POGLAVLJE 3

Diskretne slučajne varijable

ZADATAK 3.1. Slučajna varijabla X ima razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ c & 2c & 2c & 3c & c^2 & 2c^2 & 7c^2+c \end{pmatrix}.$$

(i) Odredite konstantu $c \in \mathbb{R}$.

(ii) Izračunajte $\mathbb{P}(2 \leqslant X \leqslant 5)$.

ZADATAK 3.2. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu prirodnih brojeva i vrijedi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}$ za $k \in \mathbb{N}$. Odredite razdiobu slučajne varijable $Y = \sin\left(\frac{\pi X}{2}\right)$.

ZADATAK 3.3. Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathbb{N}$ s distribucijom

$$\mathbb{P}(X = k) = ck^{-\alpha}\,,\ k = 1, 2, \dots$$

za parametre $c, \alpha \in \mathbb{R}$.

(i) Odredite moguće kombinacije parametara c i α.

(ii) Odredite za koje vrijednosti parametra α je $\mathbb{E}[X] < \infty$.

ZADATAK 3.4. Bacimo n jednakih nesimetričnih novčića koji pokazuje glavu s vjerojatnošću p. Sve novčiće koji su pali na glavu bacimo još jednom. Odredite distribuciju ukupnog broja glava u drugom bacanju. Kako izgleda njena vjerojatnosna funkcija mase?

ZADATAK 3.5. Kladite se na igru u kojoj je vjerojatnost dobitka $0 < p \leqslant 1/2$. Ako dobijete u igri, dobitak je jednak iznosu uloga (ako izgubite, izgubili ste ulog). Prva oklada je 1 kn; ako dobijete, prestajete igrati. Ako izgubite, kladite se za 2 kn, itd. Vaša n-ta oklada iznosi 2^{n-1} kn. Čim dobijete u nekoj igri odmah odustajete od daljnje igre.

(i) Pokažite da je Vaš ukupni dobitak 1 kn s vjerojatnošću 1.

(ii) Nađite očekivani iznos oklade kojom dobivate.

Nadalje, pretpostavite da je najveća dopuštena oklada jednaka 2^L kn, $L \in \mathbb{N}$.

(iii) Koliki je očekivani dobitak kada prestajete s igrom?

ZADATAK 3.6. Marko svaki dan kasni na nastavu s vjerojatnošću 0.2.

(i) Kolika je vjerojatnost da je u jednom tjednu (tj. u 5 radnih dana) zakasnio najviše jednom?

(ii) Za koji najveći broj dana u tjednu možemo biti barem 90% sigurni da je barem toliko puta došao na vrijeme?

Zadatak 3.7. Ako U ima diskretnu uniformnu razdiobu na $\{1, 2, \ldots, n\}$, tj. $\mathbb{P}(U = i) = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, odredite $\mathbb{E}[U]$ i $\mathrm{Var}(U)$. (*Uputa:* $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.)

Zadatak 3.8. U neko skladište dolazi 1000 porculanskih vaza. Vjerojatnost da se neka razbije tijekom transporta je 0.002. Neovisno o tome, neke vaze razbiju se i unutar skladišta, s vjerojatnošću 0.0015 (pritom je moguće da je neka vaza razbijena i u transportu i u skladištu). Koristeći zakon rijetkih događaja dajte procjenu vjerojatnosti da je ukupan broj razbijenih vaza veći od 3.

Zadatak 3.9. U grupi od n ljudi,

(a) Koliki je očekivani broj različith dana u godini (od 365 dana) u kojima barem jedna osoba ima rođendan?
(b) Koliki je očekivani broj parova ljudi koji imaju rođendan na isti dan.

Zadatak 3.10. Ako su $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ proizvoljni događaji, dokažite formulu-uključivanja isključivanja koristeći indikatorske funkcije.

Zadatak 3.11. (a) Ako je X slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$. Pokažite da X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ (tj. $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$) akko za svaku funkciju $g : \{0, 1, \ldots\} \to [0, \infty)$ vrijedi

$$\mathbb{E}[Xg(X)] = \lambda \mathbb{E}[g(X + 1)] .$$

Napomena: Ovaj identitet je baza tzv. *Stein-Chenove* metode za dokazivanje konvergencije prema Poissonovoj razdiobi, pri čemu se usput dobiju jako precizne ograde na brzinu konvergencije. Glavna ideja metode je u tome da slučajna varijabla X *približno* ima $\mathrm{P}(\lambda)$ razdiobu ako gornji identitet *približno* vrijedi za dovoljno veliku klasu funkcija g.

(b) Koristeći (a) dio, odredite $\mathbb{E}[X^3]$ za $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Zadatak 3.12. Simetrična kocka ima četiri strane obojane žutom bojom te dvije obojane plavom bojom. Odredite očekivani broj bacanja kocke do pojave obje boje.

Zadatak 3.13. (a) Neka $T \sim \mathrm{G}_0(p)$ za $p > 0$, tj. $\mathbb{P}(T = k) = q^k p$, $k \in \mathbb{N}_0$, za $q := 1 - p$. Pokažite da T ima *svojstvo zaboravljivosti*: za svaki $m \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(T - m \geqslant k \mid T \geqslant m) = \mathbb{P}(T \geqslant k) , \quad \forall k \geqslant 0 ,$$

i to na dva načina: (i) direktno, po definiciji uvjetne vjerojatnosti, te (ii) koristeći interpretaciju geometrijske razdiobe kao model za broj neuspjeha prije prvog uspjeha u nizu nezavisnih pokusa.

(b) Pokažite da je $\mathrm{G}_0(p)$ jedina razdioba na $\mathbb{N}_0$ koja ima gornje svojstvo zaboravljivosti.

Zadatak 3.14. Bacamo simetričan novčić.

(a) Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put ne dobijemo uzorak PG?

(b) Koliki je očekivani broj bacanja dok prvi put ne dobijemo uzorak PP?

Zadatak 3.15. U zdjeli se nalazi n špageta. U svakom koraku, dok god je to moguće, odaberemo nasumičan par krajeva špageta te spojimo odabrane krajeve. Ako odabrani krajevi pripadaju istom špagetu, tada spajanjem nastaje petlja. Koji je očekivani broj petlji na kraju ovog procesa? *Uputa:* Koristite indikatore.

Zadatak 3.16. Neka je $G = (V, E)$ konačan graf. Za $W \subseteq V$ i $e \in E$ definiramo

$$I_W(e) = \begin{cases} 1\,, & \text{ako } e \text{ povezuje } W \text{ i } W^c, \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$ ukupan broj bridova koji povezuju W i W^c, pokažite da nužno postoji $W \subseteq V$ takav da je $N_W \geqslant |E|/2$.

Uputa: Slučajno obojajte vrhove u dvije boje te gledaje podskup vrhova iste boje. Iskoristite činjenicu da za slučajnu varijablu X, $\mathbb{E}[X] \geqslant c$ povlači da je nužno $\mathbb{P}(X \geqslant c) > 0$.

Zadatak 3.17. U kutiji imamo m_1 bijelih i m_2 crvenih kuglica. Slučajno odaberemo $n \leqslant m_1 + m_2 =: N$ kuglica te s X označimo ukupan broj izvučenih bijelih kuglica; X dakle ima hipergeometrijsku razdiobu.

(a) Pokažite da je

$$\mathbb{E}\left[\binom{X}{2}\right] = \binom{m_1}{2} \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}\,.$$

Uputa: Koristite indikatore.

(b) Koristeći (a) dio pokažite (mukotrpnim računom) da je

$$\mathrm{Var}(X) = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}\,,$$

gdje je $p := \frac{m_1}{m_1+m_2}, q := 1-p$. Kakva je dakle varijanca u odnosu na $\mathrm{B}(n,p)$ razdiobu?

Zadatak 3.18. Neka je π uniformno slučajno odabrana permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$. U ovisnosti o n odredite očekivani broj ciklusa u π.

Rješenja zadataka: **Zad. 3.1** $\frac{1}{10}, \frac{71}{100}$; **Zad. 3.2** $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{pmatrix}$; **Zad. 3.3** (i) $\alpha > 1, c = (\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-\alpha})^{-1}$, (ii) $\alpha > 2$; **Zad. 3.4** $\mathrm{B}(n, p^2)$; **Zad. 3.5** (ii) ∞, (iii) $1 - (2q)^{L+1}$; **Zad. 3.6** (i) 0.73728, (ii) 3; **Zad. 3.7** $\mathbb{E}[U] = \frac{n+1}{2}$, $\mathrm{Var}(U) = \frac{n^2-1}{12}$; **Zad. 3.8** ≈ 0.4627; **Zad. 3.9** (a) $365(1 - (364/365)^n)$, (b) $\binom{n}{2}/365$; **Zad. 3.11** $\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$; **Zad. 3.12** $\frac{7}{2}$; **Zad. 3.14** (a) 4, (b) 6; **Zad. 3.15** $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \cdots + \frac{1}{3} + 1$; **Zad. 3.18** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.