1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Ime i prezime, JMBAG: ______________________________

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

drugi kolokvij - 4. veljače 2022.

Napomene: Vrijeme rješavanja je 120 minuta.
Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Prva četiri zadatka rješavajte na jednom papiru, a ostale zadatke svaki na zasebnom listu.

1. (3 b) Definirajte tetivni četverokut. Odredite sve trapeze koji su tetivni četverokuti.

2. (4 b) Čemu je jednaka kompozicija $f \circ f$ ako je f:
   (a) centralna simetrija obzirom na točku O,
   (b) osna simetrija obzirom na pravac p,
   (c) translacija za vektor $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$),
   (d) rotacija sa središtem O za kut α ($\alpha \neq 0$)?

3. (3 b) Kada kažemo da je pravac p koji ne pripada ravnini π:
   (a) paralelan sa π,
   (b) okomit na π?

   Što je ortogonalna projekcija pravca p na ravninu π u (a), a što u (b)?

4. (7 b)
   (a) Dokažite sljedeću tvrdnju:
   Ako je ABC trokut sa stranicama duljina a, b i c, a D točka na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|AD| = d$, $|BD| = p$ i $|CD| = q$, tada je $b^2p + c^2q = (d^2 + pq)a$.
   (b) Koristeći tu tvrdnju izrazite duljinu težišnice trokuta ABC iz vrha A pomoću duljina stranica a, b i c.

5. (7 b) Opseg trokuta ABC iznosi 24 cm. Simetrala jednog kuta tog trokuta siječe njegovu opisanu kružnicu u točki K. Ako vrijedi $2|KA| = 3|KB|$, zaključite iz kojeg je vrha povučena simetrala i odredite duljinu stranice nasuprot tog vrha.

6. (7 b) Dan je trokut ABC s kutovima veličina α, β i γ. Na stranici $\overline{AB}$ nalaze se točke D i E takve da pravci CD i CE dijele kut $\sphericalangle ACB$ na tri sukladna dijela. Izrazite omjer $|AD| : |BE|$ pomoću veličina kutova danog trokuta.

7. (7 b) Neka su $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ paralelne dužine različitih duljina. Neka je K sjecište pravaca AC i BD, L sjecište pravaca AE i BF, te M sjecište pravaca CE i DF. Definirane su tri homotetije:

   H_K – homotetija sa središtem K takva da je $H_K(C) = A$,

   H_L – homotetija sa središtem L takva da je $H_L(B) = F$,

   H_M – homotetija sa središtem M takva da je $H_M(C) = E$.

   Poznato je da je kompozicija bilo koje dvije od tih homotetija također homotetija.

   (a) Dokažite da je kompozicija homotetija H_L i H_K upravo H_M tj. da vrijedi $H_L \circ H_K = H_M$.

   (b) Dokažite da su točke K, L i M kolinearne.

8. (7 b) Dan je pravilni tetraedar $ABCD$ brida duljine 2.

   (a) Točka P nalazi se u unutrašnjosti danog pravilnog tetraedra. Dokažite da je zbroj udaljenosti točke P od svih strana tetraedra konstanta. Koliko iznosi taj zbroj?

   (b) Izračunajte volumen kugle upisane tetraedru $ABCD$.
   Uputa: Koristite rezultat (a) dijela zadatka.