Elementarna matematika 2

akad. god. 2023./24.

PLANIMETRIJA

Elementarna matematika 2

Aksiomi

- Euklid (325. pr.Kr. – 265. pr.Kr.)
- djelo "Elementi" - temeljni udžbenik geometrije više od 2000 godina
  - aksiomi, definicije, propozicije, teoremi, dokazi
- Primjeri definicija:

  Točka je ono što nema dijelova.

  Crta je duljina bez širine.

  Pravac je crta koja jednako leži prema točkama na njoj.

Euklidovi aksiomi

1. Kroz svake dvije točke moguće je povući pravac.
2. Moguće je po volji daleko produljiti svaku dužinu.
3. Moguće je nacrtati kružnicu sa zadanim središtem i polumjerom.
4. Svaka dva prava kuta su međusobno sukladna.
5. (*aksiom o paralelama*) Za svaki pravac p i točku T izvan tog pravca moguće je povući jedinstveni pravac kroz T koji ne siječe p.

    Euklid je imao kompliciraniju formulaciju...

sumnja u Peti Euklidov aksiom

- uvjeti na skup aksioma:
  - nezavisnost
  - neproturječnost
  - potpunost
- 5. Euklidov aksiom? ... neeuklidske geometrije
  - Hilbert, Lobačevski – hiperboličke geometrije
    - točkom izvan pravca *p* prolaze barem dva pravca paralelna s *p*
  - Riemann – eliptičke geometrije
    - nema paralelnih pravaca

Hilbertovi aksiomi

- 1899. – David Hilbert
- moderni pristup aksiomatskoj izgradnji geometrije (ravnine i prostora)
- 20 aksioma – od toga 16 za planimetriju

Mi ćemo prezentirati malo modificirane aksiome.

Def. **Euklidska ravnina** je skup *M* čije elemente nazivamo *točkama*, a neke istaknute podskupove od *M pravcima*, tako da su zadovoljeni aksiomi I1, I2, I3, U1, U2, M1, M2, M3, M4, S1, S2 i P.

... koje ćemo navesti u nastavku

Aksiomi incidencije

(I1) Za svake dvije različite točke $A, B \in M$ postoji jedinstveni pravac (u oznaci AB) kojem one pripadaju.

(I2) Na svakom pravcu leže barem tri različite točke

(I3) Postoje tri nekolinearne točke.

Fanova ravnina: točke A,B,C,D,E,F,G, pravci {B,C,D}, {A,C,E}, {A,B,F}, {A,D,G}, {B,E,G}, {C,F,G}, {D,E,F}

Kolinearne točke = točke koje pripadaju istom pravcu

Nekolinearne točke = točke koje nisu kolinearne

Aksiomi uređaja

(U1) Na svakom pravcu postoje dva suprotna totalna uređaja, $\preccurlyeq$ i $\succcurlyeq$.

Def. Ako je *T* točka pravca *AB*, kažemo da je *T* **između** *A* i *B* ako vrijedi $A \preccurlyeq T \preccurlyeq B$ ili $A \succcurlyeq T \succcurlyeq B$.

Definicije: dužina, polupravac, konveksan skup, trokut

(U2) (*Paschov aksiom*) Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda siječe još barem jednu stranicu.

Aksiomi metrike – metrički prostor (*M*,*d*)

Zadana je funkcija $d: M \times M \to \mathbb{R}$ sa svojstvima

(M1) $(\forall A, B \in M)\ d(A,B) \geq 0\ \land (d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B)$

(M2) $(\forall A, B \in M)\ d(A,B) = d(B,A)$

(M3) $(\forall A, B, C \in M)\ d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$,
jednakost vrijedi ako i samo ako $C \in \overline{AB}$. nejednakost trokuta

(M4) Za svaki polupravac *s* s vrhom *V* i svaki realni broj $x > 0$ postoji jedinstvena točka *T* na polupravcu *s* takva da je $d(V,T) = x$.

Aksiomi simetrije

Def. Preslikavanje $f\colon M \to M$ je **izometrija** ravnine ako

$$(\forall A, B \in M)\;\; d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

(S1) Za svaki pravac *p* postoji jedinstvena izometrija $s_p\colon M \to M$ različita od identitete za koju je $(\forall T \in p)\;\; s_p(T) = T$.

(S2) Neka su (*Ax*) i (*Ay*) proizvoljni polupravci s vrhom *A*.
Tada postoji barem jedan pravac *p* takav da je $s_p(x) = y$.

Def. Preslikavanje s_p zovemo *osna simetrija u odnosu na pravac* p.

Aksiom o paralelama

Kažemo da su pravci *p* i *q* ($p, q \subseteq M$) *paralelni* ako se podudaraju ili se ne sijeku. Tada pišemo $p \parallel q$.

(P) Zadanom točkom *T* izvan pravca *P* prolazi najviše jedan pravac *q* paralelan s *p*.

iz aksioma slijedi...

- Dva različita pravca sijeku se u najviše jednoj točki.
- Pravac koji ne prolazi niti jednim vrhom trokuta *ABC* ne siječe sve tri stranice trokuta.

- Za pravac *p* definiramo relaciju $\sim$ na skupu $M \backslash p$

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AB} \cap p = \emptyset$$

$\sim$ je relacija ekvivalencije s dvije klase ekvivalencije koje zovemo poluravninama. (Ako želimo zatvorene poluravnine, dodamo i pravac *p*.)

- Izometrija f preslikava pravac određen točkama A i B u pravac određen točkama $f(A)$ i $f(B)$.

Slično vrijedi i za dužinu, polupravac i poluravninu.

- *Def.* Kažemo da je točka *T* *fiksna točka* funkcije *f* ako je $f(T) = T$.

- Ako su *A*, *B* ($A \neq B$) fiksne točke izometrije *f* , onda je svaka točka pravca *AB* fiksna točka te izometrije.

- Ako su *A*, *B*, *C* nekolinearne i fiksne točke izometrije *f*, onda je *f* identiteta.

- Ako je $s_p = s_q$ onda je $p = q$.

- *Def.* Za točke $A \neq B$, *polovište* dužine $\overline{AB}$ je točka $P \in \overline{AB}$ za koju vrijedi $d(A,C) = d(B,C)$.
- Svaka dužina ima jedinstveno polovište.
- *Def.* Za točke $A \neq B$, *simetrala* dužine $\overline{AB}$ je pravac p za koji vrijedi $s_p(A) = s_p(B)$.
- Svaka dužina ima jedinstvenu simetralu.
- Svaka točka na simetrali dužine $\overline{AB}$ jednako je udaljena od A i B. Svaka točka ravnine koja je jednako udaljena od A i B pripada simetrali dužine $\overline{AB}$.

- *Def.* Kažemo da je pravac q okomit na pravac p i pišemo $q \perp p$ ako je $q \neq p$ i $s_q(p) = p$.
- Vrijedi:
  - $q \perp p \Leftrightarrow p \perp q$
  - okomiti pravci se sijeku
  - Kroz svaku točku $A \in M$ prolazi točno jedan pravac okomit na zadani pravac p
  - Neka je A točka koja ne pripada pravcu p i neka je N nožište okomice iz A na p (sjecište pravca p i te okomice). Tada $(\forall T \in p)\ \ d(A,T) \geq d(A,N)$.

- *Def. Rotacija s centrom O* je izometrija ravnine koja ima točno jednu fiksnu točku ili je identiteta.
- *Def. Centralna simetrija s centrom* O je preslikavanje f takvo da je za sve točke $T \in M$ točka O polovište dužine $\overline{Tf(T)}$.
- Vrijedi:
  - Svaka izometrija ravnine je bijekcija.
  - $s_p \circ s_p = id,\ s_p^{-1} = s_p$
  - Izometrija koja ima barem dvije fiksne točke *A* i *B* je ili identiteta ili s_{AB} .
  - Kompozicija rotacija s centrom u točki *O* je rotacija s istim centrom.
  - Inverz rotacije je rotacija.
  - Centralna simetrija s centrom *O* je rotacija s centrom *O*.
  - Svaka izometrija ravnine je kompozicija najviše tri osne simetrije.

- *Kut* se može definirati kao dio ravnine omeđen dvama polupravcima sa zajedničkim vrhom.
- Na skupu svih kutova definira se relacija *sukladnost* – kutovi su sukladni ako postoji izometrija koja preslikava jednog na drugi.
- Sukladnost kutova je relacija ekvivalencije. Na kvocijentnom skupu definira se totalni uređaj koji omogućava usporedbu kutova (manji-veći) te njihovo zbrajanje.
- Definira se *mjera kuta*, kao strogo rastuća aditivna funkcija s vrijednostima u $\mathbb{R}^+$. Najčešće koristimo mjeru u radijanima.
- Razlikujemo šiljaste, tupe i izbočene kutove te posebno nul-kut, pravi, ispruženi i puni kut.

- $\triangle ABC = \mathrm{Conv}\,\{A, B, C\}$
- Trokut ima tri vrha (točke), tri stranice (dužine) i tri unutarnja kuta.

- U trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $|AB| = |AC| \iff \beta = \gamma$.
- Nasuprot dulje stranice trokuta leži veći kut i obratno.
- Zbroj duljina dviju stranica trokuta veći je od duljine treće stranice.
- Vanjski kut trokuta uz jedan vrh trokuta veći je od unutarnjih kutova uz druge vrhove.

- Sve do sada spomenuto može se napraviti (definirati i dokazati) bez korištenja aksioma o paralelama.

- Pomoću aksioma o paralelama dokazuju se:
- Teorem o kutovima uz presječnicu i njegov obrat
- Zbroj mjera unutarnjih kutova trokuta jednak je mjeri ispruženog kuta. Mjera vanjskog kuta jednaka je zbroju mjera unutarnjih kutova u preostala dva vrha.

O neeuklidskim geometrijama

- Primjer 1: Riemannova eliptička geometrija
  "sve" = sfera
  pravac = velika kružnica na sferi
  točka = par nasuprotnih točaka sfere
- Primjer 2: Poincareov model hiperboličke geometrije
  "sve" = gornja poluravnina omeđena pravcem *p*
  pravac = pravac okomit na *p* ili polukružnica sa središtem na *p*
  točka = točka
- Koji aksiomi vrijede u ovim geometrijama?

Elementarna matematika 2

Klasična geometrija trokuta

- *Def.* Kažemo da su trokuti T_1 i T_2 *sukladni* ako im se vrhovi mogu označiti A_1, B_1, C_1 i A_2, B_2, C_2 tako da vrijedi
$$|A_1B_1| = |A_2B_2|, \qquad |B_1C_1| = |B_2C_2|, \qquad |C_1A_1| = |C_2A_2|$$
$$\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle B_2A_2C_2, \sphericalangle C_1B_1A_1 = \sphericalangle C_2B_2A_2, \sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle A_2C_2B_2.$$

- Sukladnost je relacija ekvivalencije.
- Izometrija preslikava trokut u njemu sukladan trokut. Obrat ??
- Teoremi o sukladnosti trokuta:
  - SSS (stranica-stranica-stranica)
  - SKS (stranica-kut-stranica)
  - KSK (kut-stranica-kut)
  - $SSK^{>}$ (stranica – stranica – kut nasuprot većoj)

... definicije i teoremi:

- Paralelogram, romb, pravokutnik, kvadrat,... kružnica.
- Srednjica trokuta.
- Srednjica trapeza
- karakterizacija točaka na simetrali kuta

teoremi o četiri karakteristične točke trokuta

- Težišnice i težište trokuta
- Opisana kružnica trokuta
- Upisana kružnica trokuta
- Visine i ortocentar

- Površina
  - pravokutnika, paralelograma, trokuta,...

- Pitagorin teorem
- obrat Pitagorinog teorema