

1	2	3	4	5	$\Sigma$

Ime i prezime, JMBAG: \_\_\_\_\_

## ELEMENTARNA GEOMETRIJA

drugi kolokvij - 31. siječnja 2020.

**Napomene:** Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

**Obrazložite sve svoje zaključke!**

1. (bodovi: 2+4+1)

- (a) Definirajte tetivni četverokut. Iskažite teorem o tetivnom četverokutu (karakterizaciju).
- (b) Dokažite da u trokutu sa stranicama duljina  $a$ ,  $b$  i  $c$  i tupim kutom  $\gamma$  vrijedi teorem o kosinusu  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .
- (c) Provjerite da za  $n$ -terostranu prizmu vrijedi Eulerova formula.

2. Neka je  $ABCD$  tangencijalni četverokut s pravim kutom u vrhu  $D$  čija dijagonala  $\overline{BD}$  raspolažlja kut  $\sphericalangle ABC$ . Ako opseg četverokuta  $ABCD$  iznosi 50, a duljina dijagonale  $|AC| = 10\sqrt{2}$ , izračunajte polumjer upisane kružnice tog četverokuta.

3. Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Ako je  $\sphericalangle B = 71^\circ 20'$  i  $\sphericalangle C = 40^\circ 40'$ , odredite kutove trokuta  $ABH$ . Dokažite da su opisane kružnice trokuta  $ABC$  i  $ABH$  sukladne.

4. Neka  $r_O(X)$  označava sliku točke  $X$  pri rotaciji oko  $O$  za  $60^\circ$  u pozitivnom smjeru.

Dan je pozitivno orijentirani jednakostranični trokut  $ABC$  i točka  $P$  unutar njega. Neka je  $D = r_A(P)$ ,  $E = r_B(P)$  i  $F = r_C(P)$ . Dokažite da je zbroj udaljenosti točke  $P$  od vrhova trokuta  $DEF$  jednak zbroju udaljenosti točke  $P$  od vrhova trokuta  $ABC$ . Odredite omjer površine trokuta  $ABC$  i površine šesterokuta  $AEBFCD$ .

5. Osnovka kose prizme  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  je romb s dijagonalama duljina  $|AC| = d$  i  $|BD| = 2d$ . Dužina  $\overline{CD_1}$  okomita je na ravnine osnovki, a duljina visine prizme iznosi  $d$ . Odredite kut  $\sphericalangle DC_1 A_1$ . (Dovoljno je odrediti vrijednost neke od trigonometrijskih funkcija tog kuta.)

1	2	3	4	5	$\Sigma$

Ime i prezime, JMBAG: \_\_\_\_\_

## ELEMENTARNA GEOMETRIJA

drugi kolokvij - 31. siječnja 2020.

**Napomene:** Kolokvij ima ukupno 5 zadataka, svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Odmah potpišite sva tri lista papira koje ste dobili.

Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

**Obrazložite sve svoje zaključke!**

1. (bodovi: 2+4+1)

- (a) Definirajte tangencijalni četverokut. Iskažite teorem o tangencijalnom četverokutu (karakterizaciju).
- (b) Dokažite da u tupokutnom trokutu s tupim kutom  $\alpha$  vrijedi teorem o kosinusu  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .
- (c) Provjerite da za  $n$ -terostranu piramidu vrijedi Eulerova formula.

2. Neka je  $ABCD$  tangencijalni četverokut čija dijagonala  $\overline{AC}$  raspolavlja kut  $\sphericalangle BCD$ . Opseg četverokuta  $ABCD$  iznosi  $30\sqrt{2}$ , duljina dijagonale  $|BD| = 10$ , a kut  $\sphericalangle BAD$  je pravi. Izračunajte polumjer upisane kružnice tog četverokuta.

3. Neka je  $H$  ortocentar trokuta  $ABC$ . Ako je  $\sphericalangle A = 62^\circ 40'$  i  $\sphericalangle B = 46^\circ 20'$ , odredite kutove trokuta  $BCH$ . Dokažite da trokuti  $ABC$  i  $BCH$  imaju sukladne opisane kružnice.

4. Neka  $r_S(X)$  označava sliku točke  $X$  pri rotaciji oko  $S$  za  $60^\circ$  u pozitivnom smjeru.

Dan je pozitivno orijentirani jednakostranični trokut  $ABC$  i točka  $T$  unutar njega. Neka je  $D = r_A(T)$ ,  $E = r_B(T)$  i  $F = r_C(T)$ . Dokažite da je zbroj udaljenosti točke  $T$  od vrhova trokuta  $DEF$  jednak zbroju udaljenosti točke  $T$  od vrhova trokuta  $ABC$ . Odredite omjer površine trokuta  $ABC$  i površine šesterokuta  $AEBFCD$ .

5. Osnovka kose prizme  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  je romb s dijagonalama duljina  $|BD| = d$  i  $|AC| = 2d$ . Dužina  $\overline{AB_1}$  okomita je na ravnine osnovki, a duljina visine prizme je  $d$ . Odredite kut  $\sphericalangle BA_1 C_1$ . (Dovoljno je odrediti vrijednost neke od trigonometrijskih funkcija tog kuta.)