POGLAVLJE 4

Diskretni slučajni vektori

Prvi dio

ZADATAK 4.1. U kutiji se nalazi pet kuglica označenih brojevima od 1 do 5. Na slučajan način izvlačimo dvije različite kuglice i vraćamo ih natrag u kutiju. Pokus ponavljamo ukupno dva puta. S X označimo broj izvučenih kuglica s brojem 1, a s Y broj izvučenih kuglica s brojem 2.

(a) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y), te marginalne razdiobe od X i Y.

(b) Odredite razdiobu od Y uvjetno na $X = 0$. Prepoznajete li neku od standardnih razdioba? Je li rezultat intuitivno jasan?

(c) Odredite $\mathbb{P}(X + Y \leqslant 2)$.

ZADATAK 4.2. Ako su $X \sim G(p_1)$ i $Y \sim G(p_2)$ nezavisne, odredite $\mathbb{P}(X > Y)$ i $\mathbb{P}(X = Y)$.

ZADATAK 4.3. Neka su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji. Pokažite da su oni nezavisni akko su indikatori $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$ nezavisne slučajne varijable. *Uputa:* Koristite tvrdnju da nezavisnost događaja $A_1, \ldots, A_n$ povlači nezavisnost događaja $B_1, \ldots, B_n$ pri čemu je $B_i = A_i$ ili A_i^c, za sve i.

ZADATAK 4.4.
(i) Broj tiskarskih pogrešaka na stranici ima Poissonovu razdiobu s parametrom λ, a brojevi na različitim stranicama su nezavisni. Koja je vjerojatnost da će se druga tiskarska pogreška dogoditi na k-toj stranici?

(ii) Lektor pregledava jednu stranicu tražeći tiskarske pogreške. Svaku pogrešku uoči s vjerojatnošću 1/2, i to nezavisno od drugih grešaka. Ako je broj uočenih grešaka točno 10, odredite distribuciju broja grešaka koje nisu primijećene.

ZADATAK 4.5. Neka su X i Y nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima λ i μ redom. Dokažite da je distribucija slučajne varijable X, uvjetno na događaj $X + Y = n$, binomna s parametrima n i $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

ZADATAK 4.6. Ako su $X, Y \sim \mathrm{G}_0(p)$ nezavisne, pokažite da za sve $m \in \mathbb{N}_0$, uvjetno na $X + Y = m$, X ima uniformnu razdiobu na skupu $\{0, 1, \ldots, m\}$. Je li rezultat intuitivno jasan? Što predstavlja $X + Y$?

ZADATAK 4.7. Ako su X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru i $m \in \mathbb{N}$, te vrijedi $\mathbb{E}[|X|^m], \mathbb{E}[|Y|^m] < \infty$, tada vrijedi i $\mathbb{E}[|X + Y|^m] < \infty$; na primjer, ako je $\mathrm{Var}(X), \mathrm{Var}(Y) < \infty$, nužno je i $\mathrm{Var}(X + Y) < \infty$.

ZADATAK 4.8. Ako su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\Big[(X-Y)^2\Big] = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y])^2 \ ,$$

pri čemu pretpostavljamo da sva očekivanja postoje te da su varijance konačne.

ZADATAK 4.9. U nizu od n nezavisnih pokusa, vjerojatnost uspjeha u i-tom pokusu je p_i.

(a) Ako je X ukupan broj uspjeha, odredite $\mathbb{E}[X]$ i $\mathrm{Var}(X)$.

(b) Ako je $\overline{p} := \frac{1}{n}\sum_i p_i$, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = n\overline{p}\,, \quad \mathrm{Var}(X) = n\overline{p}(1-\overline{p}) - \sum_i (p_i - \overline{p})^2\,.$$

Ako fiksiramo $\overline{p} \in (0,1)$, za koji izbor p_i-eva je varijanca najveća?

ZADATAK 4.10 (**Rekordi**). n ljudi različitih visina na slučajan način stane u red. Za $k = 1,\dots,n$, neka $X_k \in \{1,2,\dots,k\}$ označava koje je po veličini k-ta osoba među prvih k ljudi; npr. $X_k = 2$ znači da postoji točno jedna osoba prije k-te osobe koja je viša od nje.

(a) Pokažite da diskretni slučajni vektor $(X_1,\dots,X_n)$ ima uniformnu distribuciju na skupu $S_n = \prod_{k=1}^n \{1,\dots,k\}$, tj. da je

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{1}{n!}\,,$$

za sve $(x_1,\dots,x_n) \in S_n$.

(b) Odredite distribucije slučajnih varijabli $X_1,\dots,X_n$ te pokažite da su one nezavisne.

(c) Kažemo da je osoba *rekordno visoka* ako je viša od svih ljudi koji se nalaze prije nje u redu. Neka je A_i događaj da je i-ta osoba u redu rekordno visoka. Pokažite da su događaji $A_1,\dots,A_n$ nezavisni, te odredite očekivanje i varijancu broj rekordno visokih osoba.

ZADATAK 4.11. (a) Pretpostavimo da u kutiji imamo $m+n$ kuglica. Prvo slučajno odaberemo podskup od m kuglica i obojamo ih u bijelo, a ostalih n kuglica obojimo u crno, te nakon toga slučajno izvučemo k kuglica iz kutije. Ako je X broj izvučenih bijelih kuglica, odredite distribuciju od X.

(b) (*Simetrija* HG *razdiobe*) Pokažite da su razdiobe $\mathrm{HG}(m,n,k)$ i $\mathrm{HG}(k, m+n-k, m)$ iste. *Uputa:* Iskoristite (a).

(c) Ako je $X_n \sim \mathrm{HG}(m_n, n_n, k)$ pri čemu $m_n + n_n \to \infty$, ali tako da za neki $p \in [0,1]$ vrijedi

$$p_n := \frac{m_n}{m_n + n_n} \to p\,,$$

pokažite da za $X \sim \mathrm{B}(k,p)$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \mathbb{P}(X = i)\,, \quad \forall i = 0,\dots,k\,.$$

Možete li intuitivno objasniti ovaj rezultat?

Rješenja zadataka: **Zad. 4.1** (a) npr. $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{9}{100}, \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{9}{50}$, te $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix} \sim Y$, (b) $\mathrm{B}(2, \frac{1}{2})$, (c) $\frac{87}{100}$; **Zad. 4.2** $\frac{p_2 q_1}{1-q_1 q_2}, \frac{p_1 p_2}{1-q_1 q_2}$; **Zad. 4.4** (a) $e^{-\lambda(k-1)}\Big[2- e^{-\lambda}(2+\lambda) + \lambda(k-1)\Big]$, (b) $\mathrm{P}(\lambda/2)$; **Zad. 4.10** (b) X_k ima uniformnu razdiobu na $\{1, \ldots, k\}$, (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}$.