1 Logika

Sud ili izjava je svaka smislena izjavna rečenica kojoj se može odrediti istinitost.

Primjeri.

1. Dan 4. listopada 2022. je utorak. — sud (istinit)
2. Broj 13 jednak je broju 7. — sud (lažan)
3. $1 + 1 + 1 = 2$. — sud (lažan)
4. $x + 1 = 2$. — nije sud
5. Postoji prirodan broj x takav da je $x + 1 = 2$. — sud (istinit)
6. Koliko je sati? — nije sud
7. Na stotom mjestu iza zareza u decimalnom prikazu broja $\sqrt{2}$ nalazi se 9. — sud
8. Izračunajte $15 \cdot 3^2\sqrt{17}$! — nije sud

Istinitost suda P označavamo s $\tau(P)$.

$$\tau(P) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } P \text{ lažan} \\ 1, & \text{ako je } P \text{ istinit.} \end{cases}$$

Logički veznici. Od jednostavnih sudova gradimo složene sudove pomoću logičkih veznika.

1. Konjunkcija. P i Q, $P \wedge Q$, $P \cdot Q$. Konjunkcija dva suda je istinita točno onda kad su istinita oba suda.
2. Disjunkcija. P ili Q, $P \vee Q$, $P + Q$. Disjunkcija sudova je istinita točno onda kad je istinit barem jedan od tih sudova.
3. Negacija. ne P, $\neg P$, $\overline{P}$. Negacija suda je istinita točno onda kad je sud lažan.
4. Implikacija. ako P onda Q, iz P slijedi Q, P povlači Q, $P \Rightarrow Q$. Implikacija $P \Rightarrow Q$ je lažna točno onda kad je P istinit i Q lažan.
5. Ekvivalencija. P ako i samo ako Q, P akko Q, $P \Leftrightarrow Q$. Ekvivalencija dva suda je istinita točno onda kad su oba suda istinita ili oba suda lažna.

Napomena. Dakle, $P \Rightarrow Q$ znači samo: ako je P istina, onda je Q istina. Ako je P laž, ta implikacija ništa ne govori o istinitosti od Q.

Zadatak 1. Odaberite neka dva suda P i Q te iskažite sljedeće sudove riječima.

(a) $\neg P$

(b) $P \wedge Q$

(c) $P \vee Q$

(d) $P \Leftrightarrow Q$

(e) $P \Rightarrow \neg Q$

(f) $Q \vee \neg P$

(g) $\neg P \wedge \neg Q$

(h) $P \Leftrightarrow \neg Q$

(i) $\neg(\neg Q)$

(j) $(P \wedge \neg Q) \Rightarrow P$.

Zadatak 2. Odredite istinitost sljedećih sudova.

(a) Ako je $3 + 2 = 7$, onda je $3 + 3 = 6$.

(b) Nije istina da: vrijedi $2 + 2 = 5$ ako i samo ako vrijedi $4 + 4 = 10$.

(c) Vrijedi $2 + 3 = 6$ ili $2 + 3 = 4$.

(d) Ne vrijedi da je: $1 + 1 = 3$ ili $2 + 1 = 3$.

(e) Nije istina da: ako je $2 + 3 = 6$, onda je $2 + 3 = 4$.

Zadatak 3. Provjerite zakone asocijativnosti za konjunkciju i disjunkciju,

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$
$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R.$$

Provjerite zakone distributivnosti konjunkcije prema disjunkciji i disjunkcije prema konjunkciji,

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

Znak $\equiv$ označava semantičku jednakost složenih sudova, to jest jednakost njihovih tablica istinitosti.

Zadatak 4. Dokažite da je $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$ tautologija, tj. da je istinit za sve sudove P, Q.

Zadatak 5. Dokažite da je $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ istinit za sve sudove P, Q.

Zadatak 6. Dokažite da je implikacija tranzitivna, tj. da je $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ istinit za bilo koja tri suda P, Q, R.

Negiranje složenih izjava. Primjeri:

1. Broj 3 je prost i paran. Negacija: Broj 3 nije prost ili nije paran.

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

2. Broj 2 je složen ili paran. Negacija: Broj 2 nije složen i nije paran.

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

3. Ako je broj 2 paran, onda je broj 3 paran. Negacija: Broj 2 je paran i broj 3 nije paran.

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

4. Broj 3 je prost ako i samo ako je broj 5 složen. Negacija: Broj 3 je prost i broj 5 nije složen ili broj 3 nije prost i broj 5 je složen.

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

Definicija. Sud $B \Rightarrow A$ zove se *obrat* suda $A \Rightarrow B$. Sud $\neg B \Rightarrow \neg A$ zove se *obrat po kontrapoziciji* suda $A \Rightarrow B$.

Napomena. Sudovi $P \Rightarrow Q$ i $\neg Q \Rightarrow \neg P$ jednake su istinitosti za sve sudove P, Q, tj. vrijedi

$$\neg Q \Rightarrow \neg P \equiv P \Rightarrow Q.$$

Za sudove $P \Rightarrow Q$ i $Q \Rightarrow P$ to ne vrijedi.

Zadatak 7. Dokažite sljedeće:

(a) $(P \Rightarrow Q) \equiv \neg P \vee Q$

(b) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

(c) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

(d) $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

(e) $\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(f) $\neg(\neg P) \equiv P$.

Kvantifikatori.

1. Univerzalni kvantifikator: za svaki, $\forall$
2. Egzistencijalni kvantifikator: postoji, $\exists$

Primjeri.

1. Svaki prirodni broj n djeljiv je s 1. $(\forall n \in \mathbb{N})(1 \mid n)$
2. Postoji realan broj koji nije racionalan. $(\exists x \in \mathbb{R})(x \notin \mathbb{Q})$

Napomena. Zapis $(\forall n \in S)A(n)$ je pokrata za $(\forall n)(n \in S \Rightarrow A(n))$, a zapis $(\exists n \in S)B(n)$ je pokrata za $(\exists n)(n \in S \wedge B(n))$.

Zadatak 8. Zapišite pomoću simbola sljedeće izjave:

(a) Za svaki realan broj postoji prirodan broj koji je veći od njega.

(b) Postoji prirodan broj koji je djelitelj svakog prirodnog broja.

Zadatak 9. Iskažite riječima i provjerite istinitost izjava:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})(n < k)$

(b) $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n < k)$.

Napomena. Redoslijed kvantifikatora je općenito bitan.

Zadatak 10. Odredite istinitost sljedećih sudova:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x^2)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x = x^2)$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = x)$

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$

(f) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})(y \geq x)$

(g) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(y \geq x)$

(h) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x)$

(i) $(\forall y \in \mathbb{R}^+)(\exists x \in \mathbb{R}^+)(xy = 1)$, gdje je $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, skup pozitivnih realnih brojeva

(j) $(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(xy = 1)$.

Svoj odgovor obrazložite.

Napomena. Redoslijed istovrsnih kvantifikatora nije bitan, pa možemo na primjer umjesto formule $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})A(x, y)$ pisati skraćeno $(\forall x, y \in \mathbb{N})A(x, y)$ i slično za egzistencijalni kvantifikator.

Zadatak 11. Zapišite simbolima sljedeće izjave.

(a) Svaki prirodan broj manji je od nekog prirodnog broja.

(b) Postoji prirodan broj veći od svakog prirodnog broja.

(c) Svaki prirodan broj koji je kvadrat parnog broja djeljiv je s 4.

(d) Svaki prirodan broj koji je djeljiv s 14 djeljiv je s 2 i s 4.

(e) Ako je umnožak dvaju prirodnih brojeva djeljiv prostim brojem, onda je tim brojem djeljiv barem jedan od tih dvaju brojeva.

Negiranje izjava koje sadrže kvantifikatore. Primjeri:

1. Svaki prirodan broj je paran. $(\forall n \in \mathbb{N})(2 \mid n)$
   Negacija: Postoji prirodan broj koji nije paran. $(\exists n \in \mathbb{N})(2 \nmid n)$

2. Postoji prirodan broj koji je negativan. $(\exists n \in \mathbb{N})(n < 0)$
   Negacija: Za svaki prirodan broj vrijedi da nije negativan. $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 0)$

3. $(\forall x > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < x)$
   Negacija: $(\exists x > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} \geq x)$

Napomena. Negacija od $(\forall x)A(x)$ je $(\exists x)\neg A(x)$, a negacija od $(\exists x)B(x)$ je $(\forall x)\neg B(x)$.

Zadatak 12. Negirajte sljedeće sudove:

(a) $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 1 = 8)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{N})(x < 8)$

(c) $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 1 > 4)$

(d) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \geq 4)$

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x^2 + y < y^2)$

(f) $(\forall r \in \mathbb{R})(r > 0 \lor r < 0)$

(g) $(\forall x \in \mathbb{Q})(x \cdot 0 = 0 \land x \cdot 1 = x)$

(h) $(\exists a \in \mathbb{R}^+)(a \neq -1 \Rightarrow a = -2)$

(i) $(\forall a \in \mathbb{Q})(\forall b \in \mathbb{Q})(\frac{a}{b} \in \mathbb{Q})$

(j) $(\exists n \in \mathbb{N})(n+1 = n \vee n-1 = n)$

(k) $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{x} \in \mathbb{R})$

(l) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - x \geq 0 \Rightarrow (x \leq 0 \vee x \geq 1))$.

Zadatak 13. Napišite obrat po kontrapoziciji sljedećih implikacija:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(2 \mid n \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(n = 4k \vee n = 4k+2))$

(b) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0)$

(c) $(\forall x, y \in \mathbb{R})((x^2 > x \wedge y > 0) \Rightarrow xy > y)$

(d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 2x < 0 \Rightarrow (x < 2 \wedge x > 0))$

(e) $(\forall n \in \mathbb{N})(3 \mid n \wedge 2 \nmid n) \Rightarrow 9 \mid n^2)$

(f) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 7x + 12 > 0 \Rightarrow x < 3)$.