POGLAVLJE 1

# Vjerojatnost

ZADATAK 1.1. Slučajni pokus sastoji se od bacanja dvije igraće kocke. Odredite prostor elementarnih događaja $\Omega$. Ako je

$E = \{\text{zbroj brojeva na kockama je neparan}\}$,

$F = \{\text{barem jedna kocka je pala na } 1\}$,

$G = \{\text{zbroj brojeva na kockama je } 5\}$,

prikažite pomoću elementarnih događaja sljedeće događaje:

$$F,\ G,\ E \cap F,\ F \cap G \text{ i } E \cap F \cap G.$$

ZADATAK 1.2. Slučajni pokus sastoji se od bacanja simetričnog novčića sve dok ne padne pismo. Odredite prostor elementarnih događaja $\Omega$ i pomoću njih prikažite sljedeće događaje:

(i) $A = \{\text{novčić je bačen neparno mnogo puta}\}$,
(ii) $B = \{\text{glava je pala barem pet puta zaredom}\}$.

ZADATAK 1.3. Neka su $A, B$ i $C$ događaji vezani uz neki slučajni pokus. Prikažite pomoću $A, B$ i $C$ sljedeće događaje:

(i) dogodio se barem jedan gornji događaj,
(ii) dogodio se točno jedan gornji događaj,
(iii) dogodila su se točno dva gornja događaja,
(iv) nisu se dogodila više od dva gornja događaja.

ZADATAK 1.4. Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Odredite koje od sljedećih familija podskupova skupa $\Omega$ su $\sigma$-algebre na $\Omega$, a one koje nisu nadopunite do najmanje $\sigma$-algebre koja sadrži elemente te familije.

(i) $\mathcal{F}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$,
(ii) $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$.

ZADATAK 1.5. Neka je $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebra na $\Omega$ i $B \subseteq \Omega$. Jesu li tada

(i)
$$\mathcal{G} = \{C \subseteq B : C \in \mathcal{F}\}$$

(ii)
$$\mathcal{H} = \{C \subseteq B : \text{ postoji } A \in \mathcal{F} \text{ takav da je } C = A \cap B\}$$

$\sigma$-algebre na $B$?

Zadatak 1.6. Ako su $A$ i $B$ događaji, dokažite da vrijedi $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leqslant \mathbb{P}(A \triangle B)$.

Zadatak 1.7. Neka su $A$ i $B$ događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Pokažite da je $\frac{1}{12} \leqslant \mathbb{P}(A \cap B) \leqslant \frac{1}{3}$ i navedite primjere koji pokazuju da su oba rubna slučaja moguća. Koje ograde vrijede za $\mathbb{P}(A \cup B)$?

Zadatak 1.8. Simetrični novčić baca se 4 puta. Izračunajte vjerojatnost da

(i) padnu barem tri pisma,
(ii) padnu točno tri pisma,
(iii) padnu barem tri pisma zaredom,
(iv) padnu točno tri pisma zaredom.

Zadatak 1.9. Bacamo $n$ simetričnih kocaka. Izračunajte vjerojatnost da produkt dobivenih brojeva

(i) bude djeljiv s 5,
(ii) ima zadnju znamenku 5,
(iii) ima zadnju znamenku 0.

Zadatak 1.10 (Problem of points). Dva igrača A i B igraju niz igara dok netko ne skupi 6 pobjeda. Igre su nezavisne, a u svakoj igri obojica imaju jednaku vjerojatnost pobjede. Nakon 8 igara, igrač A ima 5, a igrač B 3 pobjede. Zanima nas vjerojatnost da će igrač B ipak pobijediti.

Objasnite zašto sljedeće rješenje nije točno: Svi mogući ishodi su $\Omega = \{A_1, B_1A_2, B_1B_2A_3, B_1B_2B_3\}$ pri čemu npr. $A_2$ predstavlja da je prvi igrač pobijedio u 2. sljedećoj igri (tj. 10. ukupno). Dakle, $\mathbb{P}(\{\text{B prvi do pobjede}\}) = \frac{|\{B_1B_2B_3\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$.

Zadatak 1.11. Da bi počeli igrati s čovječuljkom u igri *Čovječe ne ljuti se* morate prvo dobiti šesticu na kocki.

(i) Izračunajte vjerojatnost da u trećem pokušaju prvi puta dobijete šesticu.
(ii) Izračunajte vjerojatnost da vam treba više od tri pokušaja da prvi puta dobijete šesticu.
(iii) Nakon koliko bacanja bi vjerojatnost da ste dobili šesticu bila barem 0.95?

Zadatak 1.12. Iz skupa $\{1, \ldots, 100\}$ nasumce su odabrana dva ne nužno različita broja, $m$ i $n$. Izračunajte vjerojatnost da je

(i) $m^n + n^m$ neparan broj,
(ii) $m^n \cdot n^m$ paran broj.

Zadatak 1.13. Za Okrugli stol sjeda $n$ vitezova, pri čemu Arthur ne želi sjediti kraj Mordreda ni kraj Lancelota. Ako sjedaju na slučajan način, kolika je vjerojatnost da Arthur ne sjedi ni kraj Mordreda ni kraj Lancelota?

ZADATAK 1.14. Pokažite da za događaje $A, B, C$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A^c \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Koliko ima prirodnih brojeva među $1, \ldots, 500$ koji nisu djeljivi sa 7, ali su djeljivi s 3 ili 5?

ZADATAK 1.15. Jednog radnog tjedna u nekom gradu 10 ljudi je pozvalo električara u svoje kuće radi popravka nekih električnih uređaja. Svaki čovjek je slučajno odabrao neki radni dan u tom tjednu i pozvao električara. Izračunajte vjerojatnost da postoji barem jedan radni dan u kojem nitko nije pozvao električara.

ZADATAK 1.16. Teniski turnir igraju $m = 2^n$ igrača (dakle, ukupno $n$ runda, pri čemu je zadnja runda finale), te pretpostavimo da u svakom meču, svaki od igrača ima jednaku vjerojatnost da pobijedi. Ako slučajno odaberemo dva igrača, odredite vjerojatnost da se susretnu

(i) u prvoj rundi;
(ii) u finalu;
(iii) u nekom trenutku.

ZADATAK 1.17. Marija baci dva novčića, a Ivan jedan.

(i) Koja je vjerojatnost da Mariji padne više glava nego Ivanu?
(ii) Koji je odgovor na to pitanje ako Marija baci tri novčića, a Ivan dva?
(iii) Što mislite kolika je ta vjerojatnost ako Marija baci $n + 1$ novčić, a Ivan njih $n$?
(iv) Možete li to dokazati promatranjem svih mogućnosti nakon što je Ivan bacio sve svoje novčiće, a Mariji je preostalo još jedno bacanje?

ZADATAK 1.18. (i) Pokažite tzv. Bonferronijevu nejednakost

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j).$$

(ii) Svaku od $m$ kuglica smo slučajno rasporedili u bilo koju od $n$ kutija ($m \geqslant n$). Koristeći subaditivnost vjerojatnost te gornju nejednakost, ograničite s obje strane vjerojatnost događaja $E = \{$barem jedna kutija je ostala prazna$\}$. Intuitivno, zašto je ova aproksimacija bolja kada je $m \gg n$?

ZADATAK 1.19. Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz događaja takvih da je $\mathbb{P}(A_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

ZADATAK 1.20. Poznato je da se gotovo sigurno događa barem jedan od događaja $A_1, \ldots, A_n$ te da se gotovo sigurno ne događa tri ili više tih događaja. Ako je $\mathbb{P}(A_i) = p$ za sve $i$ te $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = q$ za sve $i \neq j$, pokažite da je $p \geqslant \frac{1}{n}$ te $q \leqslant \frac{2}{n}$.

**Rješenja zadataka**: **Zad. 1.8** (i) $5/16$, (ii) $1/4$, (iii) $3/16$, (iv) $1/8$; **Zad. 1.9** (i) $1-(5/6)^n$, (ii) $(3^n-2^n)/6^n$, (iii) $(6^n-5^n-3^n+2^n)/6^n$; **Zad. 1.10** $1/8$; **Zad. 1.11** (i) $25/6^3$, (ii) $125/6^3$, (iii) $n \geqslant 17$; **Zad. 1.12** (i) $1/2$, (ii) $3/4$; **Zad. 1.13** $(n-3)(n-4)/((n-1)(n-2))$; **Zad. 1.15** $(5 \cdot 4^{10} - 10 \cdot 3^{10} + 10 \cdot 2^{10} - 5)/5^{10}$; **Zad. 1.16** (i) $1/(2^n-1)$, (ii) $1/(2^{n-1}(2^n-1))$, (iii) $1/2^{n-1}$; **Zad. 1.17** Sva rješenja su $1/2$; **Zad. 1.18** $n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - \binom{n}{2}\left(1-\frac{2}{n}\right)^m \leqslant \mathbb{P}(E) \leqslant n\left(1-\frac{1}{n}\right)^m$.