

Vježbe

Energija, rad, snaga

$$dE = F \, ds$$

$$\frac{dE}{ds} = F$$

npr.

$$E_{pot} = mgh$$

$$\frac{dE}{dh} = mg - sila teže$$

kinetička energija

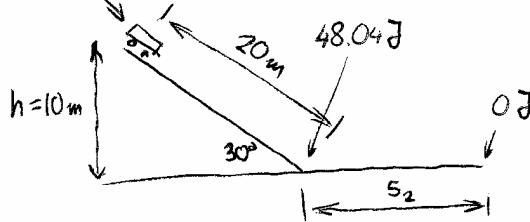
$$dE = F \, ds = ma \, ds = m \frac{dv}{dt} \, ds = m \frac{ds}{dt} \, dv = mv \, dv$$

$$\frac{dE}{dv} = mv \Rightarrow E = \frac{1}{2} mv^2$$

u gravitacijskom polju

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad E = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad \left(\frac{dE}{dr} = F \right)$$

- (28) Kolica (masa 1 kg) se nalaze na kosini nagiba 30° , udaljenca 20 m od podnožja kosine. Koef. trenja kolica s podlogom iznosi 0.3, na kosini i na vodoravnoj podlozi. Koliki će put kolica prevesti do zaustavljanja?



$$S = S_1 + S_2 = 36.013 \text{ m}$$

kinematičko rješenje:

$$S_1 = 20 \text{ m}$$

$$\alpha_1 = g \sin 30^\circ - \mu g \cos 30^\circ = 2.402 \text{ m/s}^2$$

$$v^2 = 2\alpha_1 S_1 = 96.08 \text{ m/s}^2$$

$$\text{na vodoravnoj podlozi} \quad \alpha_2 = -\mu g = -3 \text{ m/s}^2$$

$$S_2 = \frac{v^2}{2|\alpha_2|} = 16.013 \text{ m}$$

- (29) Izračunajte rad potreban da se masa 1 kg podigne sa površine Zemlje na visinu

- a) 100 m
- b) 80 km
- c) 10 000 km

$$\text{uz } W = \Delta E_{pot} = mg \Delta h$$

dinamičko rješenje:

$$E_i = mgh = 1 \cdot 10 \cdot 10 = 100 \text{ J}$$

$$F_{TR} = \mu g \cos \alpha = 2.598 \text{ N}, \quad S_1 = 20 \text{ m}$$

$$\Delta E = F_{TR} \Delta S = 51.96 \text{ J} \Rightarrow E_i = 48.04 \text{ J}$$

$$F_{TR} = 3 \text{ N}$$

$$E_i = F_2 \cos \alpha_2 \Rightarrow \Delta S_2 = \frac{48.04 \text{ J}}{3 \text{ N}} = 16.013 \text{ m}$$

- a) $W = 1000 \text{ J}$ (✓)
- b) $W = 800 000 \text{ J}$ (≈)!
- c) $W = 10^8 \text{ J}$ (X)

uz $g \neq \text{konst}$

$$\Delta E = E(R+h) - E(R) = -G m m_2 \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right)$$

$$= -G m m_2 \frac{R-R-h}{R(R+h)}$$

$$= + \frac{G m m_2}{R^2} \cdot \frac{\frac{Rh}{R+h}}{R(R+h)} = mgh \left(\frac{R}{R+h} \right)$$

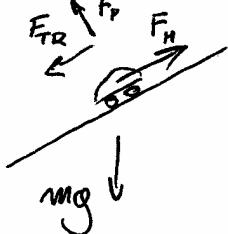
$$\text{a) } W = 1000 \text{ J} \cdot \frac{6371 \text{ km}}{6371.1 \text{ km}} = 999.9843 \text{ J}$$

$$\text{b) } W = 800 000 \cdot \frac{6371}{6451} = 790 079 \text{ J}$$

$$\text{c) } W = 10^8 \cdot \frac{6371}{16371} = 3.89 \cdot 10^7 \text{ J}$$

(30)

Kojom se maksimalnom brzinom kreće automobil mase 900 kg na uzbrdici nagiba 16° , ako je koef. trenja kotrljanja kotača s podlogom 0.08, a snaga motora 60 kW? Otpor zraka zanemarite. Navedite sve sile koje djeluju na automobil.



$$\begin{aligned} F_{\text{MOTORA}} &= F_{TR} + F_{\text{KOSINE}} \\ &= \mu mg \cos \alpha + mg \sin \alpha \\ &= 692.1 \text{ N} + 2480.7 \text{ N} = 3172.8 \text{ N} \end{aligned}$$

$$60000 = 3172.8 \cdot v \quad v = 18.31 \text{ m/s} = 68.1 \text{ km/h}$$

(31)

Tijelo mase 1.2 kg padne na tlo s visine 1.55 m. Brzina udara o tlo iznosi 5.1 m/s. Odredite postotak energije utrošen na savlađavanje sile otpora zraka. Koliki je iznos te sile?

Dinamički:

$$E_0 = mgh = 18.6 \text{ J}$$

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 = 15.606 \text{ J}$$

$$\Delta E = 2.994 \text{ J}$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 0.161 = 16.1\%$$

Kinematicki: $v^2 = 2as \Rightarrow a = \frac{v^2}{2s} = 8.39 \text{ m/s}^2$

$$F = mg - F_o$$

$$a = g - a_o \Rightarrow a_o = g - a = 1.61 \text{ m/s}^2$$

$$F_o = 1.932 \text{ N} (\text{m} \cdot a_o)$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{a_o}{g} = 0.161 = 16.1\%$$

Harmonijski oscilator

njihalo:

$$ma = -mg \sin \theta, \sin \theta \approx \frac{x}{l}$$

$$a = -\frac{g}{l}x$$

- Njihalo
- Utieg na opruzi
- Torziona vaga
- Brod na vodi
- LC strujni krug
- Izvor i detektor valova

utieg na opruzi:

$$ma = -kx$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

općenito $a = -\omega^2 x$

$$x = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

A - amplituda
 ω - kutna frekvencija
 φ - fazni kut

$$T = 2\pi \cdot \frac{1}{\omega}, v_{\max} = A\omega$$

upr.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

(32) Na oprugu konstante elastičnosti 450 N/m objesimo utieg mase 1.3 kg. Odredite

a) Period titranja $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.33771 \text{ s}$

b) Amplitudu titranja za maksimalnu brzinu 40 cm/s

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = 2.15 \text{ cm}$$

c) Energije titranja za (b)

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2 = 0.104 \text{ J}$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 0.104 \text{ J}$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

e) Period titranja ako masu povećamo 7.5%

$$m' = 1.3 \cdot 1.075 = 1.3975 \text{ kg}$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{m'}{k}} = 0.35015 \text{ s}$$

d) Maksimalno ubrzanje za (b)

$$a_m = \omega^2 A = 7.4423 \text{ m/s}^2$$

- (33) Njihalo duljine 1.2m otklonimo 8° iz položaja ravnoteže; pustimo bez početne brzine. Odredite brzinu kroz ravnotežni položaj:
- a) Iz jednadžbi harmonijskog oscilatora

$$V_{\max} = A\omega, \quad \omega^2 = \frac{g}{l} \quad \omega = 2.88675 \text{ rad/s}$$

$$A = l \sin \theta = 0.167 \text{ m}$$

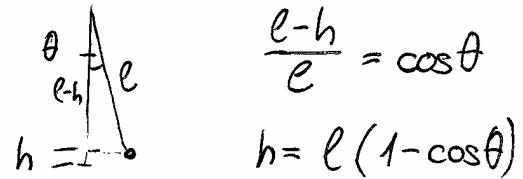
$$V_{\max} = 0.48209 \text{ m/s}$$

- b) Iz očuvanja energije

$$\frac{1}{2} m V_{\max}^2 = mgh \quad h = 0.0116783 \text{ m}$$

$$V_{\max}^2 = 2gh = 0.233566$$

$$V_{\max} = 0.48329 \text{ m/s}$$



- c) Odredite relativnu pogrešku ($\nu \%$)

$$\delta = \frac{V_b - V_a}{V_b} = 1 - \frac{V_a}{V_b} = 1 - \frac{0.48209}{0.48329} = 0.002483 \quad (= 0.2483\%)$$

- (34) Uteg mase 0.6 kg titra na opruzi tako da je energija titranja 0.36 J uz amplitudu 2.4 cm. Odredite period titranja; brzinu utega u trenutku kada otklon iznosi 60% amplitude

$$E = \frac{1}{2} m V_{\max}^2$$

$$0.36 = \frac{1}{2} \cdot 0.6 \cdot V_{\max}^2$$

$$V_{\max} = \sqrt{1.2} = 1.095445 \text{ m/s}$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

$$0.36 = \frac{1}{2} k \cdot 0.024^2$$

$$k = 1250 \text{ N/m}$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$0.36 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k \cdot (0.6A)^2$$

$$0.36 - 0.1296 = \frac{1}{2} \cdot 0.6 \cdot v^2 \rightarrow v = 0.87636 \text{ m/s}$$

- (35) Odredite masu utega matem. njihala ako je period njihanja 1.19 s, a maksimalno ubrzanje 0.33 m/s^2 pri energiji njihanja 0.0012 J.
- $$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = 5.28 \text{ rad/s}$$

$$\omega^2 A = a_m, \quad A = 0.0184 \text{ m}$$

$$\omega A = V_m \quad V_m = 0.06251 \text{ m/s}$$

$$E = \frac{1}{2} m V_m^2 \Rightarrow m = \frac{2E}{V_m^2} = \underline{\underline{0.614 \text{ kg}}}$$

Vrtnja krutog tijela



Translacija	Rotacija
s	φ kut
v	ω kutna brzina
a	α kutno ubrzanje
t, E, P	t, E, P vrijeđe, energija, snage
m	I moment tromosti
F	M moment sile (τ)
P	L moment impulsa, zamah

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow E = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$F = m \cdot a \rightarrow M = I\alpha$$

$$s = \frac{\alpha}{2}t^2 \rightarrow \varphi = \frac{\alpha}{2}t^2$$

$$v^2 = 2as \rightarrow \omega^2 = 2\alpha\varphi$$

$$P = F \cdot v \rightarrow P = M\omega$$

Moment tromosti

- štop kroz težiste $I_o = \frac{1}{12}m\ell^2$

- kugla kroz srediste $I_o = \frac{2}{5}mR^2$

- štop kroz kraj $I = \frac{1}{3}mC^2$

poučak o paralelnim osima $I = I_o + md^2$

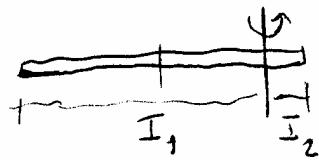
- (36) Homogeni Štop duljine 90 cm ima masu 2 kg. Odredite moment tromosti s obzirom na os vrtnje:

- a) kroz težiste
- b) kroz kraj štopa
- c) kroz točku na štopu udaljenu 10cm od kraja

$$a) I = \frac{1}{12}m\ell^2 = 0.135 \text{ kg m}^2$$

$$b) I = \frac{1}{3}m\ell^2 = 0.54 \text{ kg m}^2$$

$$c) I = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}m_1\ell_1^2 + \frac{1}{3}m_2\ell_2^2 = 0.379 \text{ kg m}^2 + 0.000740 \text{ kg m}^2 = 0.380 \text{ kg m}^2$$



$$\ell_1 = 80 \text{ cm}$$

$$\ell_2 = 10 \text{ cm}$$

$$m_2 = 0.22 \text{ kg}$$

$$m_1 = 1.77 \text{ kg}$$

$$I_o + md^2, d = 0.35 \text{ m}$$

$$0.135 + 0.245 = 0.38 \text{ kg m}^2$$

- (37) Štop mase 0.48 kg duljine 90cm rotira oko osi kroz težiste početnom kutnom brzinom od 7.5 rad/s. Rotacija se jednoliko usporava, tako da se štop zastavi nakon 15 sekundi. Odredite moment sile koji je djelovao na štop, i broj okretaja štopa do zastavljanja.

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{-7.5 \text{ rad/s}}{15 \text{ s}} = -0.5 \text{ rad/s}^2$$

$$I = \frac{1}{12} m l^2 = \frac{0.48}{12} \cdot 0.9^2 = 0.0324 \text{ kg m}^2$$

$$M = I\alpha = 0.0162 \text{ Nm}$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\alpha}{2} t^2 = 112.5 - 56.25 = 56.25 \text{ rad} = 8.952 \text{ okr.}$$

- (38) Period vrtnje Zemlje iznosio je 23 sata pred 60 milijuna godina.

Odredite kinetičku energiju Zemlje tada i danas.

Koliki je prosječni moment sile zaustavljao rotaciju?

Kolika je snaga te sile?

$$R_z = 6371 \text{ km}, m = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{5} m v_o^2$$

$$E_{\text{rot}}(23h) = 2.8047588 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

$$E_{\text{rot}}(24h) = 2.5758983 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

$$\Delta E = 2.2886 \cdot 10^{28} \text{ J}$$

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = 1.2095 \cdot 10^{13} \text{ W}$$

$$\alpha = \frac{20.144 \text{ m/s}}{1.205495 \cdot 10^{22} \text{ m} \cdot \text{s}} = 1.6710146 \cdot 10^{-21} \text{ rad/s}^2$$

$$M = I \cdot \alpha = 1.6278 \cdot 10^{17} \text{ Nm}$$

$$v_o = \frac{2R_z \pi}{T} - \text{obodna brzina}$$

$$v_o = \frac{11119.5}{\text{br. sati}}$$

$$v_o(24h) = 463.3122 \text{ m/s}$$

$$v_o(23h) = 483.4562 \text{ m/s}$$

$$\Delta t = 1.89216 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2 = 9.7415 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2$$

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{v_o(23h) - v_o(24h)}{R \Delta t}$$

- (39) Odredite masu i duljinu štopa ako znamo da je pri rotaciji oko težista obodna brzina 0.9 m/s za energiju rotacije 0.324 J. Linjska gustoća štopa je 1.3 kg/m.

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m l^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \omega^2 = \frac{1}{6} m v^2 \Rightarrow m = \frac{6E}{v^2} = 2.4 \text{ kg}$$

$$l = \frac{m}{\lambda} = 1.846 \text{ m}$$

Vježbe 18.1.2021.

Očuvanje impulsa, $\vec{p} = m\vec{v}$
 Očuvanje energije, $E = \frac{1}{2}mv^2$ → primjena na sudara

centralni \times elastični
 necentralni \times neelastični

- 40) Kugla mase m_1 i brzine v_1 sudara se centralno i elastično s kuglom mase m_2 koja miroje. Izrazite brzine obje kugle poslije sudara (u_1, u_2) pomoću m_1, m_2 i v_1 . ($v_2=0$)

očuvanje impulsa

$$m_1 v_1 + 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

očuvanje energije

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2$$

specijalni slučajevi:

$$m_1 = m_2 \rightarrow v_1 = 0, u_2 = v_1$$

$$m_1 \ll m_2 \rightarrow v_1 = -u_1, u_2 = 0$$

$$m_1 \gg m_2 \rightarrow v_1 = u_1, u_2 = 2v_1$$

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2 u_2$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2$$

$$v_1 + u_1 = u_2$$

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 v_1 + m_2 u_1$$

$$\Rightarrow u_1 = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

$$u_2 = v_1 + v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = v_1 \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

- 41) Kugla mase 0.12 kg udara centralno i elastično u kuglu mase m_2 koja miroje. Brzina prve kugle je 0.8 m/s prije sudara; -0.6 m/s poslije sudara. (suprotni smjer!) Odredite masu druge kugle i brzinu poslije sudara.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 = 0.8 \text{ m/s} \\ u_1 = -0.6 \text{ m/s} \end{array} \right\} \boxed{u_2 = 0.2 \text{ m/s}}$$

$$\rightarrow u_2 = v_1 \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

$$0.2 = 0.8 \cdot \frac{0.24}{0.12 + m_2}$$

$$0.024 + 0.2m_2 = 0.192$$

$$\boxed{m_2 = 0.84 \text{ kg}}$$

provjera:

$$u_1 = v_1 \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0.8 \cdot \frac{-0.72}{0.96} = -0.6$$

(42)

Kugla mase 0.51 kg upara centralno i elastično u drugu kuglu koja je dotad mirovala. Pri sudaru se 72.5% impulsa prenijelo na drugu kuglu. Odredite masu druge kugle. Koliki se postotak kinetičke energije prenio na drugu kuglu?

$$p = m_1 v_1 = 0.51 v_1$$

$$\Delta p = p_2' = 0.725 p_1 = 0.725 \cdot 0.51 v_1 = m_2 v_2 \quad v_1 + v_2 = v_2$$

$$p_1' = 0.275 p_1 = 0.275 \cdot 0.51 v_1 = 0.51 v_1$$

$$\Rightarrow v_1 + \frac{0.14025}{0.51} v_1 = \frac{0.36975 v_1}{m_2} \quad / : v_1$$

$$1 + 0.275 = \frac{0.36975}{m_2} \quad m_2 = 0.29 \text{ kg}$$

$$\frac{E_2'}{E_1} = \frac{m_2 v_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{0.29 \cdot (v_1 \cdot 1.275)^2}{0.51 v_1^2} = 0.924375 = 92.4375\%$$

(43)

Kuglica mase 450 g upara se brzinom 2 m/s centralno i elastično s dotad mirnom kuglicom mase 1.2 kg . Odredite koliku je količinu gibanja (impuls) prva kuglica prenijela na drugu u sudaru. Koliki je postotak kinetičke energije ostao prvoj kuglici?

$$\begin{matrix} m_1 \\ v_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} m_2 \\ \circ \end{matrix}$$

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 0.9 \text{ J}$$

$$E_1' = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 = 0.186 \text{ J}$$

$$\frac{E_1'}{E_1} = 0.2066 = 20.66\%$$

$$u_1 = v_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 2 \cdot \frac{-0.75}{1.65} = -0.909 \text{ m/s}$$

$$p_1' = m_1 u_1 = -0.409 \text{ kg m/s}$$

$$p_1 = m_1 v_1 = 0.9 \text{ kg m/s}$$

$$\Rightarrow \Delta p = p_1 - p_1' = 1.309 \text{ kg m/s}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= v_1 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{4 \cdot 0.45}{1.65} \end{aligned}$$

$$u_2 = 1.09 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} p_2' &= m_2 u_2 = \Delta p \\ &= 1.309 \text{ kg m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2' &= \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \\ &= 0.714 \text{ J} \end{aligned}$$

Vježbe 24.1.2022.

Uzgon, staticki tlak, gustoča fluida, brzina istjecanja

- (44) Odredite gustoču i volumen tijela koje u zraku ima težinu 400 N , a u vodi 260 N . Gustoča vode je 1000 kg/m^3 , a gustoča zraka je zanemariva.

$$mg = 400 \text{ N} \Rightarrow m = 40 \text{ kg}$$

$$mg - F_o = 260 \text{ N} \Rightarrow F_o = 140 \text{ N} = \rho_{VODE} V_{TIJELA} g \quad (\text{Archimedov zakon})$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{40}{0.014} = 2857 \text{ kg/m}^3$$

$$V_{TIJELA} = \frac{140}{10000} = 0.014 \text{ m}^3$$

- (45) Kolika je ukupna sila na tonioca u moru i koji je smjer te sile, ako je masa tonioca 70 kg , a obujam 65 dm^3 . Gustoča morske vode je 1.03 g/cm^3

$$m = 70 \text{ kg} \Rightarrow F_r = 700 \text{ N}$$

$$F_o = \rho_{VODE} V \cdot g = 1030 \cdot 0.065 \cdot 10 = 669.5 \text{ N}$$

$$F = F_r - F_o = 30.5 \text{ N}$$

prema dolje

- (46) Na 1 kg drveta gustoće 850 kg/m^3 pričvršćen je olovni uteg. Kolika najveća masa utega da dobiveni sklop ne potone u morskoj vodi gustoće 1030 kg/m^3 ? Gustoča olova je 11340 kg/m^3 .

$$m_D = 1 \text{ kg}$$

$$V_D = \frac{m}{\rho_D} = \frac{1}{850} \text{ m}^3$$

$$V_o = \frac{m_o}{11340}$$

$$1030 = \frac{1 + m_o}{\frac{1}{850} + \frac{m_o}{11340}}$$

$$1.21176 + m_o \cdot 0.09083 = 1 + m_o$$

$$0.90917 m_o = 0.21176$$

$$m_o = 0.23292 \text{ kg}$$

- (47) Gustoča kisika pri laboratorijskim uvjetima iznosi 1.28 kg/m^3 .
4/9.2.2010. Pri istim uvjetima, gustoča helija je 0.16 kg/m^3 , a argona 1.6 kg/m^3 . Odredite gustoču mješavine 50% kisika, 25% helija, 25% argona (volumni %)

$$1 \text{ m}^3 = \left. \begin{array}{l} 0.5 \text{ m}^3 O_2 \\ 0.25 \text{ m}^3 He \\ 0.25 \text{ m}^3 Ar \end{array} \right\} - 0.64 \text{ kg} \quad \left. \begin{array}{l} 0.04 \text{ kg} \\ 0.4 \text{ kg} \end{array} \right\} m = 1.08 \text{ kg} \Rightarrow \rho = 1.08 \text{ kg/m}^3$$

- (48) U nepoznatoj tekućini tlak raste 7200 Pa po metru dubine. Odredite gustoču tekućine i brzinu istjecanja na 3 m dubine.

$$\Delta F = \Delta mg$$

$$\Delta p = \rho g \Delta h$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta h} = \rho g = 7200 \frac{\text{Pa}}{\text{m}} \Rightarrow \rho = 720 \text{ kg/m}^3$$

$$\frac{1}{2} \rho v^2 = \rho gh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{160} = 7.746 \text{ m/s}$$