

POGLAVLJE 2

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

ZADATAK 2.1. Špil sadži n karata označenih prirodnim brojevima od 1 do n . Karte se izvlače slučajnim redosljedom, jedna po jedna. Neka je $1 \leq k \leq n$ fiksna. Ako znamo da je k -tom izvlačenju izvučen dotad najveći broj, koja je vjerojatnost da je on n ?

ZADATAK 2.2. Bacamo 5 simetričnih novčića. Nakon prvog bacanja bacamo ponovno one novčiće koji su u prvom bacanju pokazali glavu. Kolika je vjerojatnost da će nakon drugog bacanja ukupno (u oba bacanja) pasti barem 3 pisma?

ZADATAK 2.3. Dva igrača pikada, A i B , naizmjenice bacaju strelice dok netko ne pogodi u centar. Poznato je da su ishodi različitih bacanja nezavisni te da pri svakom bacanju A ima vjerojatnost p_A , dok B ima vjerojatnost p_B da pogodi u centar. Ako A kreće prvi, odredite vjerojatnost da će on prvi pogoditi u centar. *Uputa:* Uvjetujte na rezultat prvog bacanja.

ZADATAK 2.4. Tri novčića C_1 , C_2 i C_3 leže na stolu. Vjerojatnosti da na njima padne pismo su redom $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ i 1. Na slučajan način uzmemo jedan novčić, bacimo ga i uočimo da je palo pismo. Odredite vjerojatnosti da smo uzeli novčić C_i , $i = 1, 2, 3$.

ZADATAK 2.5. Kutija sadži n kuglica nepoznatih boja. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednako vjerojatne. Ako je bez vraćanja izvučena kuglica bijele boje, kolika je vjerojatnost da će i sljedeća izvučena kuglica biti bijele boje?

ZADATAK 2.6. Bacamo slučajan broj N kocaka. Neka je A_i događaj da je $N = i$ te pretpostavimo da je $\mathbb{P}(A_i) = 2^{-i}$ za sve $i \geq 1$. Neka je S zbroj dobivenih brojeva. Odredite vjerojatnost da je:

- (i) $N = 2$ ako znamo da je $S = 4$;
- (ii) $S = 4$ ako znamo da je N paran.

ZADATAK 2.7. Imamo 5 novčića, od kojih dva na obje strane imaju pismo, jedan na obje strane ima glavu, a preostala dva su simetrična. Zatvorimo oči, odaberemo nasumičan novčić i bacimo ga.

- (i) Koja je vjerojatnost da se na donjoj strani nalazi pismo?
- (ii) Otvorimo oči i vidimo da novčić pokazuje pismo; koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?
- (iii) Ponovo zatvorimo oči i bacimo novčić. Koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?

- (iv) Otvorimo oči i vidimo da novčić pokazuje pismo; koja je vjerojatnost da je na donjoj strani pismo?
- (v) Uklonimo ovaj novčić, nasumično odaberemo neki drugi i bacimo ga. Koja je vjerojatnost da on pokazuje pismo?

ZADATAK 2.8. (i) Pretpostavimo da k ljudi nezavisno jedan od drugog biraju po jednu od n različitih vrsta sladoleda ($k \leq n$). Odredite vjerojatnost postoji barem jedan par ljudi koji su izabrali istu vrstu te pokažite da je ova vjerojatnost odozdo ograničena s $1 - \exp\{-\frac{(k-1)k}{2n}\}$. *Uputa:* Iskoristite nejednakost $1 - x \leq e^{-x}$, $x \geq 0$.

- (ii) Kolika je vjerojatnost da u grupi od k slučajno odabranih ljudi barem dvoje imaju rođendan na isti dan u godini? Pokažite da je ta vjerojatnost barem 0.5 ako je $k = 23$, te barem 0.998 ako je $k = 70$.

ZADATAK 2.9. Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}$ nezavisni događaji. Pokažite da su tada nezavisni i događaji A i B^c , A^c i B^c , A i $B \cup C$, $A \setminus B$ i C .

ZADATAK 2.10. Simetričnu kocku bacamo n puta. Neka je $A_{i,j}$ događaj da kocka pri i -tom i j -tom bacanju pokazuje isti broj. Pokažite da su događaji $(A_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ u parovima nezavisni, ali da nisu nezavisni.

ZADATAK 2.11. Novčić koji pokazuje pismo s vjerojatnošću $p \in (0, 1)$ bačen je n puta. Neka je E događaj da je u prvom bacanju palo pismo, a F_k događaj da je palo ukupno točno k pisama. Fiksirajmo proizvoljne $n \geq 2$ te $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Odredite $\mathbb{P}(E | F_k)$ te ispitajte nezavisnost događaja E i F_k u ovisnosti o parametru $p \in (0, 1)$.

ZADATAK 2.12. Uzastopno bacamo novčić koji s vjerojatnošću $p \in (0, 1)$ pokazuje pismo, a s vjerojatnošću $q := 1 - p$ glavu. Za dane prirodne brojeve r i s , odredite vjerojatnost da se prije pojavi r uzastopnih pisama nego s uzastopnih glava. *Uputa:* Prvo uvjetujte na rezultat prvog bacanja. Ako je u prvom bacanju pala pismo, dodatno uvjetujte na to jesu li u sljedećih $r - 1$ bacanja pala samo pisma ili ne.

ZADATAK 2.13. Promatramo nezavisna bacanja novčića. Za $n \in \mathbb{N}$ neka događaj A_n označava da je u n -tom bacanju novčić pao na glavu.

- (i) Objasnite riječima što predstavlja događaj $B = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c$.
- (ii) Izrazite formulom sličnom onoj iz (i) dijela zadatka događaj C da je novčić beskonačno mnogo puta pao na glavu.
- (iii) Koje su vjerojatnosti događaja B i C kada je $\mathbb{P}(A_n) = p$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neki $0 < p < 1$?

ZADATAK 2.14. Neka je $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ niz događaja. Događaj iz Borel-Cantellijevih lema često označavamo s

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

te slično

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Pokažite da vrijedi

(i)

$$\mathbb{P} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(ii)

$$\mathbb{P} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Rješenja zadataka: **Zad. 2.1** k/n ; **Zad. 2.2** $459/512$; **Zad. 2.3** $\frac{p_A}{p_A + p_B - p_A p_B}$; **Zad. 2.4** $1/6$, $1/3$, $1/2$; **Zad. 2.5** $2/3$; **Zad. 2.6** (i) $\frac{12^2 \cdot 3}{13^3}$, (ii) $\frac{433}{6912}$. **Zad. 2.7** (i) $\frac{3}{5}$, (ii) $\frac{2}{3}$, (iii) $\frac{5}{6}$, (iv) $\frac{4}{5}$, (v) $\frac{21}{40}$; **Zad. 2.8** $1 - \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{i}{n})$; **Zad. 2.11** k/n , nezavisni akko $p = k/n$; **Zad. 2.12** $\frac{p^{r-1}(1-q^s)}{p^{r-1} + q^{s-1} - p^{r-1}q^{s-1}}$; **Zad. 2.13**(iii) $0,1$