $\iint_\Omega 1dxdy$ predstavlja volumen prizme s bazom Ω i visinom 1. Iznos volumena je umnožak visine i površine baze, pa ta vrijednost predstavljam upravo površinu našeg područja Ω.

Primjer 8.3. Odredite površinu skupa omeđenog sa

- (9.2.a)) $y = x$ i $x = 4y - y^2$;
- (9.2.b)) $x + y = 5$ i $xy = 6$.

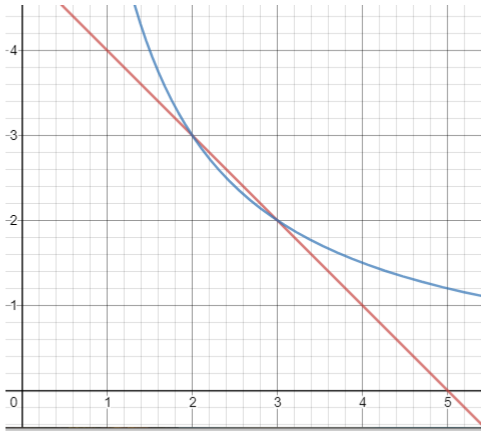
Krećemo kao i uvijek s crtanjem slike.



Tražimo površinu područja ispod pravca i "unutar" parabole. Kako je u jednadžbama rubova varijabla x već izražena preko y, biramo redoslijed varijabli tako da je x unutarnja varijabla. Granice za y su 0 i 3, pa zato imamo

$$P = \iint_{\Omega} 1 dxdy = \int_0^3 \int_y^{4y-y^2} dxdy = \int_0^3 3y - y^2 dy = \frac{9}{2}.$$

U drugom podzadatku opet krećemo s crtanjem domene.



Poredak varijabli u integraciji nije bitan. Odaberemo li da je y vanjska, rubovi za vanjski integral su 2 i 3, a za unutarnji vidimo sa slike da je donji rub čitamo iz jednadžbe hiperbole, a gornji iz jednadžbe pravca, izražavajući x preko y. Imamo

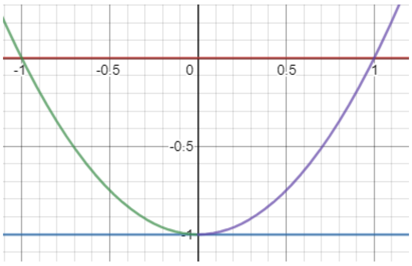
$$P = \iint_{\Omega} 1 dxdy = \int_2^3 \int_{6/y}^{5-y} dxdy = \int_2^3 \left(5 - y - \frac{6}{y}\right) dy = \frac{5}{2} + 6 \ln \frac{2}{3}.$$

U zadatcima koji slijede imamo dva jednostruka integrala, no njihovo računanje je ili teže ili gotovo nemoguće na način na koji su zapisani. Naš zadatak je zapisati ih u drugom redoslijedu tako da počeni izraz prvo zapišemo kao dvostruki integral.

Primjer 8.4. Promijenite redoslijed integracije i izračunajte

- (9.3.a)) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2 dxdy$;
- (9.3.c)) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{\sqrt{x}}^{1} \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx$.

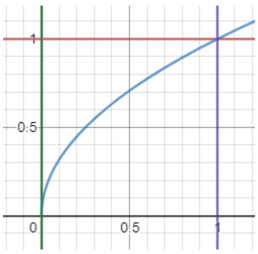
Da bismo odredili o kojem se dvostrukom integralu radi, trebamo odrediti domenu Ω. Lakše je krenuti s vanjskim granicama integracije, iako oni daju manje informacija. Kako oni iznose -1 i 0, cijela domena je podskup pruge omeđene pravcima $y = -1$ i $y = 0$. Pogledajmo sada unutarnje granice integracije. U ovisnosti o nekom y, najmanji i najveći x su oni kada neki pravac paralelan s x-osi presijeca krivulje $x = \pm\sqrt{y+1}$. Dakle, ta krivulja čini neki rub naše domene. Izraz kojim je ona zadana možemo zapisati i kao $x^2 = y + 1$, odnosno $y = x^2 - 1$. To nam je poznatija krivulja i možemo je nacrtati. Konačno zaključujemo da je domena integracije $\Omega = \{(x, y) \ : \ x^2 - 1 \leq y \leq 0\}$.



Sada je i lakše zapisati integral u drugom poretku varijabli:

$$\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} x^2 dxdy = \iint_{\Omega} x^2 dxdy == \int_{-1}^{1}\int_{x^2-1}^{0} x^2 dydx = \int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)dx = 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}.$$

Dok smo prvi primjer mogli riješiti i u originalnom poretku varijabli (eventualno bi račun bio malo ružniji), drugi ne možemo. Ponovno odredimo prvo domenu integracije. Iz vanjskih granica integracije, znamo da za sve točke u Ω vrijedi $0 \leq x \leq 1$. Gledajući unutarnje, zaključujemo da vrijede nejednakosti $\sqrt{x} \leq y \leq 1$. Crtamo krivulje $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ i $y = \sqrt{x}$ i uvjeravamo se da je domena integracije $\Omega = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$. Zadnji uvjet može se zapisati i kao $y^2 \leq x$.

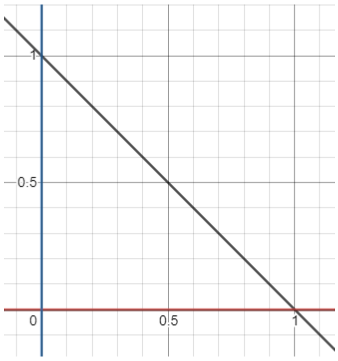


Mijenjamo redoslijed integracije i dobivamo

$$\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^{1} \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dydx = \iint_{\Omega} \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dxdy = \int_0^1\int_0^{y^2} \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dxdy$$

$$= \int_0^1 y^2 \sin\left(\frac{y^3+1}{2}\right) dy = \begin{bmatrix} t = \frac{y^3+1}{2}, \ dt = \frac{3}{2}y^2dy \\ x = 0 \ = \quad t = 1/2 \\ x = 1 \ = \quad t = 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} \sin t dt = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{1}{2} - \cos 1\right).$$

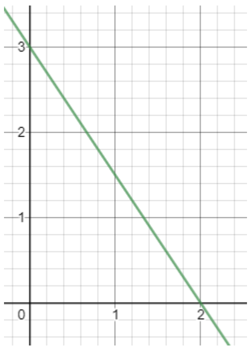
Primjer 8.5. (9.4.) Odredite volumen tijela omeđenog s gornje strane ravninom $z = x+y$, a s donje strane trokutom s vrhovima $(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$.
Volumen gore opisanog tijela predstavit ćemo dvostrukim integralom. Treba nam domena nad kojom integriramo, te podintegralna funkcija čiji graf označava gornji rub tijela. Oboje je dosta jasno što biramo: domena je gore opisani trokut, a funkcija je $f(x, y) = x + y$.



Računamo:

$$\iint_{\Omega} x+y \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x+y \, dxdy = \int_0^1 \left(\frac{(1-y)^2}{2} + y(1-y) \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 8.6. (9.6.) Odredite volumen tijela omeđenog sa $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ i koordinatnim ravninama.
Slično kao u prošlom zadatku, osim što nam nije eksplicitno dana domena integracije. Nju moramo naći tako da nađemo presjek ravnine iz zadatka s xy-ravninom.
Kao prvo, podintegralnu funkciju dobijemo izražavanjem varijable z preko x i y: $f(x,y) = 4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)$.
Presjek s ravnine iz zadatka sa xy-ravninom dobijemo sa slike, ili uvrštavajući $z=0$. Uočavamo da se radi o pravcu koji prolazi kroz $(2,0,0)$ i $(0,3,0)$, a domena integracije je pravokutni trokut koji uključuje te dvije točke i ishodište.



Konačno računamo:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} 4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right) \, dxdy = 4\int_0^3 \int_0^{2-2y/3} \left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right) \, dxdy = \\ &= 4\int_0^3 \left(\left(2-\frac{2}{3}y\right) - \frac{1}{4}\left(2-\frac{2}{3}y\right)^2 - \frac{y}{3}\left(2-\frac{2}{3}y\right) \right) \, dy \\ &= 4\int_0^3 \left(\frac{1}{9}y^2 - \frac{2}{3}y + 1\right) dy = \frac{1}{9}\cdot\frac{27}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2} + = 4\cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

Zadatak 8.7. (9.8.) Odredite volumen tijela omeđenog s gornje strane plohom $z = 1 + xy$, a s donje strane trokutom s vrhovima $(1,1),(4,1),(3,2)$.

Napomena 8.8. Cijela lekcija do sada bila je posvećena dvostrukom integralom. Postoji i trostruki integral (zapravo postoji i integral proizvoljne dimenzije, ali na ovom kolegiju se zaustavljamo na trećoj). Teže ga je motivirati, budući da ne možemo zamisliti što bi bila generalizacija volumena ispod grafa funkcije u tri varijable. No, tehnika njegovog rješavanja ostaje ista: zapisujemo ga pomoću tri jednostruka integrala tako da prvo biramo granice integracije za prvu varijablu, zatim za drugu (možda ovisne o prvoj varijabli), a onda i za treću (možda ovisne o prve dvije varijable).
Lekciju završavamo sa zadatcima s tri jednostruka integrala. Tehnika rješavanja se ne razlikuje od zadataka s dvostrukim integralima.

Primjer 8.9. Izračunajte:

- (9.10.b)) $\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x+2z)dzdxdy$;
- (9.10.h)) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^z \cos x \sin y dzdydx$;
- (9.10.g)) $\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z dzdxdy$.

U ovim primjerima nema potrebe za crtanjem domene ili promjenama poretka integracije. Zato rješavamo redom. U prvom primjeru:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^{2y} \int_0^x (x+2z)dzdxdy &= \int_0^1 \int_1^{2y} (x^2+x^2)dxdy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{3}x^3\Big|_{x=1}^{2y} dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (8y^3-1)dy = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

U drugom primjeru:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 e^z \cos x \sin y dzdydx &= (e^1-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin y dydx \\ &= (e-1)(-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = (e-1)(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0) = e-1.\end{aligned}$$

U zadnjem primjeru:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \int_y^{y^2} \int_0^{\ln x} ye^z dzdxdy &= \int_1^2 \int_y^{y^2} y(x-1)dxdy = \int_1^2 y\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{x=y}^{y^2} dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{y^5}{2}-\frac{3}{2}y^3+y^2\right)dy = \left(\frac{64-1}{12}-\frac{3}{2}\frac{16-1}{4}+\frac{8-1}{3}\right) = \frac{47}{24}.\end{aligned}$$

9

Zamjena varijabli u višestrukom integralu

Poglavlje započinjemo teoremom.

Teorem 9.1. Neka je $\varphi : D \to \mathsf{R}^2$ injekcija klase C^1. Pretpostavimo da je Jakobijan $J_\varphi(x, y)$ različit od nule za sve $(x, y) \quad D$ i da su $|J_\varphi(x, y)|$ i $\left|\frac{1}{J_\varphi(x,y)}\right|$ ograničene funkcije na D.

Ako je $f : \varphi(D) \to \mathsf{R}$ integrabilna funkcija, tada je funkcija $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ integrabilna na D i vrijedi

$$\int_{\varphi(D)} f = \int_D (f \circ \varphi)|J_\varphi|.$$

Ovaj teorem generalizacija je teorema zamjene varijabli iz prošlog semestra. I tada smo mijenjali podintegralnu funkciju kompozicijom podintegralne funkcije i funkcije koja određuje zamjenu varijabli, te smo uz to mijenjali rubove integracije i uzimali u obzir derivaciju prilikom zamjene varijabli. Sada je ta derivacija apsolutna vrijednost Jakobijana. U ovom poglavlju teorem ćemo često koristiti za neke tipične funkcije φ, pa nećemo provjeravati sve uvjete teorema, no ovdje je napisan u punoj općenitosti ako će vam trebati neka određena zamjena varijabli. Teorem primjenjujemo na ovaj način: ako imamo integral funkcije f na "ružnoj" domeni $\varphi(D)$, možemo ga zamijeniti integralom funkcije na ljepšoj domeni D, a cijena koju plaćamo je ružnija podintegralna funkcija.

Prije nastavka, bitna napomena: u korištenju ovog teorema nemojte zaboraviti dopisati Jakobijan u podintegralnoj funkciji. To je česta greška.

Primjer 9.2. (10.2.) Izračunajte $\iint_D \sin(x - y)\cos(x + 2y)dxdy$ ako je
$\Omega = \left\{(x, y) \quad \mathsf{R}^2 : 0 \le x - y \le \pi, 0 \le x + 2y \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
Ovo je jedini primjer koji ćemo napraviti u kojem ćemo sami odrediti funkciju φ, i provjeriti sve uvjete teorema. Iako bismo zadatak vjerojatno mogli riješiti originalan integral, i domena i podintegralna funkcija sugerira nam da umjesto varijabli x, y koristimo varijable $u := x - y$ i $v := x + 2y$. Tada će podintegralna funkcija biti ljepša, ali, bitnije,

domena će biti pravokutnik, što je najljepša domena koju možemo imati.
Sada moramo odrediti funkciju φ. Između ostalog, ona mora zadovoljavati da je domena integracije D jednaka $\varphi(\Omega)$, gdje je $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi/2]$. Dakle, funkcija φ preslikava pravokutnik Ω u kojem se nalaze varijable u, v u paralelogram D u kojem se nalaze varijable x, y. Dakle, treba naći funkciju koja zadovoljava

$$\varphi(u,v) = (x,y), \qquad \text{gdje je} \quad u = x - y, \; v = x + 2y.$$

Da bismo odredili koja je to funkcija, izrazimo x, y preko u, v rješavajući (parametarski zadan) linearan 2×2 sustav. Dobivamo $x = \frac{1}{3}(2u + v)$, $y = \frac{1}{3}(v - u)$, odakle je

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{1}{3}(2u+v), \frac{1}{3}(v-u)\right).$$

Provjerimo ostale uvjete teorema. Jacobijeva matrica funkcije φ je

$$D\varphi(u,v) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je Jakobijan konstantan na cijeloj domeni i iznosi $J_\varphi(u,v) = 1/3$. Zato su zadovoljeni uvjeti teorema, i primjenjujemo ga:

$$\iint_D \sin(x-y)\cos(x+2y)dxdy = \frac{1}{3}\iint_\Omega \sin u \cos v \; dudv = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin u \; du \int_0^{\pi/2} \cos v \; dv = \frac{2}{3}$$

Nadalje ćemo koristiti neke gotove zamjene varijabli. Počinjemo s jedinom u $\mathbb{R}^2$.

Polarne koordinate

Koordinate (nove varijable): $r \quad [0, +\infty$, $\theta \quad [0, 2\pi$
Veza s Kartezijevim koordinatama:

$$\begin{gathered} \varphi(r,\theta) = (x,y) \\ x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \\ r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x). \end{gathered}$$

Jakobijan:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Primjer 9.3. (10.4.a)) Izračunaj $\iint_\Omega \left(x^2+y^2\right) dxdy$, Ω je krug radijusa 2 sa središtem u ishodištu.
Primjer je dosta jednostavan, ali koristan da vidimo kako koristimo ovu zamjenu varijabli. Kako se radi o krugu radijusa 2, vrijedi $\Omega = \varphi([0,2] \times [0, 2\pi])$, gdje je φ gore opisana

zamjena varijabli. Podintegralna funkcija se da zapisati pomoću novih varijabli kao r^2. Uzimajući u obzir i Jakobijan, dobivamo

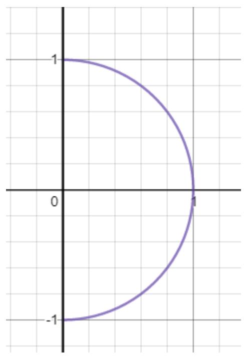
$$\iint_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} r^3 drd\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3 drd\theta = 8\pi.$$

Napomena 9.4. Slično možemo raditi kad nam je domena kružni vijenac, kružni isječak, kombinacija tog dvoje, ili već i kad nam je samo jedan od rubova domene dan kao dio kruga. Prije nastavka, jedan savjet: najčešće je dobro držati varijablu θ kao vanjsku varijablu nakon zamjene varijabli.

Primjer 9.5. Izračunaj:

- (10.5.a)) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$;
- (10.5.b)) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$.

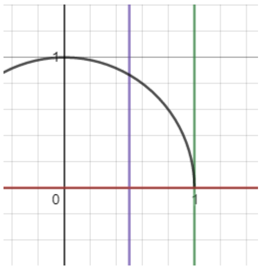
U ovim problemima prvo sami trebamo odrediti o kojoj se domeni zapravo radi. Prvo čitamo da se y nalazi u intervalu $[-1,1]$, a zatim da je $x \geq 0$ i da je najveći x kada se nalazi na krivulji $x = \sqrt{1-y^2}$, odnosno na dijelu krivulje $x^2 + y^2 = 1$. Zadnje sugerira polarne koordinate. Skicirajući domenu, uvjeravamo se da se radi o jediničnom polukrugu u prvom i četvrtom kvadrantu.



Sada dolazi teži dio zadatka: moramo odrediti granice za θ i r. To radimo na sličan način kao za Kartezijeve koordinate. Prvo promotrimo iz kojeg intervala dolazi θ. Za to povlačimo (polu)pravce u $\mathbb{R}^2$ koji imaju konstantan θ, a to su polupravci iz ishodišta, te gledamo koji su najveći i najmanji θ koji se pojavljuju u domeni Ω. Striktno gledano, θ bi trebao dolaziti iz intervala $[0, 2\pi$, no toga se ne moramo striktno držati u ovom slučaju: $\theta \quad [-\pi/2, \pi/2]$.
Sada određujemo granice za r: u ovisnosti o θ, treba odrediti najveći i najmanji r koji se pojavljuju u domeni Ω. Za neki polupravac s fiksnom vrijednošću θ gledamo najveću i najmanju vrijednost za r. Najmanja je u ishodištu, a najveća na kružnici radijusa 1. Zato imamo (ne zaboravljajući Jakobijan)

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 drd\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Riješimo i drugi zadatak. Prvo određujemo domenu: $x \in [1/2, 1]$, $y \geq 0$, te je y ograničen dijelom jedinične kružnice $x^2 + y^2 = 1$.



Zaključujemo da je Ω dio jediničnog kruga u prvom kvadrantu desno od pravca $x = 1/2$. Prvo odredimo granice za θ. On je najmanji kada se točke nalaze na x-osi, i iznosi 0. Najveći je kada se nalazi u najvišoj točki domene, na sjecištu jedinične kružnice i pravca $x = 1/2$. Radi se o točki $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Kut θ za tu točku je $\pi/3$.
Sada odredimo granice za r. Za fiksan kut θ očito je najveći radijus kada se nalazimo na kružnici radijusa 1, dakle kada je $r = 1$. Najmanji je kada se nalazimo na pravcu $x = 1/2$. Vezu između r i θ u tim točkama možemo dobiti algebarski na sljedeći način:

$$1/2 = x = r\cos\theta \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2\cos\theta}.$$

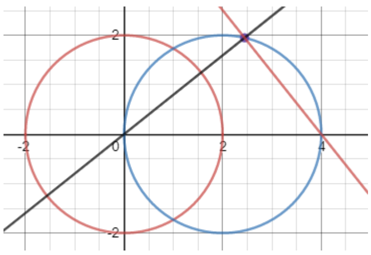
Konačno:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx = \int_{0}^{\pi/3}\int_{1}^{\frac{1}{2\cos\theta}} rdrd\theta = \int_{0}^{\pi/3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8\cos^2\theta}\right)d\theta$$
$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{8}(\operatorname{tg}\pi/3 - \operatorname{tg}0) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Primijetite da se u zadatku trebala odrediti površina skupa Ω. Za vježbu, pokušajte ga odrediti elementarnim metodama (gradivom osnovne škole), i usporediti rezultat.

Primjer 9.6. (10.6.) Izračunajte površinu skupa

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$



Sa slike vidimo da nas zanima površina skupa unutar plave kružnice, a izvan crvene. Pokušajte i ovaj zadatak riješiti elementarnim metodama. Mi ćemo ga riješiti dvostrukim

integralom.
Ponovno prelazimo na polarne koordinate. Najmanji i najveći θ u toj domeni su u točkama u kojima se kružnice sijeku. Vrijednost kuta računamo algebarski kao u prošlom zadatku, ili možemo geometrijski. Naime, svaki od tih vrhova s ishodištem i točkom $(2,0)$ čine jednakostraničan trokut. Zato je $\theta \quad [-\pi/3, \pi/3]$.
Intervali za r su opet teži dio zadatka. Promotrimo polupravac s fiksnom vrijednošću θ. Najmanja vrijednost za r je kada se točka nalazi na kružnici oko ishodišta, što je za $r = 2$. Najveća vrijednost je kada se točka nalazi na drugoj kružnici. Nju možemo odrediti algebarski (točke se nalaze na krivulji $4 = x^2 + y^2 = (r\cos\theta - 2)^2 + (r\sin\theta)^2$, pa odredimo vezu varijabli r i θ), ali lakše je geometrijski. Naime, točke $(0,0)$, $(4,0)$ i to sjecište polupravca i plave kružnice čine pravokutni trokut (prema Talesovom teoremu). U tom trokutu tražimo duljinu katete uz kut θ u kojem je hipotenuza duljine 4, pa je tražena najveća vrijednost za r jednaka $4\cos\theta$. Dakle,

$$P = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{2}^{4\cos\theta} r dr d\theta = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 8\cos^2\theta - 2 \; d\theta = \int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 4\cos(2\theta) + 2 \; d\theta = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}.$$

U sljedećem zadatku prilagodite polarne koordinate tako da budu korisne za domene u obliku elipsi.

Zadatak 9.7. (10.7.) Izračunajte površinu elipse $x^2/4 + y^2/9 = 1$.

Lekciju nastavljamo s tipičnim zamjenama varijabli u tri dimenzije. Postoje dvije: cilindričke kordinate i sferne koordinate. U zadatcima koji slijede najčešće će pisati koju zamjenu treba koristiti, no na kolokviju toga nema. Zato ćemo sami pokušati izvoditi zaključak u svakom zadatku kada koristiti koje koordinate. Neki zadatci mogu se riješiti i pomoću obiju zamjena koordinata.

Cilindričke koordinate

Koordinate (nove varijable): $r \quad [0, +\infty \;, \theta \quad [0, 2\pi \;, z \quad -\infty, +\infty$
Veza s Kartezijevim koordinatama:

$$\varphi(r,\theta,z) = (x,y,z)$$
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad z = z.$$

Jakobijan:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Sferne koordinate

Koordinate (nove varijable): $r \quad [0,+\infty \;,\ \theta \quad [0,2\pi \;,\ \phi \quad [0,\pi$
Veza s Kartezijevim koordinatama:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = (x,y,z)$$
$$x = r\cos\theta\sin\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\phi$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \theta = \arctan(y/x), \quad \phi = \arctan(z/r).$$

Jakobijan:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\theta \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\theta \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix} = r^2\sin\phi.$$

Cilindričke koordinate upravo su iste kao polarne koordinate, do na treću koordinatu koja se samo prepisuje. Varijabla r je tako udaljenost točke (x,y,z) od osi z, a ne udaljenost od ishodišta, a θ, kao i prije, kut koji projekcija točke na xy-ravninu zatvara s pozitivnim dijelom x-osi. Vrijednost r također možete gledati kao udaljenost projekcije točke na istoj toj ravnini od ishodišta. S druge strane, u sfernim koordinatama r zaista jest udaljenost točke (x,y,z) od ishodišta koordinatnog sustava. Vrijednost θ i dalje ima isto značenje, dok vrijednost ϕ ima novo značenje. Ta varijabla označava kut koji točka zatvara s pozitivnim dijelom z-osi. Vrijednost ϕ jednaka je nuli kada se točka nalazi na pozitivnom dijelu z-osi, jednaka je $\pi/2$ kada se nalazi u xy-ravnini, te je jednaka π kad se nalazi na negativnom dijelu osi z. Skup točaka u ravnini za koje ϕ imaju istu vrijednost je (neki) konus.

Komentirajmo kada koristiti koju zamjenu varijabli. Ako podintegralna funkcija ima izraz oblika $x^2+y^2+z^2$, to nam možda sugerira da je bolje koristiti sferne koordinate, dok u slučaju izraza x^2+y^2 je bolje koristiti cilindričke koordinate. Nadalje, treba gledati i domenu. Ona će u oba slučaja imati visoku dozu centralne simetrije oko z-osi, no ključno je kako se domena ponaša po z-koordinatama. Ako domena ima neki rub koji nalikuje na sferu, sferne koordinate bi mogle biti korisne, a inače ćemo koristiti cilindričke koordinate.

Slično kao kod polarnih koordinata, savjetujemo redoslijed prilikom zapisivanja integrala. Kod cilindričkih koordinata, od vanjskih do unutarnjih varijabli najčešće će biti θ, r, z, a kod sfernih koordinata ϕ, θ, r.

Primjer 9.8. (10.8.) Izračunajte $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, gdje je
$\Omega = \Big\{(x,y,z) \quad \mathsf{R}^3 : x^2+y^2 \le 4, 2 \le z \le 3\Big\}$.
Domena je valjak kojem je baza krug radijusa 2, visine 1. Podintegralna funkcija uključuje izraz x^2+y^2 pa je logično da koristimo cilindrične koordinate. Rubove integracije

lako je odrediti:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_2^3 zr^2\ dzdrd\theta \\ &= \frac{9-4}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\ drd\theta = \frac{5}{2}\frac{8}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{40\pi}{3}.\end{aligned}$$

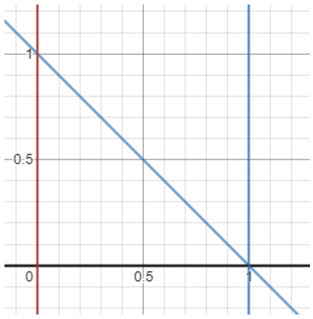
Primjer 9.9. (10.9.b)) Izračunajte $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dzdxdy.$
Podintegralna funkcija ponovno sugerira cilindričke koordinate, iako domena može sugerirati i sferne. Prvo promotrimo x i y koordinatu. Kako je $y \quad [0,3]$, $x \geq 0$ te je jedan rub $x^2+y^2=3^2$, projekcija naše domene integracije na xy-ravninu je dio kruga $x^2+y^2 \leq 9$ u prvom kvadrantu. Što se tiče z koordinate, ona je nenegativna, a rub je određen sa sferom $x^2+y^2+z^2=9$. Dakle, domena je zapravo dio kugle u prvom oktantu radijusa 3.
Rubove za θ i r određujemo kako bismo odredili u slučaju polarnih koordinata za četvrtinu kruga. Za z koordinatu znamo da je veća od 0, a (zapisano pomoću novih varijabli) manja od $\sqrt{9-x^2-y^2}=\sqrt{9-r^2}$. Uzimajući u obzir i Jakobijan, imamo

$$\begin{aligned}&\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}}\int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dzdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-r^2}} 1dzdrd\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^3 \sqrt{9-r^2}drd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^3\sqrt{9-r^2}dr = \begin{bmatrix} r=3\sin\phi & dr=3\cos\phi \\ r \quad [0,3] & \phi \quad [0,\pi/2]\end{bmatrix} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2\phi\ d\phi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{9}{2}(1-\cos 2\phi)\ d\phi = \frac{9\pi^2}{8}\end{aligned}$$

Iako nam je podintegralna funkcija sugerirala da riješimo zadatak cilindričkim koordinatama, zadatak je moguće riješiti i sfernim koordinatama. Pokušajte.

Napomena 9.10. Kao što smo površinu skupa u $\mathbb{R}^2$ dobili integrirajući jedinicu na skupu (u $\mathbb{R}^2$) čija površina nas zanima, analogno vrijedi i u dimenziji više. Iako je sada teže za zamisliti, vrijedi: volumen skupa $\Omega \quad \mathbb{R}^3$ jednak je integralu jedinice na tom skupu.

Primjer 9.11. (10.10.a)) Izračunajte volumen tijela omeđenog cilindrom $x^2+y^2=1$ i ravninama $z=0$, $x+z=1$.
Skicirat ćemo samo projekcije koje nam trebaju, budući da nije trivijalno skicirati domenu u tri dimenzije. Očito je projekcija skupa na xy-ravninu jedinični krug. Promotrimo projekciju na xz-ravninu.

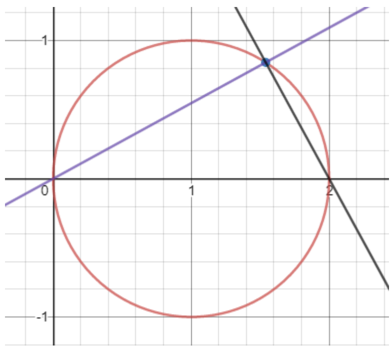


Ništa ne sugerira da bismo trebali koristiti sferne koordinate, pa ni nećemo. Za određivanje cilindričkih koordinata, r i θ određuju se jednostavno (spomenuli smo da je projekcija jedinični krug). Za z koordinatu, imamo uvjete da je $z \geq 0$, te da je odozgo ograničen ravninom $x + z = 1$, dakle najveća koordinata z je kada je $z = 1 - x = 1 - r\cos\theta$.
Zato imamo

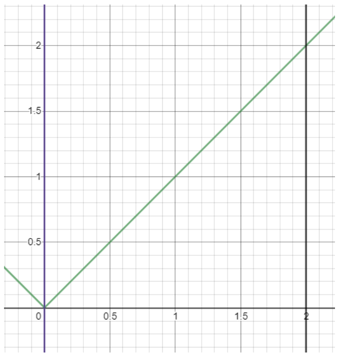
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-r\cos\theta} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r - r^2 \cos\theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos\theta = \pi.$$

Zadatak 9.12. (10.10.c)) Izračunajte volumen tijela ispod paraboloida $z = x^2 + y^2$, unutar cilindra $x^2 + y^2 = 1$ i iznad xy-ravnine.

Primjer 9.13. (10.10.f)) Izračunajte volumen tijela ispod konusa $z^2 = x^2 + y^2$, unutar cilindra $x^2 + y^2 = 2x$ i iznad xy-ravnine.
Primijetite da drugi skup zaista jest cilindar jer možemo koristeći kvadrat binoma možemo pisati $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Dakle, gledajući projekciju na xy-ravninu vidimo krug radijusa 1 sa središtem u $(1, 0)$.



Prvi skup je konus (drugim riječima, beskonačni stožac). U xz-ravnini skiciramo ga kao simetrale kvadranata, uzimajući u obzir da se u tri dimenzije ti pravci "vrte" oko z-osi. Kako je jednadžba konusa zapisana, trebali bismo uzeti u obzir i dio konusa ispod xy-ravnine, no zadnji uvjet u zadatku nam govori da to ne trebamo gledati.



Prelazimo na cilindričke koordinate. Intervali za z su najlakši: odozdo smo ograničeni nulom, a odozgo je z najveći kada poprima vrijednost $\sqrt{x^2+y^2}=r$. Za θ i r je malo teže, no ovakvu sličnu situaciju smo već imali. Budući da točka u krugu oko $(1,0)$ radijusa 1 može zatvarati proizvoljno mali kut s pozitivnim (i negativnim) dijelom osi y, interval u kojem se nalazi θ je $[-\pi/2,\pi/2]$. Za vrijednost r koristimo trik s Talesovim teoremom: najmanja vrijednost je nula, a najveću dobijemo kao katetu uz kut θ u pravokutnom trokutu s hipotenuzom duljine 2. Imamo:

$$V=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^r r\ dzdrd\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}r^2drd\theta=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{-\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta$$
$$=\begin{bmatrix} & t=\sin\theta & dt=\cos\theta \\ \theta & [-\pi/2,\pi/2] & t \quad [-1,1]\end{bmatrix}=\frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=\frac{8}{3}\cdot\frac{4}{3}=\frac{32}{9}.$$

Primjer 9.14. (10.11.a)) Izračunajte $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, uz $\Omega=\Big\{(x,y,z) \quad \mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\Big)\Big\}$.

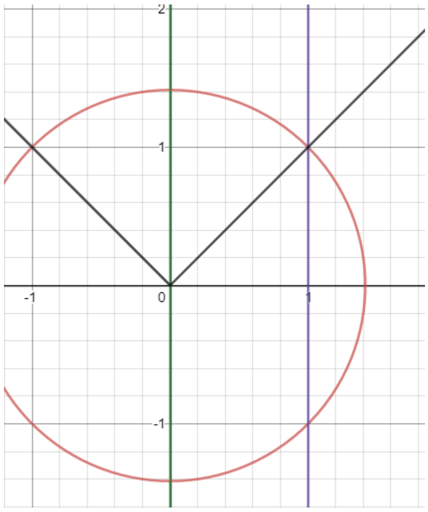
Ovo je prvi primjer u kojem ćemo primijeniti sferne koordinate. To je i logično, gledajući i domenu i podintegralnu funkciju. Domena je kugla oko ishodišta radijusa 2 iz koje je izvađena kugla radijusa 1. Odredimo rubove za varijable ϕ,θ,r redom. Budući da domena uključuje točke koje su proizvoljno blizu pozitivnom dijelu osi z i proizvoljno blizu negativnom dijelu osi z (te i sve kutove ϕ između), prvo zaključujemo da je ϕ $[0,\pi]$. Sada gledamo rubove za θ. Projekcija domene na xy-ravninu je kružni vijenac, pa su uključene sve moguće vrijednosti za θ: $\theta \quad [0,2\pi]$. Zadnje, skup je radijalno simetričan i uključuje sve točke koje su udaljene za r od ishodišta, gdje je $r \quad [1,2]$. Ne zaboravljajući Jakobijan, imamo:

$$\iiint_\Omega\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\sin\phi\ drd\theta d\phi=$$
$$\frac{15}{4}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin\phi\ d\theta d\phi=\frac{15}{4}\cdot 2\cdot 2\pi=15\pi.$$

Primjer 9.15. (10.12.a)) Izračunajte $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dzdydx$.

Ovdje ponovno trebamo računati volumen neke domene. Razmislite možete li ovo odrediti i elementarnim metodama.

Gledajući koordinate x i y vidimo da je projekcija domene na xy ravninu dio kruga u prvom kvadrantu. Gledajući z koordinatu, odozdo je ograničena konusom $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$, a odozgo sferom $r^2 = x^2+y^2+z^2 = 2$. Skica u xz-ravnini je određena pravcima $z = \pm r$ i krugom radijusa $\sqrt{2}$ oko ishodišta.



Odredimo prvo ϕ. Očito je najmanja vrijednost 0, budući da je dio pozitivnog dijela osi z uključen u domenu. S druge strane, najveći odmak od pozitivnog dijela osi z je kada se nalazimo na donjem rubu domene, što je konus. Na konusu točke zatvaraju jednak kut sa z-osi i sa xy-ravninom – taj kut je $\pi/4$. Dakle, $\phi \in [0, \pi/4]$.
Što se tiče θ, kako je projekcija u prvom kvadrantu, imamo $\theta \in [0, \pi/2]$. Konačno, kako za proizvoljan konus određen nekom fiksnom vrijednošću ϕ i proizvoljan polupravac na tom konusu određen s θ domena uključuje sve vrijednosti za r manje od $\sqrt{2}$, imamo

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dzdydx = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sin\phi \, drd\theta d\phi$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6}(2 - \sqrt{2}).$$

Primjer 9.16. (10.12.c)) Izračunajte $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dzdydx.$
Ponovno je jasno da koristimo sferne koordinate. U prve dvije varijable vidimo da su x i y u prvom kvadrantu, a gledajući zadnju varijablu vidimo da je domena zapravo dio jedinične kugle u prvom oktantu.
Kako se nalazimo iznad xy-ravnine, a možemo zatvoriti proizvoljan kut sa z-osi, interval za ϕ je $[0, \pi/2]$. Intervale za θ i r znamo odrediti (iako r ima drugačiju interpretaciju

kao kad smo bili u cilindričkim koordinatama). Računamo:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dzdydx = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \sin\phi \; drd\theta d\phi$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\phi \; d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

10

Krivuljni integral i Greenova formula

U funkcijama jedne varijable integrali su imali dva lijepa svojstva. Jedno je bilo da se površina ispod grafa funkcije može opisati određenim integralom te funkcije na odgovarajućem intervalu. To svojstvo generalizirali smo u više dimenzija i koristili u zadnjim lekcijama. Drugo svojstvo je da su derivacija i integral međusobno suprotne radnje. Konkretna tvrdnja koju smo koristili je Newton-Leibnizova formula: ako za funkciju $F : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ postoji $f : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ takva da je $f \ = F$, tada vrijedi

$$\int_a^b F(x)dx = f(b) - f(a).$$

U ovoj lekciji generalizirat ćemo ovo drugo svojstvo u kontekstu integrala više varijabli. Za to nam prvo trebaju neke definicije.

Definicija 10.1. Neka je $C : [a, b] \to \mathsf{R}^n$ funkcija klase C^1, te $f : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}$ i $F : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ neprekidne funkcije. Tada broj

$$\int_C f ds := \int_a^b f(C(t)) \ \ C\ (t) \ \ dt$$

nazivamo **krivuljnim integralom prve vrste** duž puta C, a broj

$$\int_C F ds := \int_a^b \ F(C(t)), C\ (t) \ \ dt$$

nazivamo **krivuljnim integralom druge vrste** duž puta C.

Napomena 10.2. Ključna razlika ovih izraza je po kodomeni funkcija. Integral prve vrste računa se za funkcije kojima je kodomena R, a integral druge vrste R^n (skup jednake dimenzije kao i njegova domena). Općenito, funkcije kojima su domena i kodomena jednake dimenzije nazivamo **poljima**. Primjeri iz fizike su gravitacijsko i magnetsko polje. Krivuljni integrali, kao što ime sugerira, reprezentiraju integral funkcije duž neke krivulje u R^n. Tu krivulju parametriziramo funkcijom C, te računamo integral funkcije

jedne varijable za našu funkciju (f ili F), komponiranu s funkcijom $C(t)$. Formule za krivuljne integrale uključuju izraz $C\ (t)$ na različite načine, komplicirajući formule, ali i osiguravajući da krivuljni integrali ne ovise o izboru parametrizacije krivulje. To je i prirodno: ako dvije funkcije C_1 i C_2 parametriziraju istu krivulju, želimo da se i krivuljni integrali duž tih krivulja poklapaju.
Većinu lekcije bavit ćemo se krivuljnim integralom druge vrste. On ima i fizikalnu interpretaciju. Ako je F neko gravitacijsko ili magnetsko polje, tada je krivuljni integral za to polje rad potreban da jediničnu masu prenesemo iz točke $C(a)$ u točku $C(b)$. Na Zemljinoj površini gravitacijsko polje djeluje pravilom $F(x, y, z) = (0, 0, -g)$ (jer u svakoj točki prostora gravitacija djeluje prema dolje). To polje ne mora biti konstantno: to je u slučaju gravitacijskih polja u svemiru ili magnetskih polja.

Primjer 10.3. Izračunajte odgovarajući integral duž puta C ako je

- (11.1.a)) $f(x, y, z) = x + y + z$ i $C(t) = (\cos t, \sin t, t), t \quad [0, 2\pi]$;
- (11.2.b), malo izmijenjen) $F(x, y) = (\cos y, e^x)$ i $C(t) = \left(1, e^t\right), t \quad [0, 2]$.

Čitajući kodomene zaključujemo da se u prvom zadatku radi o integralu prve vrste, a u drugom o integralu druge vrste.
U oba slučaja trebamo računati derivaciju funkcije C. U prvom primjeru, imamo $C\ (t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. Norma derivacije je $C\ (t) = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$. Činjenica da je norma konstanta će nam pomoći kod integriranja, ali treba uzeti u obzir da općenito to ne mora biti tako. Računamo po formuli: umjesto x uvrštavamo $C_1(t)$, umjesto y uvrštavamo $C_2(t)$, a umjesto z uvrštavamo $C_3(t)$, pa dobivamo

$$\int_C f ds = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \sqrt{2} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t + t) \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

U drugom primjeru opet računamo derivaciju od $C(t)$: $C\ (t) = (0, e^t)$. Opet slično računamo krivuljni integral: umjesto x i y u funkciji F uvrštavamo $C_1(t)$ i $C_2(t)$ redom, ali ne računamo normu funkcije C nego koristimo skalarni umnožak:

$$\int_C F ds = \int_0^2 \ (\cos(e^t), e^1) \cdot (0, e^t)\ dt = \int_0^2 (\cos e^t \cdot 0 + e^1 \cdot e^t) dt = e^3 - e.$$

Napomena 10.4. Kao što je i najavljeno, nadalje u lekciji bavit ćemo se samo integralima druge vrste.
Pogledajmo prošli primjer integrala druge vrste, raspisujući izraze za općenitu krivulju C i polje F:

$$\int_C F ds = \int_a^b \ F(C(t)), C\ (t)\ dt = \int_a^b (F_1(C(t)) \cdot C_1(t) + F_2(C(t)) \cdot C_2(t)) dt.$$

U tom kontekstu, krivuljni integral druge označava se i na ovaj način:

$$\int_C F ds = \int_C F_1 dx + F_2 dy.$$

Ova jednakost samo je uvođenje nove oznake za postojeći pojam krivuljnog integrala druge vrste. Gledajući zadnje dvije jednakosti, primjećujemo da smo F_i u drugoj jednakosti zamijenili s $F_i(C(t))$ u prvoj, dakle kompozicijom i-te komponente funkcije F i krivulje C. Izraze dx i dy zamijenili smo izrazima $C_1(t)$ i $C_2(t)$, redom. U prošlom primjeru koji smo riješili, drugačiji zapis istog krivuljnog integrala bio bi

$$\int_C \cos y dx + e^x dy.$$

U nastavku ćemo koristiti novi zapis.

Primjer 10.5. (11.5.) Izračunajte $\displaystyle\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ za $C(t) = (\cos t, \sin t), t \quad [0, 2\pi]$.
Drugim riječima, u ovom primjeru trebamo naći krivuljni integral polja $F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ po zadanoj krivulji. No, nećemo se vraćati na to polje nego ćemo koristiti zapis iz teksta zadatka.
Čitajući formulu iz gornje Napomene, općenito u ovakvim zadatcima radimo sljedeće:

- svako pojavljivanje izraza dx mijenjamo s $C_1(t)$, svako pojavljivanje izraza dy mijenjamo s $C_2(t)$;
- svako pojavljivanje izraza x mijenjamo s $C_1(t)$, svako pojavljivanje izraza y mijenjamo s $C_2(t)$;
- integral računamo na intervalu $[a, b]$ po varijabli t.

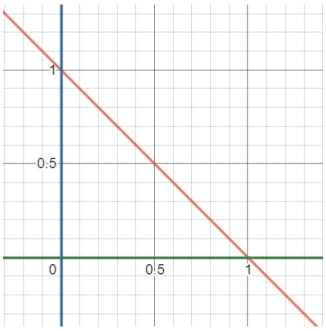
U ovom zadatku, kako je $C(t) = (\cos t, \sin t)$ i $C\ (t) = (-\sin t, \cos t)$, imamo

$$\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = 2\pi.$$

Primjer 10.6. (11.6.) Integriraj polje $F(x, y) = (y, 0)$ duž bridova trokuta s vrhovima $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
Kao što smo rekli u uvodu, krivuljni integral ne ovisi o parametrizaciji te krivulje. Ipak, to znači da ćemo morati sami parametrizirati krivulju iz zadatka. Prije svega, zapišimo zadatak novonaučenom formatu:

$$\int_C F ds = \int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_C y dx + 0 dy = \int_C y dx.$$

Sada parametrizirajmo krivulju C. Kao i u lekciji s globalnim ekstremima, lakše će nam biti parametrizirati tri dijela krivulje: prvo donju katetu trokuta (udesno), zatim hipotenuzu (prema gore), i na kraju lijevu katetu (prema dolje).



Ima više izbora za parametrizacije, ali logičan izbor su:

1) $C_{(1)}(t) = (t, 0),\ t \quad [0, 1],\ C_{(1)}(t) = (1, 0);$

2) $C_{(2)}(t) = (1 - t, t),\ t \quad [0, 1],\ C_{(2)}(t) = (-1, 1);$

3) $C_{(3)}(t) = (0, 1 - t),\ t \quad [0, 1],\ C_{(3)}(t) = (0, -1).$

Iz zapisa krivuljnog integrala ($\int_C ydx$) vidimo da nam trebaju samo druge komponente parametrizacija $C_{(i)}(t)$ i prve komponente derivacija parametrizacija $C_{(i)}(t)$. Imamo

$$\int_C Fds = \int_C ydx = \int_{C_{(1)}} ydx + \int_{C_{(2)}} ydx + \int_{C_{(3)}} ydx = \int_0^1 0 \cdot 1dt + \int_0^1 t \cdot (-1)dt + \int_0^1 (1-t) \cdot 0dt = \frac{-1}{2}.$$

Gornji račun nije težak, ali čini napornim. Logično je pomisliti može li jednostavnije. Prije toga, sjetimo se motivacije iz uvoda. Htjeli bismo generalizirati Newton-Leibnizov teorem. Pokušavajući čisto generalizirati rezultat iz funkcija jedne varijable, rekli bismo da ako za funkciju $F : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ postoji funkcija $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ takva da je $\quad f = F$, tada možemo krivuljni integral polja F zamijeniti razlikom vrijednosti funkcije f u krajnjim točkama krivulje. Takav rezultat će zaista vrijediti.
Prije nego ga iskažemo, pokušajmo odrediti kada funkcija F može biti gradijent neke funkcije f. Ako vrijedi $\quad F = f$, tada zapisano po komponentama imamo $\partial_x f = F_1$, $\partial_y f = F_2$, pa prema Schwartzovom teoremu mora biti i

$$\partial_y F_1 = \partial_y(\partial_x)f = \partial_x(\partial_y)f = \partial_x F_2.$$

To se pokazuje kao nužan i dovoljan uvjet.

Teorem 10.7. Neka je $F : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ vektorsko polje klase C^1. Neka za to polje vrijedi $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$. Tada postoji funkcija $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ takva da je $\quad f = F$. Nadalje, za svaku krivulju $C : [a, b] \to \mathsf{R}^2$ vrijedi

$$\int_C Fds = f(C(b)) - f(C(a)).$$

Funkcija f u ovom slučaju naziva se **potencijalnom funkcijom** za polje F, a polje F naziva se **konzervativno polje**.

Napomena 10.8. Dvije bitne posljedice ovog teorema su:

- Za konzervativno polje F i fiksne točke A i B, krivuljni integral polja F po svim krivuljama koje povezuju točke A i B se poklapaju (dakle, ne ovise o izboru krivulje). Ta vrijednost je razlika vrijednosti potencijalne funkcije u točkama B i A.

- Za konzervativno polje F integral po zatvorenoj krivulji (krivulji koja počinje i završava u istoj točki) je nula.

To znači da inače u zadatcima, ako polje zadovoljava uvjet $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$ (koji je jednostavno za provjeriti), račun krivuljnog integrala se pojednostavljuje i svodi na traženje potencijalne funkcije.
Teorem 10.7 vrijedi i u više dimenzija. Recimo za R^3 potrebno je provjeriti tri jednakosti derivacija: $\partial_x F_2 = \partial_y F_1$, $\partial_x F_3 = \partial_z F_1$ i $\partial_y F_3 = \partial_z F_2$. Lakše je zapamtiti da treba provjeriti je li Jacobijeva matrica simetrična.
Sjetimo se sada za tren primjera iz stvarnog života. Gravitacijsko polje $F(x, y, z) = (0, 0, -g)$ uistinu je konzervativno jer možemo uzeti potencijalnu funkciju $f(x, y, z) = -zg$. Po Teoremu 10.7 zaključujemo da za svake dvije točke A i B rad koji je potreban za prenijeti jediničnu masu iz točke A u točku B ne ovisi o krivulji po kojoj tu masu prenosimo. Ako se želimo popeti na neku planinu, potrošit ćemo jednako energije neovisno o odabiru planinarske staze i neovisno o strminama tih staza.
Preostao je problem pronalaska potencijalne funkcije. Kako se to radi vidjet ćemo na primjerima u nastavku.

Primjer 10.9. (11.7.a)) Odredi potencijalnu funkciju (ako postoji) za vektorsko polje $F(x, y) = (4xy, 2x^2)$ i odredi krivuljni integral tog polja po bilo kojoj krivulji od $(1, 1)$ do $(0, 0)$.
Provjerimo prvo nužni uvjet za konzervativnost: kako je $\partial_x F_2(x, y) = 4x = \partial_y F_1(x, y)$, polje je konzervativno, pa postoji potencijalna funkcija.
Odredimo tu potencijalnu funkciju. Iz uvjeta imamo

$$\partial_x f(x, y) = F_1(x, y) = 4xy \quad \text{i} \quad \partial_y f(x, y) = F_2(x, y) = 2x^2.$$

Prvu od tih dviju jednadžbi integrirajmo (s obje strane) po x, držeći y kao parametar. Imamo $f(x, y) = 2x^y + C(y)$. Primijetite da kako je y parametar, integralna konstanta C zaista može ovisi o y. Dakle, u ovom slučaju nije riječ o konstanti, nego o funkciji ovisnoj o y. Zadnje dobivenu jednadžbu deriviramo po y kako bismo je usporedili s drugim uvjetom za vezu f i F.

$$\partial_y f(x, y) = 2x^2 + C\ (y).$$

Odozgo imamo $\partial_y f(x, y) = 2x^2$, pa zaključujemo da mora vrijediti $C\ (y) = 0$. To je jedino moguće ako $C(y)$ ne ovisi o y, nego ako je zaista "prava" konstanta. Dobili smo rješenje $f(x, y) = 2x^2 y + C$, $C \quad \mathsf{R}$.
Potencijalna funkcija uvijek će biti jedinstvena do na aditivnu konstantu C. Primijetite

da to ne utječe na formulu iz Teorema 10.7, budući da se ta konstanta pokrati. Ako se u zadatku traži da odredimo sve potencijalne funkcije, rješenje moramo ostaviti u ovakvom formatu. Ako samo treba odrediti krivuljni integral konzervativnog polja koristeći potencijalnu funkciju, tada možemo odabrati bilo koju konstantu, najčešće $C = 0$.
Odredili smo sve potencijalne funkcije. Za zadnji dio zadatka uzmimo f za koju je $C = 0$, te koristeći teorem zaključujemo da je krivuljni integral duž svake krivulje koja povezuje točke $(1, 1)$ i $(0, 0)$ jednak i iznosi

$$\int_C F ds = f(1,1) - f(0,0) = 2 - 0 = 2.$$

Primjer 10.10. Odredi potencijalnu funkciju, ako postoji, za sljedeća vektorska polja:

- (11.7.b)) $F(x, y, z) = (yz, xz + z^3, xy + 3yz^2)$;
- (11.7.c)) $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$;
- $F(x, y) = (x^2y, 2y^2)$.

Kao što je najavljeno, Teorem 10.7 može se primijeniti i u više dimenzija. Za konzervativnost treba provjeriti je li Jacobijeva matrica simetrična:

$$DF(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x + 3z^2 \\ y & x + 3z^2 & 6yz \end{bmatrix}.$$

Dakle, potencijalna funkcija zaista postoji. Algoritam za njeno traženje je isti kao u prošlom primjeru, samo što zbog varijable više imamo i korak više. Iz uvjeta znamo da je

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y,z) &= F_1(x,y,z) = yz, \\ \partial_y f(x,y,z) &= F_2(x,y,z) = xz + z^3, \\ \partial_z f(x,y,z) &= F_3(x,y,z) = xy + 3yz^2. \end{aligned}$$

Integrirajući prvu jednakost dobivamo $f(x, y, z) = xyz + C(y, z)$. Slično kao u prošlom primjeru, "konstanta" C ne ovisi o x, ali može ovisiti o svim ostalim parametrima koji su sudjelovali u integraciji, a to su u ovom slučaju varijable y i z. Sada deriviramo ovu jednakost po y i usporedimo s uvjetom:

$$xz + z^3 = F_2(x,y,z) = \partial_y f(x,y,z) = xz + \partial_y C(y,z).$$

Odavde je $\partial_y C(y, z) = z^3$. Integrirajući to po y dobivamo $C(y, z) = yz^3+D(z)$. Ponovno smo oprezni oko novodobivene integralne "konstante". Novu informaciju uvrštavamo u treći uvjet za f:

$$xy + 3yz^2 = F_3(x,y,z) = \partial_z f(x,y,z) = xyz + \partial_z C(y,z) = xyz + 3yz^2 + D\ (z).$$

Za kraj otkrivamo da je $D(z) = D$ realna konstanta, dakle sve potencijalne funkcije f za konzervativno polje F su oblika $f(x, y, z) = xyz + yz^3 + D$, $D \quad \mathsf{R}$.
Drugi primjer rješavamo na isti način. Jacobijeva matrica

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ e^{y+2z} & xe^{y+2z} & 2xe^{y+2z} \\ 2e^{y+2z} & 2xe^{y+2z} & 4xe^{y+2z} \end{bmatrix}$$

je simetrična, pa potencijalna funkcija postoji. Iz uvjeta imamo

$$\begin{aligned} \partial_x f(x, y, z) &= F_1(x, y, z) = e^{y+2z}, \\ \partial_y f(x, y, z) &= F_2(x, y, z) = xe^{y+2z}, \\ \partial_z f(x, y, z) &= F_3(x, y, z) = 2xe^{y+2z}. \end{aligned}$$

Sada opet redom integriramo jednadžbu po jednadžbu. U oba dosadašnja primjera kretali smo od varijable x (tako ćemo i sada), ali naravno da je redoslijed proizvoljan. Integriranjem prve jednadžbe po x dobivamo $f(x, y, z) = xe^{y+2z} + C(y, z)$. Deriviranjem dobivenog po y imamo

$$xe^{y+2z} = F_2(x, y, z) = \partial_y f(x, y, z) = xe^{y+2z} + \partial_y C(y, z),$$

odakle je $C(y, z) = C(z)$ (funkcija ne ovisi o varijabli y). Deriviranjem funkcije f po z imamo

$$2xe^{y+2z} = F_3(x, y, z) = \partial_z f(x, y, z) = 2xe^{y+2z} + C\ (z),$$

odakle konačno zaključujemo da je $C(z) = C$, dakle potencijalna funkcija je oblika $f(x, y, z) = xxe^{y+2z} + C$, $C \quad \mathsf{R}$.
Kao i prije, prvo provjeravamo postoji li potencijalna funkcija. Jacobijeva matrica

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 0 & 4y \end{bmatrix}$$

nije simetrična, pa polje F nije konzervativno i potencijalna funkcija ne postoji.

Ako je polje konzervativno, Teorem 10.7 pomaže nam da lakše riješimo zadatke s krivuljnim integralom. Koja god krivulja da nam je dana, ne moramo računati krivuljni integral nego samo evaluirati vrijednost (proizvoljne) potencijalne funkcije u rubovima i oduzeti dobivene vrijednosti. Također, ako je polje konzervativno, a krivulja zatvorena, odmah znamo da je krivuljni integral jednak nuli.
Ako polje nije konzervativno, imamo sljedeći rezultat.

Teorem 10.11 (Greenov teorem)**.** Neka je $D \quad \mathsf{R}^2$ ograničen skup, a C krivulja koja prezentira rub skupa D i orijentirana u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Neka je $F : D \to \mathsf{R}^2$ klase C^1. Tada vrijedi

$$\int_D (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dxdy = \int_C F_1 dx + F_2 dy.$$

Gornji teorem nam kaže da krivuljni integral po zatvorenoj krivulji uvijek možemo zamijeniti dvostrukim integralom neke druge funkcije po unutrašnjosti te domene. Ako je polje konzervativno, primijetite da je podintegralna funkcija na lijevoj strani jednaka nuli.

Pogledajmo ponovno Primjer 10.6. Polje u tom primjeru nije konzervativno jer je $\partial_x F_2 - \partial_y F_1 = -1$. To znači da ne možemo primijeniti Teorem 10.7, no možemo primijeniti Greenov teorem (Teorem 10.11). Integral po rubu trokuta mijenjamo integralom po unutrašnjosti trokuta D:

$$\int_C y dx = \int_D -1 dx dy = \frac{-1}{2}$$

(zadnja jednakost je dobivena računom površine trokuta). Ovaj način rješavanja je mnogo jednostavniji nego onim kojim smo prvo riješili Primjer 10.6.

Pogledajmo sada ponovno Primjer 10.5. Za polje $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ vrijedi

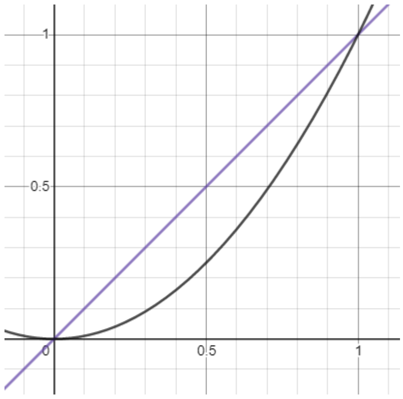
$$\partial_x F_2(x,y) - \partial_y F_1(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)} = 0.$$

Zato smo dojma da bi nam Greenov teorem rekao da je integral po svakoj zatvorenoj krivulji jednak nuli. No, u prethodnom rješavanju Primjer 10.5 dobili smo drugačiji rezultat. Odgovor je u tome što ovdje ne smijemo primijeniti Greenov teorem: naime, funkcija nije klase C^1 na jediničnom krugu – dapače, nije definirana u ishodištu. Ovaj primjer je primjer teorijskog značaja i ovakve situacije nam se neće pojavljivati u ostatku lekcije.

Primjer 10.12. (11.10.) Izračunajte $\int_C x^2 y dx + 2y^2 dy$ duž bridova kvadrata s vrhovima $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
Direktnom primjenom Greenovog teorema, mijenjamo krivuljni integral s integralom po kvadratu:

$$\int_C x^2 y dx + 2y^2 dy = \int_\Omega (\partial_x(2y^2) - \partial_y(x^2 y)) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 -x^2 dx dy = \int_0^1 -\frac{1}{3} dy = \frac{-1}{3}.$$

Primjer 10.13. (11.11.) Izračunajte $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ duž grafova funkcija $y = x^2$ i $y = x$ za x $[0,1]$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
Primjena Greenovog teorema ponovno je jednostavna. Domena Ω je malo kompliciranija nego u prošlom primjeru.



Računamo:

$$\begin{aligned}
&\int_C y^2dx + x^2dy = \int_\Omega (\partial_x x^2 - \partial_y y^2)dxdy = \int_\Omega (2x - 2y)dxdy \\
&= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2x - 2y)dydx = \int_0^1 (2x(x - x^2) + (x^2 - x^4))dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Primjer 10.14. (11.12., izmijenjen) Izračunajte $\int_C 5xdx + xydy$ duž kružnice $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
Pokažimo kako ovaj zadatak možemo riješiti na malo drugačiji način. Koristit ćemo zamjenu varijabli, budući da je nakon primjene Greenovog teorema domena integracije jedinični krug pomaknut iz ishodišta. Pokušajte ga riješiti sami bez korištenja teorema o zamjeni varijabli.
Neka je Ω krug dan formulom $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$. Primjena Greenovog teorema nam daje da trebamo izračunati

$$\int_C 5xdx + xydy = \int_\Omega (\partial_x xy - \partial_y 5x)dxdy = \int_\Omega y \; dxdy.$$

Da bismo primijenili polarne koordinate, bolje bi bilo da je domena jedinični krug oko ishodišta. Neka je K taj jedinični krug $x^2 + y^2 \leq 1$. Tada prvo koristimo zamjenu varijabli s funkcijom $\varphi : K \to \Omega$, $\varphi(x\,, y\,) = (x\, + 1, y\, + 1)$. Jakobijan tog preslikavanja je 1 (provjerite), pa imamo

$$\int_C 5xdx + xydy = \int_\Omega y \; dxdy = \int_K y\; + 1 \; dx \; dy\; .$$

Sada tek primjenjujemo polarne koordinate. Rubove integracije je lako odrediti jer se radi o jediničnom krugu. Imamo

$$\int_C 5xdx + xydy = \int_K y\; + 1 \; dx \; dy\; = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\theta + 1)r \; dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{2} \; d\theta = \pi.$$