# 5 Polinomi

**Definicija.** *Realni polinom* je svaka funkcija $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

gdje je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Polinom $p$ za koji vrijedi

$$p(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

zove se *nulpolinom.*

Skup svih polinoma s realnim koeficijentima označavamo s $\mathbb{R}[x]$. Analogno se definiraju skupovi polinoma s koeficijentima u $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ i označavamo ih redom sa $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{C}[x]$.

**Teorem. (o nulpolinomu)** Neka je $p \in \mathbb{R}[x]$ i neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(p(x) = 0) \ \Leftrightarrow \ \text{ svi koeficijenti } a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \text{ jednaki su } 0.$$

**Teorem. (o jednakosti polinoma)** Neka su $p$, $q \in \mathbb{R}[x]$. Neka je za svaki $x \in \mathbb{R}$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

i neka je $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$. Tada vrijedi

$$(\forall x \in \mathbb{R})(p(x) = q(x)) \ \Leftrightarrow \ n = m \wedge (\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\})(a_i = b_i).$$

**Stupanj polinoma i koeficijenti polinoma.** Neka je $p \in \mathbb{R}[x]$ različit od nulpolinoma i neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ zovemo *koeficijenti polinoma* $p$. Broj $a_n \neq 0$ zovemo *vodeći koeficijent*, a broj $a_0$ *slobodni koeficijent.* Broj $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zovemo *stupanj polinoma* $p$ i pišemo $\operatorname{st} p = n$ (ili $\deg p = n$).

Stupanj nulpolinoma se ne definira ili se uzima da je jednak $-\infty$.

**Zadatak 1.** Odredite polinom $p$ koji zadovoljava uvjete: $\operatorname{st} p = 3$, $p(0) = 0$ i

$$p(x) - p(x-1) = x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Zbrajanje, množenje i kompozicija polinoma.** Binarne operacije na $\mathbb{R}[x]$ zbrajanja i množenja polinoma definiraju se kao zbrajanje i množenje funkcija:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kompozicija realnih polinoma je kompozicija funkcija:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analogno se za bilo koji prsten $P$ definira zbroj i množenje polinoma s koeficijentima u $P$, čime $P[x]$ postaje prsten polinoma s koeficijentima u $P$.

**Zadatak 2.** Izrazite $\operatorname{st}(f+g)$, $\operatorname{st}(f \cdot g)$ i $\operatorname{st}(f \circ g)$ pomoću $\operatorname{st} f$ i $\operatorname{st} g$, ako je moguće.

**Racionalna funkcija.** Rezultat dijeljenja polinoma $f$ i $g$ je racionalna funkcija

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

s domenom $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

**Teorem. (o dijeljenju polinoma)** Neka su $f$, $g \in \mathbb{R}[x]$ i $g \neq 0$. Tada postoje jedinstveni polinomi $q$, $r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je

$$f = g \cdot q + r \quad \text{i} \quad \operatorname{st} r < \operatorname{st} g.$$

**Napomena.** Ovdje uzimamo da je stupanj nulpolinoma $-\infty$.

**Definicija.** Kažemo da polinom $g$ dijeli polinom $f$ ako postoji polinom $q$ takav da je $f = g \cdot q$ i pišemo $g \mid f$. Ekvivalentno, ostatak pri dijeljenju polinoma $f$ polinomom $g$ je nulpolinom.

**Algoritam za dijeljenje polinoma.** $(x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x^2 + 2x - 1) =$

**Zadatak 3.** Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$ polinomom $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

**Zadatak 4.** Polinom $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ pri dijeljenju polinomom $g_1(x) = x - 2$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju polinomom $g_2(x) = x + 1$ ostatak 0. Odredite koeficijente $a$ i $b$.

**Zadatak 5.** Dokažite da je ostatak pri dijeljenju polinoma $f$ polinomom $(x-\alpha)$ jednak $f(\alpha)$.

**Teorem. (Bezout)** Vrijedi $f(\alpha)=0$ ako i samo ako je $f$ djeljiv s $(x-\alpha)$.

**Zadatak 6.** Je li polinom $f(x)=(x^2+x-1)^{2n}+(x^2-x+1)^{2n}-2$ djeljiv polinomom $g(x)=x^2-x$?

**DZ 1.** Dokažite da je za svaki $n \geq 2$ polinom $f(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ djeljiv polinomom $g(x)=2x^3+3x^2+x$.

**Zadatak 7.** Polinom $f$ pri dijeljenju s $(x+1)$ daje ostatak 4, a pri dijeljenju s $(x^2+1)$ ostatak $2x+3$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f$ sa $(x+1)(x^2+1)$.

**DZ 2.** Neka su $a_1,\, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq a_2$. Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju sa $(x-a_1)$ daje ostatak $r_1$, a pri dijeljenju sa $(x-a_2)$ ostatak $r_2$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f$ sa $(x-a_1)(x-a_2)$.

### Nultočke polinoma

**Definicija.** Neka je $f \in P[x]$, gdje je $P=\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ (ili općenito, prsten). *Nultočka polinoma* $f$ je svaki $\alpha \in P$ takav da je $f(\alpha)=0$.

**Teorem. (Osnovni teorem algebre)** Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja st $f \geq 1$ ima nultočku u $\mathbb{C}$.

**Korolar.** Svaki polinom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n \geq 1$ ima točno $n$ nultočaka, računajući njihove kratnosti.

**Definicija.** Neka je $f \in P[x]$ i $\alpha \in P$ nultočka od $f$. Za $k \in \mathbb{N}$, kažemo da je $\alpha$ *nultočka kratnosti* $k$ ako vrijedi $(x-\alpha)^k \mid f$ i ne vrijedi $(x-\alpha)^{k+1} \mid f$.

To znači da se $f \in \mathbb{C}[x]$ stupnja $n$, $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$, može zapisati u obliku

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

gdje je $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$ i $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots,\, \alpha_n \in \mathbb{C}$ su međusobno različite nultočke od $f$.

Realni polinomi koji su stupnja barem 1 ne moraju imati nultočke. Na primjer $f(x)=x^2+1$ nema realnih nultočaka. No, možemo ih promatrati kao kompleksne polinome u $\mathbb{C}[x]$ (jer je $\mathbb{R}$ potprsten od $\mathbb{C}$), pa promatrati njihove nultočke u $\mathbb{C}$. Općenito, svaki se realni polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ stupnja st $f \geq 1$ može zapisati ovako:

$$f(x)=a_n(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{r_1}\cdots(x^2+\beta_tx+\gamma_t)^{r_t}(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

gdje svaki kvadratni faktor nema realnih nultočaka. Svaki kvadratni faktor ovdje ima dvije kompleksno konjugirane nultočke. Pritom je $2(r_1+r_2+\ldots+r_t)+k_1+k_2+\ldots+k_s=n$.

Polinom stupnja $n$ ne može imati više od $n$ nultočaka. Dakle, ako polinom ima beskonačno mnogo nultočaka, to je nulpolinom.

**Zadatak 8.** Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$xf(x-1) = (x-3)f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**DZ 3.** Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$x(x-1)f(x+1) = (x+2)(x+1)f(x-1), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Formule za nultočke polinoma.** Za $n = 1$, $f(x) = ax + b$, nultočka je

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Za $n = 2$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, nultočke su

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}.$$

Te formule vrijede i za kompleksne polinome, samo treba znati vaditi drugi korijen iz kompleksnog broja. Za $n = 3$ postoji formula, samo je jako komplicirana. Za $n = 4$ također, samo još kompliciranija. [Pavković, Veljan, Elementarna matematika, str. 105. - 112.] Za $n \geq 5$ ne postoje formule za nultočke sastavljene samo od elementarnih funkcija (zbrajanje, množenje, dijeljenje, korijenovanje). Ako dopustimo širu klasu funkcija (tzv. specijalne funkcije), onda se može zapisati formula i za jednadžbu petog stupnja.

## Hornerov algoritam

Podijelimo polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, uz $a_n \neq 0$, sa $(x - \alpha)$:

$$f(x) = (x-\alpha)q(x) + r.$$

Znamo:

$$r = f(\alpha)$$

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Uvrštavanjem i množenjem dobivamo:

$$f(x) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - \alpha b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (b_1 - \alpha b_2)x^2 + (b_0 - \alpha b_1)x + (r - \alpha b_0).$$

Uspoređivanjem koeficijenata imamo:

$$a_n = b_{n-1}$$

$$a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1}$$

$$a_{n-2} = b_{n-3} - \alpha b_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$a_{i+1} = b_i - \alpha b_{i+1}$$
$$\vdots$$
$$a_2 = b_1 - \alpha b_2$$
$$a_1 = b_0 - \alpha b_1$$
$$a_0 = r - \alpha b_0.$$

Dakle, vrijedi

$$b_{n-1} = a_n$$
$$b_{n-2} = \alpha b_{n-1} + a_{n-1}$$
$$b_{n-3} = \alpha b_{n-2} + a_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$b_i = \alpha b_{i+1} + a_{i+1}$$
$$\vdots$$
$$b_1 = \alpha b_2 + a_2$$
$$b_0 = \alpha b_1 + a_1$$
$$r = \alpha b_0 + a_0.$$

**Zadatak 9.** Podijelite $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 8$ s $g(x) = x - 2$.

**Zadatak 10.** Izračunajte $f(3)$ ako je $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 8x - 5$.

**DZ 4.** Neka je $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Odredite koeficijente polinoma $f$ tako da pri dijeljenju s $(x - 1)$ daje ostatak $-8$, pri dijeljenju s $(x - 2)$ ostatak $-9$, a pri dijeljenju s $(x - 3)$ ostatak $-4$.

**Najveća zajednička mjera polinoma**

**Definicija.** Neka su $f,\, g \in \mathbb{R}[x]$, $f,\, g \neq 0$. Za polinom $h \in \mathbb{R}[x]$ kažemo da je *najveća zajednička mjera polinoma* $f$ i $g$ ako je $h$ normiran polinom najvećeg stupnja takav da su $f$ i $g$ djeljivi s $h$.

Za polinom kažemo da je *normiran* ako mu je vodeći koeficijent jednak 1. Za polinom $h$ kažemo da je *zajednička mjera polinoma* $f$ i $g$ ako $h \mid f$ i $h \mid g$. Vrijedi sljedeća karakterizacija najveće zajedničke mjere.

**Karakterizacija.** Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $f, g \neq 0$. Polinom $d \in \mathbb{R}[x]$ je najveća zajednička mjera polinoma $f$ i $g$ ako i samo ako je $d$ zajednička mjera od $f$ i $g$, normiran je i djeljiv je svakom zajedničkom mjerom od $f$ i $g$.

**Teorem.** Za svaka dva polinoma $f, g \neq 0$ postoji jedinstvena najveća zajednička mjera. Označavamo je s $M(f, g)$.

Najveću zajedničku mjeru tražimo Euklidovim algoritmom.

**Euklidov algoritam.**

**Zadatak 11.** Nađite najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

**Zadatak 12.** Neka je $f(x) = 3x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ i $g(x) = x^3 - ax^2 - ax - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dokažite da $M(f, g)$ nije djeljiva polinomom $(x + 1)$.

**Derivacija polinoma i kratnost nultočke**

**Definicija.** Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Derivaciju polinoma $f$ definiramo kao polinom

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

**Napomena.** Ova definicija se podudara s definicijom derivacije funkcije iz Matematičke analize, u ovom slučaju polinoma. Međutim, ako promatramo samo polinome, ne treba nam definicija limesa da bismo definirali derivaciju – ovako definirana derivacija zove se zbog toga *formalna derivacija.* Definicija ima smisla i za polinome u $\mathbb{Z}[x]$.

**Svojstva formalne derivacije.**

(1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

(2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(3) $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

**Definicija.** $n$-tu derivaciju definiramo kao derivaciju $(n-1)$-ve derivacije:

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$$

$$f^{(0)} := f.$$

**Teorem.** Ako je $\alpha$ nultočka polinoma $f$ kratnosti $k \geq 2$, onda je $\alpha$ nultočka polinoma $f'$ kratnosti $k-1$.

**Zadatak 9.** Odredite kratnost nultočke $x = 2$ polinoma $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

**Zadatak 10.** Dokažite da polinom $f(x) = x^n - 1$ nema višestrukih nultočki.

**DZ 5.** Dokažite da $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ nema višestrukih nultočki.

**Zadatak 11.** Odredite nužne i dovoljne uvjete na koeficijente polinoma

$$p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

da bi on bio djeljiv polinomom $q(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

**DZ 6.** Odredite nužne i dovoljne uvjete na koeficijente polinoma

$$f(x) = x^n - ax^{n-1} + ax - 1$$

da bi on bio djeljiv polinomom $g(x) = (x-1)^2$.

**DZ 7.** Dokažite da $(1-x)^3$ dijeli $(1-x^n)(1+x) - 2nx^n(1-x) - n^2x^n(1-x)^2$.

**Zadatak 12.** Odredite koeficijente $a$ i $b$ polinoma $f(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 + b$ tako da bude djeljiv polinomom $(x-2)^2$.

**Zadatak 13.** Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^{100} - x^{50} + 1$ polinomom $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

**Zadatak 14.** Dokažite da je polinom $p(x) = x^{2n} - nx^{n+1} + nx^{n-1} - 1$ djeljiv polinomom $q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

**Zadatak 15.** Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju $(x+1)p(x) = x^3 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Zadatak 16.** Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju $f(x^2 - 3) = x^2 f(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Cjelobrojne i racionalne nultočke polinoma**

**Teorem.** Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom koji ima cjelobrojnu nultočku $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Tada $k$ dijeli slobodni član polinoma $f$.

**Zadatak 17.** Nađite nultočke polinoma $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$.

**Teorem.** Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ i $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ njegova racionalna nultočka, $M(m,n) = 1$. Tada brojnik $m$ dijeli slobodni koeficijent, a nazivnik $n$ vodeći koeficijent polinoma $f$.

**Zadatak 18.** Nađite nultočke polinoma $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$.

**Zadatak 19.** Odredite koeficijente $a$ i $b$ polinoma

$$p(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b$$

ako je poznato da on ima trostruku cjelobrojnu nultočku.

**DZ 8.** Dokažite da ne postoji trokut kojemu su duljine stranica jednake nultočkama polinoma $f(x) = 2x^3 - 13x^2 + 25x - 14$.

**Zadatak 20.** Nađite polinom s cjelobrojnim koeficijentima kojemu je nultočka $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$.

**Zadatak 21.** Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$. Dokažite: ako su $f(0)$ i $f(1)$ neparni brojevi, onda $f$ nema cjelobrojnih nultočaka.

**Zadatak 22.** Dokažite da ne postoji polinom s cjelobrojnim koeficijentima $f \in \mathbb{Z}[x]$ takav da je $f(0) = 2$ i $f(2) = 5$.

**Zadatak 23.** Neka je $f \in \mathbb{Z}[x]$ i neka su $a$, $b$, $c \in \mathbb{Z}$ međusobno različiti brojevi takvi da je $f(a) = f(b) = f(c) = 2$. Dokažite da ne postoji $d \in \mathbb{Z}$ takav da je $f(d) = 3$.

**Zadatak 24.** Odredite sve nultočke polinoma $p(x) = x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 16x - 40$ ako znate znate da je jedna od njih $x_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

**Napomena.** Neka je $f \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$. Ako je $z = a+ib$ nultočka of $f$, onda je $\overline{z} = a-ib$ nultočka of $f$.

**Zadatak 25.** Zadana su dva polinoma

$$f(x) = x^3 - (a+4)x^2 + (4a+3)x - 3a$$

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da je njihova najveća zajednička mjera $M(f, g)$ polinom stupnja 2.

### Vieteove formule

Neka su $x_1$ i $x_2$ nultočke polinoma $p(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Generalizacija te tvrdnje je sljedeća.

Neka je

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

i neka su $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ njegove nultočke, tj. vrijedi

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Izmnožimo zagrade i izjednačimo koeficijente:

**Zadatak 26.** Odredite površinu trokuta kojemu su duljine stranica nultočke polinoma

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

**Zadatak 27.** Dokažite: Ako polinom $f(x) = x^3 - px + q$ s realnim koeficijentima ima tri realne međusobno različite nultočke, onda je $p > 0$.

**Zadatak 28.** Riješite sustav jednadžbi

$$x + y + z = 9$$

$$xy + yz + zx = 27$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

**Simetrične jednadžbe**

**Zadatak 29.** Riješite sustav

$$x + y + z = 2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 20.$$

**Zadatak 30.** Riješite sustav

$$xyz = 1$$

$$x + y + z = xy + yz + zx$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = \frac{73}{8}.$$

**Teorem.** Svaki se simetrični polinom dviju varijabli može prikazati pomoću osnovnih simetričnih polinoma $\sigma_1(x, y) = x + y$, $\sigma_2(x, y) = xy$, tj. kao polinom u varijablama $\sigma_1$ i $\sigma_2$.

**Zadatak 31.** Prikažite polinom $f(x, y) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + x + y$ preko osnovnih simetričnih polinoma.

**Zadatak 32.** Prikažite polinom $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2yz + xy^2z + xyz^2$ pomoću osnovnih simetričnih polinoma.

**Zadatak 33.** Prikažite polinom $f(x, y) = x^6 - x^5y + 3x^4y^2 + 2x^3y^3 + 3x^2y^4 - xy^5 + y^6$ pomoću $x + y$ i $xy$.

**Rastav na parcijalne razlomke**

**Zadatak 34.** Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{3x^2-2}{x^3-x}.$$

**Zadatak 35.** Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{1}{x^3+x^2-x-1}.$$

**Zadatak 36.** Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{14x^2-51x+43}{x^3-7x^2+17x-15}.$$

**Zadatak 37.** Ako je nazivnik $(x-2)^3(x^2+x+3)(x^2+1)^2(x+5)$, kako glasi rastav na parcijalne razlomke?

**Zadatak 38.** Rastavite na parcijalne razlomke

$$\frac{6x^3-29x^2+100x-64}{(x^2-4x+13)^2}.$$

**Zadatak 39.** Rastavite na parcijalne razlomke

$$R(x)=\frac{15x^2+26x-5}{x^3+3x^2-4}.$$