

ELEMENTARNA GEOMETRIJA

prvi kolokvij - 24. studenog 2020.

Napomene: Vrijeme rješavanja je 150 minuta. Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

1. (5 b) Precizno iskažite obrat Pitagorinog teorema.

Dokažite taj teorem. Pitagorin teorem smatramo dokazanim.

2. (7 b) Definirajte trapez te navedite kako nazivamo njegove stranice.

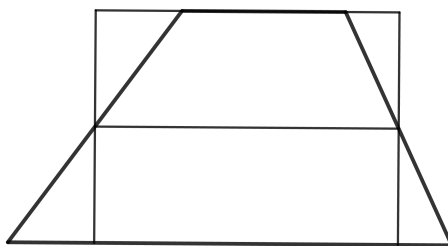
Definirajte srednjicu trapeza.

Iskažite teorem o srednjici trapeza.

Dokažite taj teorem.

3. (5 b) Na temelju dane slike izvedite formulu za površinu trapeza s osnovicama duljina a i c te visinom duljine v . Formule za površinu pravokutnika i pravokutnog trokuta smatramo poznatima.

Uputa: Najprije uvedite oznake koje vam trebaju i jasno definirajte točke koje uvodite (opišite koje su dodatne konstrukcije napravljene). Obrazložite tvrdnje koje koristite (zašto su neke dužine sukladne, površine jednake i slično).



4. (7 b) Odredite broj vrhova pravilnog mnogokuta koji ima približno 400 dijagonala.

(Ovdje riječ "približno" znači da broj dijagonala nijednog drugog pravilnog mnogokuta nije bliži broju 400.)

Neka su A, B, C, D i E uzastopni vrhovi tog mnogokuta. Odredite kut između pravaca AB i DE .

5. (7 b) Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Označimo težišta trokuta ABS, BCS, CDS i DAS redom s T_1, T_2, T_3 i T_4 . Dokažite da je četverokut $T_1T_2T_3T_4$ također paralelogram.

Ako je četverokut $T_1T_2T_3T_4$ romb, što možete zaključiti o paralelogramu $ABCD$?

6. (7 b) Za duljine osnovica trapeza $ABCD$ vrijedi $|AB| : |CD| = 7 : 3$. Na krakovima \overline{AD} i \overline{BC} odabrane su redom točke E i F takve da vrijedi

$$3|AE| = 2|ED| \quad \text{i} \quad 3|BF| = 2|FC|.$$

Kroz točku D prolazi paralela sa stranicom \overline{BC} koja siječe dužine \overline{AB} i \overline{EF} redom u točkama G i H . Odredite omjer površina trokuta EDH i četverokuta $GBFH$.

7. (7 b) Neka je ABC trokut sa stranicama duljina $|AB| = 150$, $|BC| = 105$, $|CA| = 120$.

Na stranici \overline{BC} nalaze se točke A_1 i A_2 takve da je $|BA_1| = 60$ i $|CA_2| = 24$.

Na stranici \overline{CA} nalaze se točke B_1 i B_2 takve da je $|CB_1| = 21$ i $|AB_2| = 40$.

Na stranici \overline{AB} nalaze se točke C_1 i C_2 takve da je $|AC_1| = 32$ i $|BC_2| = 42$.

Odredite opseg šesterokuta $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$.

Uputa: uočite slične trokute!

8. (7 b) - bonus zadatak

U jednakokraknom trokutu ABC osnovica \overline{AB} je kraća od krakova. Visina iz vrha A dijeli kut $\sphericalangle CAB$ na dva dijela od kojih je jedan dvostruko veći od drugog.

Dokažite da je $|CH| = |AB|$, gdje je H ortocentar trokuta ABC .