Vjerojatnost

predavanja

Nikola Sandrić i Zoran Vondraček

28. siječnja 2019.

Sadržaj

Poglavlje 0

Uvod

0.1 Slučajnost

Živimo u svijetu koji je u raznim aspektima slučajan i neizvjestan. Na razna pitanja ne možemo odgovoriti sa sigurnošću. Na primjer, hoće li sutra padati kiša, tko će pobijediti na sljedećim izborima, kolika će biti vrijednost CROBEX-a na kraju 2018. godine, hoću li u sljedećoj godini imati prometnu nesreću, hoću li ozbiljno oboljeti u sljedećih 5 godina, je li optuženik počinio zločin za koji ga se tereti (neizvjesnost u prošlosti), hoću li u bacanju dvije igraće kocke dobiti zbroj 7, koji brojevi će biti izvučeni u lotu ovaj tjedan, itd.

Ljudski odnos prema neizvjesnosti (slučajnosti) je višestruk i različit: često se želimo zaštiti od nesigurnih događaja (kupovanje raznih osiguranja), ponekad tražimo dodatnu nesigurnost (kockanje, klađenje). Svatko od nas ima unutarnji koncept slučajnosti, što pod tim podrazumijeva te kako uspoređuje razne slučajnosti.

Naš zadatak u ovom kolegiju je opisati i matematički analizirati koncepte slučajnosti i neizvjesnosti koji su intuitivno zajednički raznovrsnim nabrojenim primjerima.

0.2 Modeli

Slučajni događaji nisu svi jednako vjerojatni; za neke intuitivno osjećamo da su vjerojatniji od drugih. Na primjer, u američkom ruletu crno polje je vjerojatnije od zelenog (18 crnih, 2 zelena – nule), oluja s grmljavinom vjerojatnija je tokom poslijepodneva nego ujutro itd. Vjerojatnosti slučajnih događaja su usporedive te je prirodno reprezentirati ih na numeričkoj skali, tj. brojevima. To zahtijeva matematički modelom. Postoji nekoliko razloga za model:

(1) koristan model treba biti jednostavniji od realnosti;

(2) matematički modeli su apstraktni te stoga nevezani svojim primjenama;

(3) matematički model omogućuje upotrebu jakog matematičkog aparata.

0.3 Simetrija

Tipične vjerojatnosne tvrdnje:

(a) vjerojatnost pisma kod bacanja simetričnog novčića je 50%;

(b) vjerojatnost da je slučajno izvučena karta iz špila pik jednaka je 25%;

(c) vjerojatnost crnog polja u američkom ruletu je 18/38.

Kako smo došli do tih brojeva? Na primjer u (b), *slučajno izvučena karta* se interpretira kao sve karte u špilu su jednako vjerojatne. Budući da špil sadrži 52 karte od kojih je 13 pikova, dolazimo do broja $13/52 = 1/4 = 25\%$. U primjeru (a), *simetričan novčić* znači da su pismo i glava jednako vjerojatni, a u primjeru (c) imamo 18 crnih, 18 crvenih te 2 zelena polja, koja su sva jednako vjerojatna. Pišemo $\mathbb{P}(A) = p$, $A =$ palo je pismo, izvučena karta je pik, odabrano polje je crno.

Gornji primjeri vode do sljedećeg pristupa vjerojatnosti: pretpostavimo da pokus (procedura) sa slučajnim ishodom ima n mogućih ishoda. Nadalje, pretpostavimo da su zbog razloga simetrije svi ti ishodi *jednako* vjerojatni. Ako je A kolekcija od r takvih ishoda, onda je

$$\mathbb{P}(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{broj ishoda u } A}{\text{ukupan broj ishoda}}\,.$$

Uočite $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$. Ako A sadrži sve ishode, onda je $\mathbb{P}(A) = 1$; ako A ne sadrži niti jedan ishod, $\mathbb{P}(A) = 0$.

Ovakav pristup vjerojatnosti ima raznih problema. Na primjer,

(1) Mnoge slučajne procedure ne sadrže u sebi očiglednu (ili bilo kakvu) simetriju;

(2) Donekle je zabrinjavajuće da ne treba izvršiti pokus (ili puno pokusa), npr. bacanja novčića, da bi se zaključilo da je vjerojatnost pisma 50%;

(3) Zbog razloga simetrije pretpostavljeno je da su svi ishodi jednako vjerojatni. Ukoliko želimo definirati pojam *vjerojatnosti* ovaj pristup čini se kružnim.

0.4 Asimptotsko ponašanje

Promatramo slučajnu proceduru (pokus) s konačno mnogo ishoda koji nisu nužno jednako vjerojatni (nema simetrije). Na primjer, bacamo namještenu ili oštećenu igraću kocku. Kako možemo definirati vjerojatnost $\mathbb{P}(A)$ bilo kojeg događaja koji nas zanima, npr. $A =$ pala je šestica?

Iako problem ne sadrži simetriju, možemo uvesti simetriju na drugi način. Pretpostavimo da bacamo kocku n puta, n velik te neka je $n(A)$ broj koliko puta se u tih n pokusa dogodio A (koliko puta je pala šestica). Tada, uz pretpostavku da su sva bacanja bila pod sličnim uvjetima, simetrija među bacanjima sugerira da je

$$\mathbb{P}(A) \approx \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{broj pojavljivanja događaja } A}{\text{broj ponanvljanja pokusa}}\,.$$

Broj $n(A)/n$ nazivamo *relativna frekvencija* događaja A (u n pokusa). Kada $n \to \infty$, očekujemo da $n(A)/n$ konvergira nekoj vrijednosti. To vodi na sljedeću moguću definiciju vjerojatnosti:

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}\,.$$

Uočimo da je i u ovoj situaciji $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$. Ovaj pristup vjerojatnosti također ima razne probleme:

(1) Nije jasno zašto bi gornji limes postojao;

(2) Čak ako taj limes postoji za svaki niz ponovljenih pokusa, nije jasno zašto bi svaki takav niz dao isti limes;

(3) Naravno, niti jedan pokus ne može se ponoviti beskonačno mnogo puta, a neki slučajni pokusi ne više od jedanput.

0.5 Isplate

Mnoge slučajne procedure nisu ni simetrične niti se mogu ponavljati pod sličnim uvjetima. Primjeri su konjske trke, nogometne utakmice, izbori itd. No, to ne sprječava kladioničare da i takvim događajima pridruže vjerojatnosti (engl. odds) u smislu omjera uplata i isplata. Kako se u tom kontekstu mogu definirati vjerojatnosti? Jedan mogući pristup zasniva se na "pravednoj cijeni".

Primjer 0.1 Baca se igraća kocka. Kladite se na broj 5. Ukoliko stvarno padne petica dobivate 60 kn. Koliko ste spremni platiti za takvu igru? Pretpostavimo da igra šestero ljudi od kojih se svi klade na različite brojeve te da svakom od igrača takva igra vrijedi isto, recimo n kn. Ukupan ulog je tada $6n$ kn. Budući da je isplata 60 kn, treba vrijediti $6n = 60$, tj. $n = 10$ kn. To znači da je pravedna cijena takve igre 10 kn. U slučaju isplate od 1 kn i vrijednosti igre p, vrijedilo bi $1 = 6p$, odnosno $p = 1/6$. Takav p možemo uzeti kao vjerojatnost pojedinog broja pri bacanju kocke.

Općenitije, pretpostavimo da je isplata (nagrada) u nekoj igri na sreću d kn, a vjerojatnost događaja koji donosi nagradu $p \in (0, 1)$. Tada je vrijednost ("pravedna cijena") takve igre dp kn. Taj argument ima i obrat: pretpostavimo da je nagrada u igri na sreću d kn, a Vi ste za tu igru spremni platiti a kn. To znači da je Vaša procjena vjerojatnosti događaja koji donosi nagradu $p = a/d \in (0, 1)$.

Dakle, vjerojatnosti događaja mogu se, barem implicitno, definirati pomoću "pravedne cijene" slučajne igre. Takav pristup vjerojatnosti vodi do pojma očekivanja.

0.6 Subjektivna vjerojatnost

Mnogi slučajni događaji nemaju simetriju, ne mogu se ponavljati, a niti ideja klađenja (odnosno "pravedne cijene") nije prihvatljiva. Na primjer, kako bismo definirali vjerojatnost uspješnog izlječenja nakon operacije? Ili vjerojatnost da je optuženik kriv? Takvi problemi vode do subjektivnog pristupa vjerojatnosti u kojem je vjerojatnost mjera stupnja vjerovanja. Dosta je jasno da takav pristup vjerojatnosti ne može dovesti do jasnog jednostavnog matematičkog modela.

0.7 Zaključak

U ovom uvodnom poglavlju diskutirali smo neke moguće interpretacije vjerojatnosti (simetrija, asimptotsko ponašanje, isplate, subjektivna vjerojatnost) te smo interpretirali vjerojatnost kao proširenje pojma omjera. Samim time zaključili smo da je vjerojatnost broj između 0 i 1, gdje 0 označava nemogućnost, a 1 izvjesnost.

Međutim, ovdje se nameće niz (nematematičkih) pitanja, kojima se u ovom kolegiju nećemo baviti:

(1) Može li bilo što stvarno biti slučajno? Ovo pitanje je pitanje determinizma. Međutim, bez obzira na to, prirodno se nameće ideja da bilo što čija priroda ponašanja dopušta izbor bude shvaćeno kao slučajno.

(2) Što je "stvarno" vjerojatnost? Ovdje ne ulazimo u to (filozofsko) pitanje. Za nas će vjerojatnost biti broj koji pridružujemo nekom precizno definiranom slučajnom događaju.

(3) Treba li teorija vjerojatnosti biti apstraktna i komplicirana? Ništa manje niti više nego svaka druga matematička teorija. Teorija vjerojatnosti koristi se za opis svijeta oko nas. Međutim, vjerojatnost nije toliko shvatljiva kao primjerice neke grane fizike koje realno opisuju svijet oko nas. Odgovarajući precizni instrumenti mjere jakost električnog polja, magnetskog polja, temperaturu i sl. Vjerojatnost mjerimo mi sami i to vrlo neprecizno. Veliki problem je nedostatak intuicije pri određivanju vjerojatnosti slučajnih događaja.

Primjer 0.2 U prostoriji se nalazi n ljudi. Označimo s $p(n)$ vjerojatnost da barem dvije osobe imaju rođendan na isti dan. Također, pretpostavimo da promatrana godina nije prijestupna te da je svaki dan u godini jednako vjerojatan (simetrija). Koliki je najmanji n takav da je $p(n) \geq 1/2$?

Prvo uočimo da je $p(1) = 0$ te $p(n) = 1$ za $n \geq 366$. Nadalje, uočimo da $1 - p(n)$ predstavlja vjerojatnost da nikoje dvije osobe nemaju rođendan na isti dan. Zbog pretpostavke simetrije, ukupan broj ishoda pokusa je 365^n. Naime, svaka od n osoba može imati rođendan na bilo koji dan u godini (što je 365) pa primjenom pravila produkta dolazimo do željenog broja. Analogno, broj ishoda događaja da nikoje dvije osobe nemaju rođendan na isti dan je $365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$. Preciznije, prva osoba može imati rođendan na bilo koji dan u godini (što je 365), druga osoba može imati rođendan na bilo koji dan u godini osim dana na koji je rođena prva osoba (što je 364) te, induktivno, n-ta osoba može imati rođendan na bilo koji da u godini osim na dane na koje rođedan imaju osobe 1, 2, …, $n-1$ (što je $365-n+1$). Sada, pravilom produkta dolazimo do željenog broja. Dakle, za $2 \leq n \leq 365$ imamo

$$1 - p(n) = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^n},$$

tj.

$$p(n) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365-n+1)}{365^n}.$$

Konačno, imamo $p(22) \approx 0.475695$ i $p(23) \approx 0.507297$.

Primjer 0.3 Laboratorijski krvni test je 95% učinkovit u otkrivanju konkretne bolesti kada je ta bolest prisutna. Test također ukazuje na bolest i u 1% slučajeva kada je osoba zdrava (*false positive*). Poznato je da 0.1% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da (slučajno odabrana) osoba ima tu bolest ako je rezultat testa pozitivan?

Promotrimo populaciju od 1000000 ljudi. Njih 0.1% ima bolest; dakle 1000 ljudi je bolesno. Od tih 1000 ljudi, na testiranju će biti pozitivno njih 95%, tj. 950. Od preostalih 999000 zdravih, na testu će pozitivan rezultat imati njih 1%, odnosno 9990. Dakle, ukupno pozitivnih bit će 950+9990=10940, od kojih je samo 950 bolesno. Sada zaključujemo da je tražena vjerojatnost $950/10940 \approx 0.0868$.

Primjer 0.4 Igrač igra igru loto 6 od 45 svaki tjedan s jednom kombinacijom. Cijena kombinacije iznosi 2 kn. Koliki je očekivani broj tjedana do pogotka?

Prirodno je za pretpostaviti da je svaka kombinacija jednako vjerojatna (simetrija). Kako kombinacija od 6 brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 45\}$ imamo $\binom{45}{6}$ to je vjerojatnost jedne kombinacije $p = 1/\binom{45}{6}$. Sada zaključujemo da je očekivani broj tjedana do pogotka jednak $1/p = \binom{45}{6} = 8145060$ tjedana, što je otprilike 156636 godina. Nadalje, ako igrač igra sistem od 10 brojeva, onda je pripadna vjerojatnost pogotka $p = \binom{10}{6}/\binom{45}{6}$. U toj situaciji, očekivani broj tjedana do pogotka jednak je $1/p = \binom{45}{6}/\binom{10}{6} = 38786$ tjedana, odnosno otprilike 745 godina. Ako igrač igra sistem od 20 brojeva, onda je pripadna vjerojatnost pogotka $p = \binom{20}{6}/\binom{45}{6}$ te očekivani broj tjedana do pogotka $1/p = \binom{45}{6}/\binom{20}{6} \approx 210$ tjedana, tj. otprilike 4 godine. Međutim, budući da je cijena sistema 2 kn, trošak po uplati iznosi $2 \cdot \binom{20}{6} = 77572$ kn. Dakle, ukupni očekivani trošak je 16290120 kn.

Poglavlje 1

Vjerojatnost

1.1 Pokus i događaji

U prvom dijelu ovog odjeljka na neformalan način uvodimo pojam pokusa, ishoda i događaja te uvedene pojmove ilustriramo nizom primjera.

Pokus je svaka dobro definirana procedura. Rezultati (ili pojave) pokusa nazivaju se *ishodi* (ili *elementarni događaji*). Skup svih ishoda pokusa zove se *prostor elementarnih događaja* (engl. sample space) i tradicionalno se označava s Ω. Sami elementarni događaji se najčešće označavaju s ω, sa ili bez indeksa. Matematički, prostor elementarnih događaja je skup koji može biti konačan, prebrojivo beskonačan ili neprebrojiv.

Prije provedbe pokusa u pravilu nije jasno koji od ishoda će se dogoditi te se stoga pokus često naziva i slučajnim pokusom. Međutim, za formuliranje bilo kakve matematičke teorije vjerojatnosti potrebno je znati koji su ishodi mogući, tj. potrebno je poznavati prostor elementarnih događaja. Ako ne znamo što se u pokusu može dogoditi, teško je očekivati da ćemo ishodima takvog pokusa moći pridružiti vjerojatnosti.

Vjerojatnosna pitanja najčešće se ne odnose na same ishode, već na kolekcije elementarnih događaja koje nazivamo događaji. Neformalno, *događaj* (u Ω) je podskup prostora elementarnih događaja Ω. Događaje najčešće označavamo velikim početnim slovima abecede, sa ili bez indeksa: $A, B, C, \ldots,$ $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Primjer 1.1 (a) Pokus: bacanje igraće kocke; ishodi: jedna od stranica kocke. Ukoliko je pala stranica s brojem i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, odgovarajući ishod označit ćemo s i. Dakle, prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Matematički, svaki podskup od Ω je događaj. Neki od zanimljivih događaja: $A = \{\text{pao je paran broj}\}$, $B = \{\text{pao je broj veći ili jednak pet}\}$, $C = \{\text{pala je šestica}\}$. Primjetite da su ti događaji opisani riječima što je čest slučaj u vjerojatnosti. Naravno, te događaje možemo i matematički precizno zapisati kao $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6\}$, $C = \{6\}$. Uočite razliku između elementarnog događaja $6 \in \Omega$ i događaja $C = \{6\}$ čiji je jedini element elementarni događaj 6.

(b) Pokus: bacanje novčića; ishodi: pismo ili glava. Ukoliko je palo pismo, odgovarajući ishod označit ćemo s P, a ako je pala glava s G. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{P, G\}$. Svi mogući događaji su $\Omega = \{P, G\}$, $\{P\}$, $\{G\}$ i $\emptyset$. Uočite da su oznake P i G za elementarne događaje proizvoljne. Te elementarne događaje mogli smo označiti npr. sa 0 i 1 uz interpretaciju da 0 označava da je palo pismo, a 1 da je pala glava. U tom slučaju bi prostor elementarnih događaja bio $\Omega = \{0, 1\}$.

(c) Pokus: izvlačenje lota (6 od 45); ishodi: sve moguće kombinacije 6 brojeva iz skupa $A = \{1, 2, \ldots, 45\}$ (tj. svi šesteročlani podskupovi skupa A). Budući da je broj takvih kombinacija 8145060, prostor elementarnih događaja sadrži 8145060 elemenata. Ukoliko imate listić s brojevima $4, 7, 23, 25, 28, 35$, zanimljiv događaj je $B = \{\text{izvučeni su brojevi } 7, 23, 25, 28, 35\} = \{\{i, 7, 23, 25, 28, 35\} : i \in \{1, 2, \ldots, 45\} \setminus \{7, 23, 25, 28, 35\}\}$.

(d) Pokus: podjela karata u beli igračima X, Y, Z i W; ishodi: sve moguće podijele špila od 32 igraće karte na četiri jednaka dijela. Neki događaji: $A = \{X \text{ ima zvanje od } 50\}$, $B = \{\text{jedan od igrača ima sve četiri devetke}\}$.

(e) Pokus: vrijeme sutra; ishodi: nisu u potpunosti dobro definirani. Ukoliko nas zanima hoće li padati kiša ili ne, pokus možemo modelirati s dva elementarna događaja; $\omega_1 =$ kiša će padati i $\omega_2 =$ kiša neće padati. U tom slučaju je prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

(f) Pokus: slučajni izbor točke (realnog broja) u segmentu $[0, 1]$; ishodi: svi realni brojevi $\omega \in [0, 1]$. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = [0, 1]$. Pretpostavimo da se neka osoba kladi da će slučajno izabrana točka ω

biti (strogo) veća od 1/2. Iako je prostor elementarnih događaja Ω i dalje prikladan, u stvari tu osobu zanimaju samo dva ishoda tog slučajnog pokusa: izabrana točka je veća od 1/2, ili izabrana točka je manja od 1/2. Zato bi za tu osobu dovoljno dobar prostor elementarnih događaja bio dvočlan skup $\widetilde{\Omega} = \{$ izabrana točka je veća od 1/2, izabrana točka je manja od 1/2$\}$.

(g) Pokus: bacanje dvije simetrične igraće kocke; ishodi: brojevi koji su pali na kockama. Za prostor elementarnih događaja uzimamo

$$\Omega = \{(i, j) : 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\},$$

gdje uređen par (i, j) označava da je na prvoj kocki pao broj i, a na drugoj j. Neki od događaja su

$$\begin{aligned} A &= \{\text{zboj brojeva je 7}\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \\ B &= \{\text{1. kocka pokazuje veći broj od 2.}\} = \{(i,j) : 1 \le j < i \le 6\} \\ C &= \{\text{na obje kocke je pao isti broj}\} = \{(1,1),(2,2),\ldots,(6,6)\}. \end{aligned}$$

Primjer 1.2 n osoba je slučajno odabrano za telefonsku anketu o novoj pasti za zube te trebaju odabrati jedan od tri ponuđena odgovora: 1. *u buduće ću uvijek koristiti novu pastu za zube*, 2. *novu zubnu pastu neću nikada korisiti* i 3. *pastu ću koristiti povremeno*. Za prostor elementrnih događaja uzimamo

$$\Omega = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Z}_+,\ x + y + z = n\},$$

gdje x označava broj anketiranih osoba koji će u buduće uvijek koristiti novu pastu, y broj osoba koji neće nikada koristiti pastu te z broj osoba koji će povremeno koristiti pastu. Neki od zanimljiih događaja za kompaniju koja proizvodi pastu su

(a) $A = \{$više ljudi će uvijek koristiti pastu od onih koji neće nikada$\}$
$= \{(x, y, z) \in \Omega : x > y\}$.

(b) $B = \{$većina ljudi će povremeno koristiti pastu$\}$
$= \{(x, y, z) \in \Omega : z > x + y\}$.

Podsjetimo se, događaj je podskup prostora elementarnih događaja. Označimo s $\mathcal{F}$ familiju svih događaja. Matematički, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, gdje $\mathcal{P}(\Omega)$ označava partitivni skup od Ω. Često, ali ne uvijek, za familiju svih događaja $\mathcal{F}$ možemo uzeti $\mathcal{P}(\Omega)$. Pogledajmo kakva svojstva možemo zahtijevati od familije $\mathcal{F}$:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$ – nešto se dogodilo. Događaj Ω nazivamo sigurnim događajem.

(b) Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$. Ako znamo da se A dogodio, onda se A^c nije dogodio. Događaj A^c interpretiramo kao A se nije dogodio. Specijalno, iz (a) i (b) slijedi (c).

(c) $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$; $\emptyset$ nazivamo nemogućim događajem.

(d) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, onda je $A \cup B \in \mathcal{F}$; događaj $A \cup B$ interpretiramo kao dogodio se A ili B ili oba.

(e) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, onda je $A \cap B \in \mathcal{F}$; događaj $A \cap B$ interpretiramo kao dogodili su se i A i B (istovremeno). Uočimo da ovo svojstvo slijedi iz (b) i (d): $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.

(f) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$, onda su $A \setminus B = A \cap B^c$ i $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ također u $\mathcal{F}$. Događaj $A \setminus B$ interpretiramo kao dogodio se A ali ne B, dok $A \triangle B$ interpretiramo kao dogodio se točno jedan od događaja A i B.

Operacije među događajima možemo skicirati pomoću Vennovih dijagrama. Uočite da skupovnu inkluziju $A \subseteq B$, A, B događaji, interpretiramo kao: ako se dogodio A, onda se dogodio i B.

Primjer 1.3 Pokus se sastoji od bacanja simetričnog novčića sve dok po prvi put ne padne pismo. Što su elementarni događaji za taj pokus? Jedan mogući pristup je da za elementarne događaje uzmemo nizove

$$\underbrace{G \ldots G}_{n-1 \text{ puta}} P,$$

$n \in \mathbb{N}$, gdje se navedeni elementarni dogoađaj interpretira kao: u prvih $n-1$ bacanja pala je glava, u n-tom bacanju palo je pismo. To vodi na sljedeći prostor elementarnih događaja:

$$\widetilde{\Omega} = \{P, GP, GGP, GGGP, \ldots\}.$$

Uočite da je takav prostor elementarnih događaja (prebrojivo) beskonačan. Nadalje, jasno je da niti jedan konačan prostor elementarnih događaja ne može opisati ovaj slučajni pokus.

Iako možda na prvi pogled prihvatljiv, $\widetilde{\Omega}$ nije najprikladniji kao model navedenog pokusa. Na primjer, u takvom modelu ne možemo opisati mogućnost da pismo nikada neće pasti. Stavimo $B = \{\text{pismo nikada neće pasti}\}$. Tada B nije podskup od $\widetilde{\Omega}$. Kao prikladniji model elementarnih događaja uvodimo

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i = P \text{ ili } G,\ i \in \mathbb{N}\} = \{P, G\}^{\mathbb{N}}.$$

Iako se naš pokus sastoji u bacanju novčića do prvog pisma, možemo pretpostaviti i da se nakon prvog pisma nastavlja bacanje novčića (beskonačno mnogo puta). Dakle, elementarni događaji su svi beskonačni nizovi simbola P i G. Prostor elementarnih događaja Ω je neprebrojivo beskonačan. Neki od događaja koji nas mogu zanimati su sljedeći: za $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
A_i &= \{\text{pismo je po prvi put palo u } i\text{-tom bacanju}\} \\
&= \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_j = G, j = 1, 2, \dots, i-1, \omega_i = P\} \\
B_i &= \{\text{pismo nije palo do (uključivo) } i\text{-tog bacanja}\} \\
&= \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_j = G, j = 1, 2, \dots, i\} = (A_1 \cup \cdots \cup A_i)^c.
\end{aligned}$$

U ovom modelu je $B = \{\text{pismo nikada neće pasti}\} = \{(G, G, G, \dots)\}$. Uočite da vrijedi $B = \cap_{i=1}^{\infty} B_i$. To sugerira da i prebrojivo beskonačne operacije nad događajima rezultiraju događajima, odnosno da je familija događaja $\mathcal{F}$ zatvorena ne samo na konačne, već i na prebrojivo beskonačne skupovne operacije.

Ovaj primjer završavamo napomenom da na prostoru elementarnih događaja Ω prirodna familija događaja $\mathcal{F}$ neće biti jednaka partitivnom skupu $\mathcal{P}(\Omega)$. Razlog za to je netrivijalan (te ga na ovom mjestu ne možemo dati) – ugrubo, na $\mathcal{P}(\Omega)$ se ne može konstruirati vjerojatnost u smislu Definicije 1.7.

U slučaju konačnog prostora elementarnih događaja Ω, svaki događaj A u Ω ima konačno mnogo elemenata (ishoda). Stavimo $|A| =$ broj elemenata u A. Tada vrijedi: (a) Za A i B disjunktne događaje, $|A \cup B| = |A| + |B|$, (b) Za $A \subseteq B$, $|A| \leq |B|$, (c) $|\emptyset| = 0$ te (d) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

U nastavku odjeljka dajemo formalnu definiciju familije događaja i izvodima svojstva takve familije.

Definicija 1.4 *Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se* σ-algebra *(ili σ-algebra događaja), ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$*;*

(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$*, onda je i* $A^c \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na komplement);*

(iii) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, onda je i* $\bigcup_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na prebrojive unije).*

Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ *zove se* izmjeriv prostor*.*

Riječima, σ-algebra na nepraznom skupu Ω je familija podskupova od Ω koja sadrži Ω i zatvorena je na komplementiranje i prebrojive unije. U sljedećoj propoziciji navedena su neka svojstva σ-algebre. Elementarni dokazi tih svojstava ostavljeni su za domaću zadaću.

Propozicija 1.5 *Neka je* $\mathcal{F}$ σ*-algebra na nepraznom skupu* Ω*. Tada vrijedi:*

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$*;*

(b) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$*,* $j \in \mathbb{N}$*, onda je i* $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na prebrojive presjeke).*

(c) Za svaki $n \in \mathbb{N}$*, ako su* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$*, onda je i* $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ *(zatvorenost na konačne unije).*

Familija podskupova od Ω koja zadovoljava svojstva (i) i (ii) iz Definicije 1.4 te (c) iz Propozicije 1.5 naziva se *algebra* podskupova od Ω. Dakle, svaka σ-algebra ujedno je i algebra (ali ne i obratno).

Primjer 1.6 (a) Nađite primjer algebre koja nije σ-algebra.

(b) Ako su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ dvije σ-algebre na Ω, onda je i $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ σ-algebra na Ω. Općenitije, ako je $\{\mathcal{F}_i, i \in I\}$ familija σ-algebri na Ω, onda je i $\cap_{i\in I}\mathcal{F}_i$ σ-algebra na Ω. Dokažite!

(c) Neka je $\mathcal{G}$ proizvoljna familija podskupova od Ω. *σ-algebra generirana familijom* $\mathcal{G}$ definira se kao

$$\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \supseteq \mathcal{G} \\ \mathcal{F}\ \sigma-\text{algebra}}} \mathcal{F}\,,$$

presjek svih σ-algebri koje sadrže familiju $\mathcal{G}$. Pokažite da je definicija dobra, tj. da postoji barem jedna σ-algebra koja sadrži $\mathcal{G}$. Nadalje, pokažite da je $\sigma(\mathcal{G})$ najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{G}$.

(d) Neka je $\mathcal{G}_1 := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R},\, a < b\}$. Tada pripadnu generiranu σ-algebru $\sigma(\mathcal{G}_1)$ nazivamo *Borelovom σ-algebrom* na $\mathbb{R}$. Definirajmo

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_2 &:= \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\, a < b\}\\
\mathcal{G}_3 &:= \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\, a < b\}\\
\mathcal{G}_4 &:= \{[a,b] : a,b \in \mathbb{R},\, a < b\}\\
\mathcal{G}_5 &:= \{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathcal{G}_6 &:= \{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathcal{G}_7 &:= \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}\\
\mathcal{G}_8 &:= \{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Pokažite da vrijedi

$$\sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{G}_2) = \sigma(\mathcal{G}_3) = \sigma(\mathcal{G}_4) = \sigma(\mathcal{G}_5) = \sigma(\mathcal{G}_6) = \sigma(\mathcal{G}_7) = \sigma(\mathcal{G}_8).$$

Nadalje, pokažite da je $\sigma(\mathcal{G}_1)$ jednaka najmanjoj sigma algebri koja sadrži, redom, $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_8$ ali uz zahtjev $a,b \in \mathbb{Q}$ (umjesto $a,b \in \mathbb{R}$).

Rješenje:

(a) Neka je Ω beskonačan skup te neka je $\mathcal{F}$ kolekcija poskupova od Ω koji su konačni ili im je komplement konačan. Sada se lagano provjeri da je $\mathcal{F}$ algebra koja nije σ-algebra.

(b) Tvrdnja slijedi izravno iz definicije σ-algebre.

(c) Očito je $\mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebra koja sadrži $\mathcal{G}$ pa je $\sigma(\mathcal{G})$ dobro definirana. Druga tvrdnja zadatka je očita.

(d) Pokažimo da je $\sigma(\mathcal{G}_1) = \sigma(\mathcal{G}_2)$. Ostali slučajevi slijede analogno te ih ostavljamo za domaću zadaću. Uočimo da je dovoljno pokazati da je za proizvoljne $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $(a,b) \in \sigma(\mathcal{G}_2)$ te $(a,b] \in \sigma(\mathcal{G}_1)$. Imamo

$$(a,b) = \bigcup_{n=\lfloor \frac{1}{b-a} \rfloor + 1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \qquad \text{i} \qquad (a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right).$$

U slučaju da su rubovi intervala u $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_8$ racionalni, imamo sljedeće. Stavimo $\bar{\mathcal{G}}_1 := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{Q},\, a < b\}$. Analogno definiramo $\bar{\mathcal{G}}_i$ za $i = 2, \dots, 8$. Pokažimo da je $\mathcal{G}_1 = \bar{\mathcal{G}}_1$. Ponovno, ostali slučajevi slijede analogno te ih ostavljamo za domaću zadaću. Prvo, jasno je da je $\bar{\mathcal{G}}_1 \subseteq \mathcal{G}_1$. Da bi pokazali obratnu inkluziju dovoljno je provjeriti da za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, vrijedi $(a, b) \in \bar{\mathcal{G}}_1$. Neka su $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, redom, padajući i rastući nizovi racionalnih brojeva t.d. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ i $a_1 < b_1$. Tada,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

što dokazuje tvrdnju.

1.2 Vjerojatnost i svojstva

Prisjetimo se dvije moguće interpretacije vjerojatnosti iz uvodnog poglavlja – pomoću simetrije i pomoću relativne frekvencije. U slučaju da prostor elementarnih događaja Ω ima konačno mnogo ishoda koji su zbog razloga simetrije svi jednako vjerojatni, zaključili smo da je prirodno reći da je vjerojatnost nekog događaje A jednaka omjeru broja ishoda u A i ukupnog broja ishoda:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}\,.$$

Ako su A i B disjunktni događaji, onda je $|A \cup B| = |A| + |B|$. Iz toga slijedi da bi trebalo vrijediti

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\,.$$

S druge strane, u frekvencionističkom pristupi vjerojatnosti, s $n(A)$ smo označili broj pojavljivanja događaja A u n ponovljenih pokusa te smo rekli da bi se vjerojatnost od A mogla definirati kao

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n}\,.$$

Opet, u slučaju da su A i B disjunktni događaji, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ te bi slijedilo da je

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A \cup B)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n(A)}{n} + \frac{n(B)}{n} \right) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\,.$$

Ova dva pristupa sugeriraju da kakogod definirali vjerojatnost, prirodno je zahtijevati da ima gornje svojstvo *aditivnosti*: ako su A i B disjunktni događaji, onda vrijedi $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Iz tog svojstva jednostavno je indukcijom pokazati da za po parovima disjunktne događaje $A_1, \ldots, A_n$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

U slučaju konačnog prostora elementarnih događaja, aditivnost je dovoljno svojstvo. Međutim, kod beskonačnih prostora elementarnih događaja potrebno je zahtijevati nešto jače svojstvo, tzv. σ-aditivnost – vidi Definiciju 1.7. U uvodu smo također rekli da je vjerojatnost nenegativan broj pridružen događaju te da sigurnom događaju želimo pridružiti vjerojatnost 1.

Gornja razmatranja vode na sljedeću definiciju vjerojatnosti i vjerojatnosnog prostora. Uočite da definicija ne odgovara na pitanje što je stvarno vjerojatnost, već samo postulira svojstva vjerojatnosti.

Definicija 1.7 *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja.* Vjerojatnost *na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:*

*(A1) (*nenegativnost) *Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;*

*(A2) (*normiranost*) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;*

(A3) (σ-aditivnost*) Za svaki niz $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$) vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zove se vjerojatnosni prostor.

Aksiome teorije vjerojatnosti uveo je ruski matematičar Andrej Nikolajevič Kolmogorov u knjizi Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer, 1933.

U nastavku navodimo svojstva vjerojatnosti koja slijede iz aksioma (A1)–(A3). Neka od njih dokazujemo, a preostala su za domaću zadaću.

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$; zaista, stavimo $p = \mathbb{P}(\emptyset) \geq 0$ (zbog (A1)) te $A_j = \emptyset$, $j \in \mathbb{N}$. Tada je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja pa iz (A3) slijedi

$$p = \mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} p\,.$$

Odavde očito slijedi da je $p = 0$.

(b) (*konačna aditivnost*) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $A_1, \dots, A_n$ po parovima disjunktnih događaja iz $\mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

Zaista, stavimo $A_j = \emptyset$, $j = n+1, n+2, \dots$. Tada je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ (beskonačan) niz po parovima disjunktnih događaja. Korištenjem aksioma (A3) u drugoj jednakosti i svojstva (a) u posljednjoj, slijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) + \sum_{j=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\,.\end{aligned}$$

(c) $\mathbb{P}(A^c) = 1-\mathbb{P}(A)$; zaista, iz (A2) i svojstva (b), $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A\cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

(d) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$; zaista, zbog konačne aditivnosti vrijedi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B)$. Specijalno, ako je $B \subseteq A$, imamo $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$.

(e) (*monotonost*) Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B$, onda je $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$. Zaista, $B = A \cup (B \setminus A)$ otkud zbog svojstva (b) i (A1),

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)\,.$$

Uočite da niti u jednom od gornjih svojstava nismo koristili pretpostavku da $\mathbb{P}$ prima vrijednosti u $[0, 1]$ (već samo nenegativnost iz aksioma (A1)). To svojstvo slijedi iz (e): za $A \in \mathcal{F}$, $A \subseteq \Omega$ pa je $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$ (po aksiomu (A2)).

(f) Sljedeća formula, iako jednostavna, fundamentalna je za računanje vjerojatnosti unije ne nužno disjunktnih događaja. Za $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.$$

Dokaz: Događaj $A \cup B$ napišemo kao uniju tri po parovima disjunktna događaja: $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. Iz konačne aditivnosti, svojstva (b) te zatim dvostrukom primjenom svojstva (d), slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \big(\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\big) + \big(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)\big) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\,.
\end{aligned}$$

(g) (*Sylvestrova formula* ili *formula uključivanja-isključivanja*) To je generalizacija prethodnog svojstva na više od dva događaja. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ događaji u $\mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})\,. \tag{1.1}$$

Dokaz: indukcijom po n. Za $n = 1$ obje strane su jednake $\mathbb{P}(A_1)$ pa tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n. Za $n+1$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \bigcup A_{n+1}\right) \\
&\overset{(f)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \bigcap A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Big(A_i \bigcap A_{n+1}\Big)\right) \\
&= \text{(po pretpostavci indukcije)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad - \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n+1} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \,.
\end{aligned}
$$

(h) (*Booleove nejednakosti*). Za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) &\overset{(f)}{\ge} \mathbb{P}(A \cup B) \\
&\overset{(e)}{\ge} \max(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)) \\
&\overset{(e)}{\ge} \mathbb{P}(A \cap B) \\
&\overset{(f)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \\
&\overset{(e)}{\ge} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \,.
\end{aligned}
$$

Svojstvo iz prvog retka zove se *subaditivnost* vjerojatnosti. Poopćenje tog svojstva na beskonačan niz događaja je dano u (i).

(i) (σ-*subaditivnost*) Neka je $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \,,
$$

(gdje red na desnoj strani može divergirati u $+\infty$).

Dokaz: definiramo novi niz $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja na sljedeći način. Stavimo $B_1 := A_1$ te za $j \ge 2$, $B_j := A_j \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{j-1})$. Očito je $B_j \in \mathcal{F}$ i $B_j \subseteq A_j$, a jednostavno se vidi da su B_j po parovima disjunktni te da vrijedi $\cup_{j=1}^{\infty} B_j = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Slijedi da je

$$
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \overset{(A3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \overset{(e)}{\le} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \,.
$$

1.3 Konačan vjerojatnosni prostor i Laplaceov model

Pretpostavimo da je prostor elementarnih događaja konačan, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $|\Omega| = n$. Prirodna pretpostavka je da su elementarni događaji $\omega_i \in \Omega$ ujedno i događaji – $\{\omega_i\} \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. U tom slučaju je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, odnosno svaki podskup od Ω je događaj. Zaista, neka je $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Tada je

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \ldots, \omega_{i_k}\} = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\} \in \mathcal{F}\,.$$

Dakle, $\mathcal{P}(\Omega) \subseteq \mathcal{F}$ te kako uvijek vrijedi obratna inkluzija, tvrdnja je pokazana. Uočite da isti zaključak vrijedi i u slučaju kada je Ω prebrojiv: ako je Ω prebrojiv i ako je $\{\omega\} \in \mathcal{F}$ za sve $\omega \in \Omega$, onda je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Promotrimo sada vjerojatnost $\mathbb{P}$ na konačnom prostoru elementarnih događaja sa σ-algebrom $\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$. Budući da je $\{\omega_i\} \in \mathcal{F}$, dobro je definiran broj $p_i := \mathbb{P}(\{\omega_i\}) \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Neka je, kao i gore, $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \ldots, \omega_{i_k}\}$. Tada je zbog konačne aditivnosti vjerojatnosti $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{i_k}\}\right) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}\,. \tag{1.2}$$

Ta formula pokazuje da je vjerojatnost $\mathbb{P}$ u potpunosti određena svojim vrijednostima na elementarnim događajima. Obratno, neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ izmjeriv prostor gdje je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ te pretpostavimo da su nam dani brojevi $p_1, p_2, \ldots, p_n \in [0, 1]$ takvi da je

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1\,.$$

Definiramo funkciju $\mathbb{P}$ na jednočlanim skupovima $\{\omega_i\}$ formulom $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) := p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a na proizvoljan $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2} \ldots, \omega_{i_k}\}$ proširimo pomoću (1.2):

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{\omega_{i_j}\}) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}\,.$$

Tada je $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $\mathcal{P}(\Omega)$. Zaista, $0 \le \mathbb{P}(A) \le \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, pa vrijedi (A1). Nadalje, $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ pa vrijedi (A2). Preostaje provjeriti (A3). Budući da je Ω konačan, dovoljno je provjeriti konačnu aditivnost što ostavljamo kao domaću zadaću. Na taj način je dokazan sljedeći rezultat.

Propozicija 1.8 *Neka je Ω konačan. Svaka vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $\mathcal{P}(\Omega)$ zadana je i u potpunosti određena svojim vrijednostima $\mathbb{P}(\{\omega\})$, $\omega \in \Omega$.*

Isti rezultat, s nešto malo kompliciranijim dokazom, vrijedi i u slučaju kada je Ω prebrojiv.

Primjer 1.9 Pogledajmo ponovno Primjer 1.3. U tom primjeru smo prvo definirali $\widetilde{\Omega} = \{P, GP, GGP, GGGP, \dots\}$ te smo uočili da taj skup nije adekvatan prostor elementarnih događaja za naš pokus. Naime, njime ne možemo opisati mogućnost da pismo neće nikada pasti. Označimo tu mogućnost s $GGG\dots$ te definirajmo $\widehat{\Omega} = \widetilde{\Omega} \cup \{GGG\dots\}$. Jasno je da je tako definirani $\widehat{\Omega}$ zaista prostor elelmtarnih događaja za naš pokus. Nadalje, prema gore komentiranom (budući je $\widehat{\Omega}$ beskonačno prebrojiv), za pripadnu σ-algebru možemo uzeti $\mathcal{P}(\widehat{\Omega})$ te pripadnu vjerojatnost definirati (na elementarnim događajima) sa $\widehat{\mathbb{P}}(\{P\}) = 1/2$, $\widehat{\mathbb{P}}(\{GP\}) = 1/4$, $\widehat{\mathbb{P}}(\{GGP\}) = 1/8$, $\widehat{\mathbb{P}}(\{GGGP\}) = 1/16, \dots$ te $\widehat{\mathbb{P}}(\{GGG\dots\}) = 0$. Konačno, uočimo da vjerojatnosti događaja iz $(\widehat{\Omega}, \mathcal{P}(\widehat{\Omega}), \widehat{\mathbb{P}})$ odgovaraju vjerojatnostima odgovarajućih događaja iz $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdje je Ω prostor elementarnih događaja diskutiran u Primjeru 1.3 te $\mathcal{F}$ i $\mathbb{P}$ su σ-algebra i vjerojatnost (na Ω) diskutirane u potpoglavlju 1.4.

1.3.1 Produkt konačnih vjerojatnosnih prostora

Provodimo dva pokusa koja su, intuitivno, nezavisni jedan od drugog. Neka je $\Omega_1 = \{\omega_1', \dots, \omega_m'\}$ prostor elementarnih događaja prvog pokusa, a $\Omega_2 = \{\omega_1'', \dots, \omega_n''\}$ prostor elementarnih događaja drugog pokusa. Kako izgleda prostor elementarnih događaja za oba pokusa zajedno? Ishod ta dva pokusa je uređen par (ω', ω'') ishoda ω' prvog pokusa i ishoda ω'' drugog pokusa. Zato za prostor elementarnih događaja oba pokusa uzimamo Kartezijev produkt

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega', \omega'') : \omega' \in \Omega_1, \omega'' \in \Omega_2\}.$$

Vrijedi $|\Omega| = |\Omega_1| \cdot |\Omega_2| = mn$.

Neka je $\mathbb{P}_1$ vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ i $\mathbb{P}_2$ vjerojatnost na $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2))$. Intuitivno, vjerojatnost da oba pokusa zajedno rezultiraju ishodom (ω', ω'') jednaka je produktu individualnih vjerojatnosti ishoda prvog i drugog pokusa. To je posljedica pretpostavljene nezavisnosti pokusa. To vodi na konstrukciju tzv. produktne vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Definiramo $\mathbb{P}$ na elementarnim događajima iz Ω sa

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(\omega', \omega'')\}) := \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\})\,.$$

Uočite da vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{(\omega',\omega'')\in\Omega} \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}) \\ &= \left(\sum_{\omega'\in\Omega_1} \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\right)\left(\sum_{\omega''\in\Omega_2} \mathbb{P}_2(\{\omega''\})\right) = 1\,.\end{aligned}$$

Zato se $\mathbb{P}$ može sa jednočlanih podskupova proširiti do vjerojatnosti na $\mathcal{P}(\Omega)$. Tako konstruirana vjerojatnost zove se *produkt vjerojatnosti* $\mathbb{P}_1$ *i* $\mathbb{P}_2$ te se ponekad koristi oznaka $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2$.

Ako je $\Omega_2 = \Omega_1$ i $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1$, onda je $\Omega = \Omega_1^2$, a za produktnu vjerojatnost $\mathbb{P}$ pišemo $\mathbb{P}_1^2$.

Gornja konstrukcija induktivno se proširuje na produkt konačno mnogo (konačnih) vjerojatnosnih prostora. Nadalje, uz malo više tehničkih problema konstrukcija se može provesti i za (konačno mnogo) prebrojivih vjerojatnosnih prostora.

1.3.2 Laplaceov model vjerojatnosti

U nastavku odjeljka diskutiramo Laplaceov model vjerojatnosti. Pretpostavka tog modela je da imamo konačno mnogo ishoda koji su svi jednako vjerojatni. Preciznije, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) := p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $p_1 = p_2 = \cdots = p_n =: p$. Iz Propozicije 1.8 slijedi da $\mathbb{P}$ na jedinstven način možemo proširiti do vjerojatnosti na $\mathcal{P}(\Omega)$. Specijalno, budući da vrijedi (A2), imamo

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} p_i = np\,.$$

Ta jednakost nam daje očigledno svojstvo $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}$. Slijedi da je za proizvoljni $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}\ \ldots, \omega_{i_k}\}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j} = kp = \frac{k}{n} = \frac{|A|}{|\Omega|}\,,$$

odnosno vjerojatnost svakog događaja A jednaka je omjeru broju elemenata od A i broja svih elementarnih događaja.

Primjer 1.10 Kutija sadrži 1000 listića numeriranih brojevima od 1 do 1000. Jedan listić na slučajan način je izvučen iz kutije. Nađite vjerojatnost da je broj na listiću djeljiv s 2,3 ili 5.

Za prostor elementarnih događaja uzimamo $\Omega = \{1, 2, \dots, 1000\}$. Prirodno je pretpostaviti da su svi listići jednako vjerojatni što znači da se nalazimo u Laplaceovom modelu. Stavimo $D_k = \{\text{broj djeljiv s } k\}$. Traži se

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(D_2 \cup D_3 \cup D_5) &= \mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(D_3) + \mathbb{P}(D_5) \\
&\quad -\mathbb{P}(D_2 \cap D_3) - \mathbb{P}(D_2 \cap D_5) - \mathbb{P}(D_3 \cap D_5) + \mathbb{P}(D_2 \cap D_3 \cap D_5) \\
&= \mathbb{P}(D_2) + \mathbb{P}(D_3) + \mathbb{P}(D_5) - \mathbb{P}(D_6) - \mathbb{P}(D_{10}) - \mathbb{P}(D_{15}) + \mathbb{P}(D_{30}) \\
&= \frac{1}{1000}(500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33) = \frac{734}{1000}\,.
\end{aligned}
$$

Primjer 1.11 Kutija sadrži n bijelih i n crnih kuglica. Na slučajan način izvučemo iz kutije dvije kuglice, jednu za drugom (bez vraćanja). Odredite prostor elementarnih događaja i nađite vjerojatnost da su izvučene kuglice različite boje.

Kod odabira prostora elementarnih događaja prirodno je pokušati odabrati elementarne događaje tako da budu jednako vjerojatni, jer nas to vodi do jednostavnog Laplaceovog modela. Možemo pokušati sa $\Omega = \{BB, BC, CB, CC\}$ gdje, npr. BC označava da je prva izvučena kuglica bijela, a druga crna. No, nije jasno jesu li ti događaji jednako vjerojatni. Zato pokušavamo na drugi način. Pretpostavimo da su kuglice u kutiji numerirane brojevima od 1 do $2n$. Izbor dvije kuglice iz kutije tada odgovara izboru uređenog para različitih brojeva, što vodi na sljedeći prostor elementarnih događaja:

$$\Omega = \{(i, j) : \, 1 \le i, j \le 2n, i \ne j\}\,.$$

Ovdje elementarni događaj (i, j) interpretiramo kao: prva izvučan kuglica ima broj i, a druga broj j. Budući da su sve kuglice jednake, iz simetrije slijedi da su svi elementarni događaji jednako vjerojatni, odnosno nalazimo se u Laplaceovom modelu. Očito je $|\Omega| = 2n(2n - 1)$. Zanima nas vjerojatnost događaja $A = \{\text{izvučene kuglice su različite boje}\}$. Stavimo

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{1. izvučena kuglica je bijela, 2. izvučena kuglica je crna}\} \\
A_2 &= \{\text{1. izvučena kuglica je crna, 2. izvučena kuglica je bijela}\}.
\end{aligned}
$$

Budući da su A_1 i A_2 disjunktni te $A = A_1 \cup A_2$, vrijedi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$. Očito vrijedi da je $|A_1| = n \cdot n = n^2$ (broj uređenih parova (i, j) kod kojih je na prvoj koordinati bijela, a na drugoj crna kuglica je n^2). Slično, $|A_2| = n^2$. Slijedi da je

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \frac{n^2}{2n(2n-1)} + \frac{n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}\,.$$

Modificirajmo gornji pokus tako da pretpostavimo da su obje kuglice izvučene istovremeno. Umjesto uređenog para, elementarni događaj za modificirani pokus je dvočlani podskup skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Prostor elementarnih događaja je

$$\widetilde{\Omega} = \{\{i, j\} : 1 \leq i, j \leq 2n, i \neq j\}$$

te imamo da je

$$|\widetilde{\Omega}| = \binom{2n}{2} = n(2n-1)\,.$$

Opet su zbog simetrije svi elementarni događaji jednako vjerojatni. Neka je $\widetilde{A} = \{\text{izvučene kuglice su različite boje}\}$. Vrijedi da je $|\widetilde{A}| = \binom{n}{1}\binom{n}{1} = n^2$. Stoga je

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\widetilde{A}) = \frac{n^2}{n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$

kao i prije (uočite da je sada i vjerojatnost $\widetilde{\mathbb{P}}$ drugačija nego prije).

Primjer 1.12 U prethodnom primjeru odredimo sljedeće:

(a) Vjerojatnost da je prva izvučena kuglica bijela;

(b) Vjerojatnost da je druga izvučena kuglica bijela;

(c) Pola kuglica izvučeno je iz kutije i stavljeno na stranu. Jedna od preostalih kuglica je izvučena. Nađite vjerojatnost da je bijela.

Rješenje:

(a) Stavimo

$$\begin{aligned} A &= \{\text{1. izvučena kuglica je bijela}\} \\ A_1 &= \{\text{1. izvučena kuglica je bijela, 2. izvučena kuglica je bijela}\} \\ A_2 &= \{\text{1. izvučena kuglica je bijela, 2. izvučena kuglica je crna}\}. \end{aligned}$$

Tada je očito $A = A_1 \cup A_2$ te su A_1 i A_2 disjunktni. Sada imamo

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} + \frac{n^2}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2}.$$

(b) Stavimo

$$\begin{aligned} B &= \{2.\text{ izvučena kuglica je bijela}\} \\ B_1 &= \{1.\text{ izvučena kuglica je bijela, } 2.\text{ izvučena kuglica je bijela}\} \\ B_2 &= \{1.\text{ izvučena kuglica je crna, } 2.\text{ izvučena kuglica je bijela}\}. \end{aligned}$$

Ponovno, $B = B_1 \cup B_2$ te su B_1 i B_2 disjunktni. Dakle,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \frac{n(n-1)}{2n(2n-1)} + \frac{n^2}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2}.$$

(c) Zbog simetrije, tražena vjerojatnost je 1/2.

Općenito, kada se pokus sastoji od slučajnog izbora k predmeta iz skupa od N predmeta, fleksibilni smo u izboru elementarnih događaja – za ishod pokusa možemo uzeti *uređenu* k-torku od N elemenata (u tom slučaju će prostor elementarnih događaja imati $N(N-1)\cdots(N-k+1)$ elemenata), ili za ishod možemo uzeti (neuređen) k-člani podksup skupa od N elemenata (u tom slučaju će prostor elementarnih događaja imati $\binom{N}{k}$ elemenata). Ovisno o prirodi problema, nekad je jednostavije raditi s jednim ili drugim pristupom.

Primjer 1.13 Petero ljudi na slučajan način je izabrano iz grupe od 20 osoba koja se sastoji od 10 oženjenih parova. Odredimo vjerojatnost da među izabranih 5 osoba ne postoji oženjen par.

Rješenje 1: Prostor elementarnih događaja je izbor skupa od 5 ljudi od danih 20, dakle broj ishoda je $\binom{20}{5}$. Implicitna pretpostavka je da su svi izbori jednako vjerojatni. Računamo broj ishoda kod kojih među 5 odabranih osoba ne postoji oženjen par. Prvo biramo 5 parova među danih 10 parova. Takvih izbora ima $\binom{10}{5}$. Zatim unutar svakog odabranog para, izaberemo jednog člana para (ženu ili muža). To možemo učiniti na 2^5 načina. Dakle, broj povoljnih ishoda je $\binom{10}{5}2^5$. Tražena vjerojatnost je

$$\frac{2^5\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14\cdot 12}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}.$$

Rješenje 2: Sada za prostor elementarnih događaja uzimamo skup svih uređenih petorki danih osoba. Dakle, sada je broj ishoda $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$. U ovom pristupu izbor osoba se vrši sekvencijalno. Koliki je broj povoljnih ishoda? Prvu osobu možemo izabrati na 20 načina, za drugu osobu možemo izabrati bilo koga osim bračnog para prvo izabrane osobe, dakle na 18 načina. Treću osobu možemo izbarati na 16 načina itd. Slijedi da je tražena vjerojatnost jednaka

$$\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}.$$

Primjer 1.14 Permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ je bijekcija

$$\pi : \{1, 2, \ldots, N\} \to \{1, 2, \ldots, N\}.$$

Kažemo da je $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ fiksna točka permutacije π ako vrijedi $\pi(i) = i$. Odredimo vjerojatnost da slučajna permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ nema fiksnu točku.

Rješenje: Pojam *slučajna* permutacija interpretiramo na način da su sve permutacije jednako vjerojatne. Dakle, nalazimo se u Laplaceovom modelu vjerojatnosti. Budući da ima $N!$ permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$, svaka permutacija ima vjerojatnost $1/N!$. Neka je $A = \{\text{permutacija nema fiksnu točku}\}$. Tada je $A^c = \{\text{permutacija ima barem jednu fiksnu točku}\}$. Za $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ neka je $A_i = \{i \text{ je fiksna točka permutacije}\}$. Tada je

$$A^c = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N .$$

Nadalje, uočite da događaji $(A_j)_{1 \le j \le N}$ nisu disjunktni. Za računanje vjerojatnosti njihove unije koristimo formulu uključivanja-isključivanja:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le N} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) .$$

Fiksiramo i i računamo koliko permutacija ima i kao fiksnu točku. Vidimo da je taj broj jednak broju permutacija skupa $\{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, N\}$, dakle $(N-1)!$. Slijedi da je

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N} ,$$

Ako fiksiramo i, j, $i \neq j$, broj permutacija koje imaju i i j kao fiksnu točku jednak je $(N-2)!$. Zato je

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}\,, \qquad i \neq j\,.$$

Na isti način zaključujemo da je za sve $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ i sve $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N$,

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(N-k)!}{N!}\,.$$

k-članih podksupova $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ skupa $\{1, 2 \dots, N\}$ ima $\binom{N}{k}$. Uvrstimo li gore izračunato u formulu uključivanja-isključivanja dobivamo

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \binom{N}{k} \frac{N-k)!}{N!} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}\,.$$

Slijedi da je

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!}\,.$$

Iz formule za Taylorov red eksponencijalne funkcije $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, zaključujemo da je za velike N, $\mathbb{P}(A) \approx e^{-1}$.

1.4 Nizovi događaja

Vratimo se na Primjer 1.3 u kojem se simetričan novčić baca sve dok ne padne pismo. Za prostor elementarnih događaja uzeli smo

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i = P \text{ ili } G,\ i \in \mathbb{N}\} = \{P, G\}^{\mathbb{N}}\,.$$

Stavimo li $\Omega_1 = \{P, G\}$, vidimo da je $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_1 \times \dots = \Omega_1^{\mathbb{N}}$, beskonačan produkt Ω_1 sa samim sobom. Na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ definiramo vjerojatnost $\mathbb{P}_1$ na prirodan način: $\mathbb{P}_1(\{P\}) = \mathbb{P}_1(\{G\}) = 1/2$. U pododjeljku 1.3.1 na jednostavan način smo konstruirali produkt od konačno mnogo (konačnih) vjerojatnosnih prostora. Pitanje konstrukcije produkta (prebrojivo) beskonačno (konačnih ili prebrojivo beskonačnih) vjerojatnosnih prostora puno je složenije te ga za sada nećemo u potpunosti diskutirati. Za $A \subseteq \Omega$ za koji postoje $n \in \mathbb{N}$ i $A^{(n)} \subseteq \Omega_1^n$ t.d. $A = \{\omega \in \Omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in A^{(n)}\}$ kažemo da ovisi samo o prvih n koordinata. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra na Ω generirana skupovima koji ovise samo o prvih konačno mnogo koordinata (u smislu Primjera 1.6). Tada se može pokazati da na $(\Omega, \mathcal{F})$ postoji jedinstvena vjerojatnost $\mathbb{P}$ t.d. za $A \in \mathcal{F}$ koji ovisi samo o prvih n kooordinata vrijedi da je $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}^n(A^{(n)})$, gdje je $\mathbb{P}^n$ produktna vjerojatnost na $(\Omega_1^n, \mathcal{P}(\Omega_1^n))$.

Promatrajmo skup $B = \{\text{pismo nikada neće pasti}\}$ te za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $B_n = \{\text{pismo nije palo u prvih } n \text{ bacanja}\}$. Stavimo li

$$B^{(n)} = \{(\underbrace{G, G, \ldots, G}_{n \text{ puta}})\}\,.$$

vidimo da je

$$B_n = \{\omega \in \Omega : \ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in B^{(n)}\}\,.$$

Po gornjim pretpostavkama o vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vidimo da je $B_n \in \mathcal{F}$ te da je $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}^n(B^{(n)}) = 2^{-n}$. Nadalje, očito vrijedi da je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ te $B = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Budući da je $\mathcal{F}$ σ-algebra, slijedi da je $B \in \mathcal{F}$. Uočite da B ovisi o beskonačno mnogo koordinata. Kako izračunati $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} B_n)$? U nastavku pokazujemo da je svaka vjerojatnost neprekidna na monotone nizove događaja, otkud će slijediti (vidi Teorem 1.15 (b)) da je $\mathbb{P}(B) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$ što je intuitivno bilo jasno od početka.

Pretpostavimo da je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz događaja, tj. $A_n \in \mathcal{F}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$. Zbog monotonosti vjerojatnosti tada vrijedi $\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_2) \leq \mathbb{P}(A_3) \leq \cdots \leq 1$. Slijedi da je $(\mathbb{P}(A_n))_{n\geq 1}$ odozgo omeđen neopadajući niz realnih brojeva te zato postoji $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Možemo li ikako identificirati taj limes? Za očekivati je da je taj limes jednak vjerojatnosti nekog limesa događaja A_n. U slučaju ovakvog neopadajućeg niza događaja, prirodan pojam limesa je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$. O takvoj vrsti neprekidnosti vjerojatnosti govori sljedeći teorem.

Teorem 1.15 *(a) (*neprekidnost vjerojatnosti na neopadajuće događaje*) Za svaki neopadajući niz $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ događaja iz $\mathcal{F}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

*(b) (*neprekidnost vjerojatnosti na nerastuće događaje*) Za svaki nerastući niz* $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *događaja iz* $\mathcal{F}$ *(*$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$*) vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

Dokaz: (a) Iz neopadajućeg niza $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ konstruiramo novi niz $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja takav da je $\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$. Stavimo $B_1 := A_1 \in \mathcal{F}$ te za $n \geq 2$, $B_n := A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{F}$. Tada su događaji B_n po parovima disjunktni, za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, otkud zbog konačne aditivnosti slijedi da je $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)$. Također vrijedi $\cup_{j=1}^{\infty} A_j = \cup_{j=1}^{\infty} B_j$. Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \overset{(A3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)\,.
\end{aligned}$$

(b) Uočite da $\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(A_j)$ postoji zbog monotonosti niz $(\mathbb{P}(A_j))_{j\in\mathbb{N}}$. Budući da je niz događaja $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ nerastući, niz događaja $(A_j^c)_{j\in\mathbb{N}}$ je neopadajući. Korištenjem de Morganovih zakona u drugoj jednakosti te dijela (a) u trećoj,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right) \\
&= 1 - \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(A_j^c) = 1 - \lim_{j\to\infty} \big(1 - \mathbb{P}(A_j)\big) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(A_j)\,.
\end{aligned}$$

□

Primjer 1.16 Neka je $A = \{$pismo je palo u prvom bacanju ili uopće nije palo$\}$. Odredimo $\mathbb{P}(A)$.

Rješenje: Stavimo

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{pismo je palo u prvom bacanju}\} \\
A_2 &= \{\text{pismo nikada neće pasti}\}.
\end{aligned}$$

Tada je očito $A = A_1 \cup A_2$ te su A_1 i A_2 disjunktni. Kao što smo već komentirali $\mathbb{P}(A_1) = 1/2$ te po prethodnom teoremu $\mathbb{P}(A_2) = 0$. Dakle, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 1/2$.

Gornji teorem govori da iz σ-aditivnosti vjerojatnosti slijedi neprekidnost. Sljedeći teorem pokazuje da vrijedi i obrat: konačna aditivnost i neprekidnost vjerojatnosti povlače σ-aditivnost. To znači da je, ukoliko ukoliko vrijedi konačna aditivnost, σ-aditivnost ekvivalentna neprekidnosti.

Teorem 1.17 *Neka $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ zadovoljava sljedeća tri svojstva:*

(A1) Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(A3) (*konačna aditivnost*): Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)\,.$$

(a) Ako je $\mathbb{P}$ neprekidna na neopadajuće nizove događaja, onda je $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ (tj. vrijedi (A3)).
*(b) Ako za svaki nerastući niz $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ događaja iz $\mathcal{F}$ takvih da je $\cap_{j=1}^{\infty} B_j = \emptyset$ vrijedi $\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}(B_j) = 0$ (*neprekidnost u nuli*), onda je $\mathbb{P}$ vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Dokaz: (a) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja. Definiramo neopadajući niz događaja $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da je $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $C_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Taj niz je očito neopadajući i unija svih C_n-ova jednaka je uniji svih A_n-ova. Zbog konačne aditivnosti od $\mathbb{P}$ vrijedi $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$. Sada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)\,.
\end{aligned}$$

(b) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz neopadajućih događaja iz $\mathcal{F}$: $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ te $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pokazujemo da je $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$ pa će tražena tvrdnja slijediti iz dijela (a). Definiramo novi niz događaja $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sa $B_n := A\backslash A_n = A_n^c \cap A \in \mathcal{F}$. Tada je $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ te

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^c \cap A) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \cap A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \cap A = \emptyset\,.$$

Zato je

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A_n)\right)\,,$$

otkud dobivamo da je $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Uočite da treća jednakost slijedi iz $\mathbb{P}(C \setminus D) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(D)$ za $C \supseteq D$, što je posljedica konačne aditivnosti. $\square$

U slučaju monotonog niza događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavno je bilo reći što je limes takvog niza: ako je $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, možemo definirati $\lim_{n\to\infty} A_n := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, dok u slučaju $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ stavimo $\lim_{n\to\infty} A_n := \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Za općeniti niz događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiramo njihov *limes inferior* i *limes superior* na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\,, \\ \limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\,. \end{aligned}$$

Budući da je σ-algebra događaja zatvorena na prebrojive unije i presjeke, oba gornja skupa su događaji. Nadalje, jednostavno se vidi da je $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Uočimo sljedeće: $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ ako i samo ako postoji $n = n(\omega) \in \mathbb{N}$ takav da je $\omega \in \cap_{k=n}^{\infty} A_k$, odnosno ako i samo ako je $\omega \in A_k$ za sve $k \geq n = n(\omega)$. Dakle, $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ ako i samo ako je ω u svim osim konačno mnogo A_k-ova.

Slično, $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $k = k(n,\omega) \geq n$ takav da je $\omega \in A_k$. Dakle, $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ ako i samo ako je ω u beskonačno mnogo A_k-ova. Zato se za događaj $\limsup_{n\to\infty} A_n$ često koristi kratica $\{A_n$ b. m. p.$\}$ gdje b. m. p. znači *beskonačno mnogo puta*.

Primjer 1.18 Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući ili nerastući niz događaja. Tada je $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$.

Rješenje: Pokažimo da jednakost vrijedi u slučaju neopadajućeg niza događaja. Slučaj nerastućeg niza se diskutira analogno. Imamo

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n.$$

S druge strane,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n,$$

što dokazuje tvrdnju.

Lema 1.19 *(Borel-Cantellijeva lema) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty\,,$$

onda je

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0\,.$$

Dokaz: Prvo uočimo da je niz događaja $(\cup_{k=n}^{\infty} A_k)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući te je zato po Teoremu 1.15

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)\,.$$

Nadalje, zbog σ-subaditivnosti vjerojatnosti imamo

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

Desna strana gore je ostatak konvergentog reda pa zaključujemo

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0\,.$$

□

Primjer 1.20 Igrač igra niz različitih igara na sreću. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je $p_n \in [0,1]$. Svaka sljedeća igra je teža i vjerojatnost dobitka se smanjuje. Pretpostavite da je $p_n = n^{-\alpha}$ za $\alpha > 0$.

(a) Ako je $\alpha > 1$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 0.

(b) Pretpostavite da su igre nezavisne jedna od druge. Ako je $\alpha \in (0,1]$, onda je vjerojatnost da igrač dobije u beskonačno mnogo igara jednaka 1. (Uputa: pogledajte Lemu 2.17 na kraju drugog poglavlja.)

Rješenje: Stavimo $A_n = \{\text{igrač je dobio u } n\text{-oj igri}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Po pretpostavci $\mathbb{P}(A_n) = p_n = n^{-\alpha}$.

(a) Za $\alpha > 1$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty$ pa tvrdnja slijedi izravno iz Borel-Cantellijeve leme.

(b) Za $\alpha \leq 1$ vrijedi $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \infty$ pa tvrdnja slijedi iz Leme 2.17 (svojevrstan obrat Borel-Cantellijeve leme).

Poglavlje 2

Uvjetna vjerojatnost i nezavisnost

2.1 Uvjetna vjerojatnost

Primjer 2.1 Bacamo dvije simetrične igraće kocke, crvenu i plavu, i zanima nas vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6. Prostor elementarnih događaja je $\Omega = \{(i,j) : 1 \le i,j \le 6\}$, gdje je i broj na crvenoj, a j na plavoj kocki. Vjerojatnost svakog elementarnog događaja je, zbog simetrije, jednaka $1/36$. Događaj koji nas zanima je

$$A = \{\text{zbroj brojeva je } 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\,.$$

Očito je $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{5}{36}$. Pretpostavimo da su kocke bačene te da nam je poznato da je na plavoj kocki pao broj 2. Kolika je sada vjerojatnost da je zbroj brojeva na obje kocke jednak 6? Intuitivno je jasno da budući da znamo da je broj na plavoj kocki jednak 2, vjerojatnost da je zbroj jednak 6 ista vjerojatnosti da je na crvenoj kocki pala četvorka, dakle $1/6$. Malo preciznije, uz dano da je broj na plavoj kocki 2, preostaje samo šest mogućih ishoda našeg pokusa: $(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)$. Budući da je svaki od ovih ishoda originalno imao istu vjerojatnost pojavljivanja, ti ishodi i dalje imaju jednaku vjerojatnost. Kako ih ima šest, svaki od njih ima vjerojatnost $1/6$. Zaključujemo da je vjerojatnost ishoda $(2,4)$ (koji od preostalih šest ishoda jedini daje zbroj 6) jednaka $1/6$.

Označimo sa B događaj da je na plavoj kocki pao broj 2: $B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$. Informacija da je na plavoj kocki pao broj 2 se može izreći: događaj B se dogodio. Za daljnje računanje vjerojatnosti originalni prostor elementarnih događaja Ω nije više relevantan – sva informacija dana je u *reduciranom* prostoru elementarnih događaja B. Vjerojatnost događaja A ukoliko se dogodio događaj B naziva se *uvjetna vjerojatnost od* A *uz dano* B, označava s $\mathbb{P}(A \mid B)$ i u ovom slučaju računa kao omjer broja ishoda u $A \cap B$ i broja svih ishoda u B, dakle $|A \cap B|/|B|$.

Definicija 2.2 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor te* $B \in \mathcal{F}$ *događaj takav da je* $\mathbb{P}(B) > 0$. Uvjetna vjerojatnost događaja A uz dano B *definira se formulom*

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,. \tag{2.1}$$

Uočite da iz definicije uvjetne vjerojatnsti odmah slijedi da je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) \tag{2.2}$$

što čitamo kao: vjerojatnost da se istovremeno dogode A i B jednaka je produktu vjerojatnosti da se dogodi B i uvjetne vjerojatnosti da se dogodi A ako se dogodio B.

Ako je i $\mathbb{P}(A) > 0$, onda je dobro definirana uvjetna vjerojatnost $\mathbb{P}(B \mid A)$ te vrijedi

$$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\,. \tag{2.3}$$

Formula (2.2) poopćuje se sa dva na n događaja: pretpostavimo da su $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, takvi da je $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dokaz formule je jednostavan: raspišemo desnu stranu po definiciji i dobijemo

$$\mathbb{P}(A_1)\frac{\mathbb{P}(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}\frac{\mathbb{P}(A_3 \cap A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \cdots \frac{\mathbb{P}(A_n \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}\,.$$

Svi članovi se pokrate osim brojnika u zadnjem faktoru koji je upravo jednak lijevoj strani u (2.4).

Za $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$ uvedimo oznaku

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}\,, \qquad A \in \mathcal{F}\,.$$

Propozicija 2.3 *Neka je* $B \in \mathcal{F}$ *takav da je* $\mathbb{P}(B) > 0$. *Tada je* $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ *vjerojatnost na* $(\Omega, \mathcal{F})$.

Dokaz: Trebamo provjeriti da $\mathbb{P}_B$ zadovoljava aksiome (A1)–(A3).

(A1) $\mathbb{P}_B(A) \geq 0$ za sve $A \in \mathcal{F}$;

(A2) $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cap B)/\mathbb{P}(B) = 1$;

(A3) Neka je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja iz $\mathcal{F}$. Tada je niz $(A_j \cap B)_{j\in\mathbb{N}}$ također niz po parovima disjunktnih događaja pa iz definicije uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}_B$ i σ-aditivnosti od $\mathbb{P}$ slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_B\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_j \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_B(A_j)\,. \end{aligned}$$

□

Iz Propozicije 2.3 zaključujemo da uvjetna vjerojatnost uz dano B zadovoljava sva svojstva vjerojatnosti. Na primjer, (i) za $A, C \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \mathbb{P}(A \mid B) + \mathbb{P}(C \mid B) - \mathbb{P}(A \cap C \mid B)\,,$$

(ii) ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući iz događaja, onda je

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid B\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n \mid B)\,.$$

Pretpostavimo sada da je $(H_i)_{i\in I}$ konačna ili prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}(H_i) > 0$ za sve $i \in I$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ te $\cup_{i\in I}^{\infty} H_i = \Omega$. Takvu familiju $(H_i)_{i\in I}$ zovemo *potpun sustav događaja*. Događaje H_i često zovemo *hipoteze*. Sljedeći rezultat kaže da se vjerojatnost svakog događaja može izračunati kao težinska sredina uvjetnih vjerojatnosnti tog događaja uvjetno na hipoteze, s težinama jednakim vjerojatnosti hipoteza.

Propozicija 2.4 *(Formula potpune vjerojatnosti) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)\,.$$

Dokaz: Korištenjem činjenice da je $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$ u prvoj jednakosti, σ-aditivnost u trećoj te (2.2) u četvrtoj, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \cap \big(\bigcup_{i\in I} H_i\big)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}(A\cap H_i)\right)\\ &= \sum_{i\in I}\mathbb{P}(A\cap H_i) = \sum_{i\in I}\mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)\,.\end{aligned}$$

□

Primjer 2.5 Riješimo ponovno Primjer 1.12 (c).

Rješenje: Stavimo $H_i = \{\text{izvučeno je } i \text{ crnih i } n-i \text{ bijelih kuglica}\}$, $i = 0,\dots,n$. Očito $\{H_i\}_{i=0,\dots,n}$ čini potpun sustav događaja. Također, stavimo $A = \{\text{nakon izvlačenja } n \text{ kuglica izvučena je bijela kuglica}\}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(H_i)P(A \mid H_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\binom{n}{i}(n\cdots(n-i+1)(n\cdots(i+1)))}{2n\cdots(n+1)}\frac{i}{n}+1\\ &= \sum_{i=0}^{n}\frac{\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}}{\binom{2n}{n}}\frac{i}{n}\\ &= \frac{1}{n\binom{2n}{n}}\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}.\end{aligned}$$

Uočimo da je

$$2\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} + \sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = n\binom{2n}{n}.$$

Naime, u skupu od $2n$ objekata od koji je n prve vrste (koje međusobno razlikujemo) te n druge vrste (koje također međusobno razlikujemo), desna strana broji broj odabira od n objekata i izdvajanje jednog od odabranih n, što je upravo lijeva strana. Sada slijedi da je $\mathbb{P}(A) = 1/2$.

Primjer 2.6 U dvije kutije nalaze se crne i bijele kuglice. U prvoj kutiji je 1 bijela i 3 crne kuglice, a u drugoj kutiji je 6 bijelih i 2 crne kuglice. Slučajno se izabire kutija te se iz izabrane kutije na slučajan način izvuče jedna kuglica.

(a) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?

(b) Ako je izvučena crna kuglica, nađite vjerojatnost da je izvučena iz prve kutije.

Opisani slučajni pokusi sastoji se od dva pokusa: prvi je slučajni odabir kutije, a drugi slučajni odabir kuglice iz izabrane kutije. Uočite da vjerojatnost ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog. Prostor elementarnih događaja Ω ovdje nećemo eksplicitno konstruirati (vidi pododjeljak 2.1.1). Prvi pokus ima dva ishoda, $H_1 = \{\text{odabrana prva kutija}\}$ i $H_2 = \{\text{odabrana druga kutija}\}$. Kakav god bio Ω, očito vrijedi da je $\Omega = H_1 \cup H_2$ te $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Dakle, $\{H_1, H_2\}$ je potpun sustav događaja te vrijedi da je $\mathbb{P}(H_1) = \mathbb{P}(H_2) = 1/2$.

(a) Neka je $C = \{\text{izvučena kuglica je crna}\}$. Po formuli potpune vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(C \mid H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(C \mid H_2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(C \mid H_1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(C \mid H_2)\,.$$

Uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(C \mid H_1)$ i $\mathbb{P}(C \mid H_2)$ je jednostavno izračunati:

$$\mathbb{P}(C \mid H_1) = \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4}\,, \qquad \mathbb{P}(C \mid H_2) = \frac{2}{6+2} = \frac{1}{4}\,.$$

Slijedi da je

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Uočite da kada bi sve kuglice bile u istoj kutiji, vjerojatnost da se izvuče crna bila bi $5/12$.

(b) Traži se $\mathbb{P}(H_1 \mid C)$! Ukoliko nam je poznato da je izvučena kuglica crna, intuitivno je vjerojatnije da je izvučena iz prve kutije (prva kutija ima veći omjer crnih kuglica nego druga). Uvjetnu vjerojatnost $\mathbb{P}(H_1 \mid C)$ računamo pomoću definicije i formule (2.3),

$$\mathbb{P}(H_1 \mid C) = \frac{\mathbb{P}(H_1 \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(C \mid H_1)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\,.$$

Slično se vidi da je $\mathbb{P}(H_2 \mid C) = 1/4$. Originalne vjerojatnosti hipoteza $\mathbb{P}(H_j)$ zovu se *apriorne vjerojatnosti.* To su vjerojatnosti koje pridružujemao hipotezama u nedostatku drugih informacija. Nakon što je ustanovljeno da je izvučena kuglica crna (dodatna informacija) apriorne vjerojatnosti modificiramo tako da uključimo novu informaciju. Dobivene vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_j \mid C)$ zovu se *aposteriorne vjerojatnosti.*

Račun iz Primjera 2.6 formaliziramo u sljedećem teoremu:

Teorem 2.7 *(Bayesova formula) Neka je* $(H_i)_{i\in I}$ *potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Tada za svaki* $A \in \mathcal{F}$ *takav da je* $\mathbb{P}(A) > 0$ *vrijedi*

$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}\,.$$

Dokaz: Korištenjem definicije uvjetne vjerojatnosti u prvoj jednakosti, (2.3) u drugoj i formule potpune vjerojatnosti u trećoj, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}\,.\end{aligned}$$

□

Primjer 2.8 Riješimo ponovno Primjer 0.3.

Rješenje: Zanimaju nas sljedeća dva događaja: $B = \{\text{osoba je bolesna}\}$ i $P = \{\text{test je pozitivan}\}$. Traži se $\mathbb{P}(B \mid P)$ – uvjetna vjerojatnost da je osoba bolesna ako je test pozitivan. Podatke koji su nam dani zapisujemo matematički na sljedeći način: $\mathbb{P}(P \mid B) = 0.95$ – uvjetna vjerojatnost da je test pozitivan ako je osoba bolesna (test otkriva bolest), $\mathbb{P}(P \mid B^c) = 0.01$ – uvjetna vjerojatnost da je test pozitivan ako je osoba zdrava (false positive), $\mathbb{P}(B) = 0.001$ – vjerojatnost da je slučajno odabrana osoba bolesna. Po Bayesovoj formuli je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \mid P) &= \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(P \mid B)}{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(P \mid B) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(P \mid B^c)} \\ &= \frac{0.001 \times 0.95}{0.001 \times 0.95 + 0.999 \times 0.01} = \frac{950}{10940} \approx 0.0868\end{aligned}$$

Primjer 2.9 Reći ćemo da događaj B *privlači* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) > \mathbb{P}(A)$ – vjerojatnost pojavljivanja A povećava se ako znamo da se dogodio B. Na primjer, bacamo dvije simetrične kocke. Neka je A događaj da je na prvoj kocki pala šestica. Jasno, $\mathbb{P}(A) = 1/6$. Ako je $B = \{\text{zbroj brojeva na obje kocke je strogo veći od } 8\} = \{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$ intuitivno je jasno da B privlači A. Zaista

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5} > \frac{1}{6}\,.$$

Događaj B *odbija* događaj A ako vrijedi $\mathbb{P}(A \mid B) < \mathbb{P}(A)$.

(a) Ako B privlači A, onda A privlači B. Zbog toga možemo reći da se A i B privlače (tj. privlačnost je simetrična relacija). Zaista, B privlači A ako i samo ako je $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B)$ što je ekvivalentno s $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(A \cap B)$. Taj zadnji uvjet je također ekvivalentan s $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B \mid A)$, odnosno A privlači B.

(b) Ako B privlači A, onda B^c odbija A. Treba pokazati da je $\mathbb{P}(A \cap B^c) < \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B^c).\end{aligned}$$

(c) Važan dokument nalazi se u jednoj on n kutija prepunih dokumenata. Vjerojatnost događaja H_j da se dokument nalazi u j-toj kutiji jednaka je $p_j \in (0,1)$, $j = 1,2,\ldots,n$, gdje vrijedi $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$. Sa F_j označimo događaj da djelomičnim pretraživanjem j-te kutije ne nađemo traženi dokument. Neka je $q_j \in (0,1)$ vjerojatnost događaja F_j ukoliko dokument jeste u j-toj kutiji. Dokažite da se događaji H_j i F_j odbijaju, ali F_j privlači H_i za $i \neq j$.

Dano je $\mathbb{P}(H_j) = p_j$, $\mathbb{P}(F_j \mid H_j) = q_j$ i zbog prirode problema $\mathbb{P}(F_j \mid H_i) = 1$ za $i \neq j$ (ako je dokument u i-toj kutiji, vjerojatnost da ga ne nađemo u j-toj je 1). Pomoću Bayesove formule računamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_j \mid F_j) &= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(F_j \mid H_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(F_j \mid H_i)} = \frac{p_j q_j}{p_j q_j + \sum_{i \neq j} p_1 \cdot 1}\\ &= \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j}\,,\end{aligned}$$

otkud

$$\mathbb{P}(H_j) - \mathbb{P}(H_j \mid F_j) = p_j - \frac{p_j q_j}{p_j q_j + 1 - p_j} = \frac{p_j(1-p_j)(1-q_j)}{p_j q_j + 1 - p_j} > 0$$

zbog $p_j, q_j \in (0,1)$ (uočite da je $p_j q_j + 1 - p_j = \mathbb{P}(F_j) > 0$). Zato se H_j i F_j odbijaju. Slično se izračuna da je za $i \neq j$,

$$\mathbb{P}(H_i \mid F_j) - \mathbb{P}(H_i) = \frac{p_i p_j (1-q_j)}{1 - p_j + p_j q_j} > 0\,.$$

2.1.1 Vjerojatnosni prostor za zavisne pokuse

Provodimo dva pokusa takva da vjerojatnosti ishoda drugog pokusa ovise o rezultatu prvog pokusa. Uočite da smo u gornjim primjerima imali takvu situaciju. Želimo konstruirati vjerojatnosni prostor koji opisuje takva dva pokusa. Zbog jednostavnosti ćemo pretpostaviti da oba pokusa imaju konačan broj ishoda. Slični argumenti, uz malo više tehničkih problema, vrijede i u slučaju prebrojivih prostora elementarnih događaja.

Neka je $\Omega_1 = \{\omega_1', \ldots, \omega_m'\}$ prostor elementarnih događaja prvog pokusa, a $\Omega_2 = \{\omega_1'', \ldots, \omega_n''\}$ prostor elementarnih događaja drugog pokusa. Pretpostavimo da je za svaki $\omega' \in \Omega_1$ dan broj $p_1(\omega') \geq 0$, tako da vrijedi $\sum_{\omega' \in \Omega_1} p_1(\omega') = 1$: $p_1(\omega')$ interpretiramo kao vjerojatnost elementarnog događaja ω'. Neka je, nadalje, za svaki $\omega' \in \Omega_1$ dana funkcija $p_2(\omega', \cdot) : \Omega_2 \to [0,1]$ takva da je $\sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_2(\omega', \omega'') = 1$: $p_2(\omega', \omega'')$ interpretiramo kao uvjetnu vjerojatnost elementarnog događaja ω'' ako se u prvom pokusu dogodio ω'. Neka je

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega', \omega'') : \omega' \in \Omega_1, \omega'' \in \Omega_2\}$$

prostor elementarnih događaja za oba pokusa. Definiramo

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(\omega', \omega'')\}) := p_1(\omega') p_2(\omega', \omega'')\,.$$

Vrijedi

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega' \in \Omega_1} \sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_1(\omega') p_2(\omega', \omega'') = \sum_{\omega' \in \Omega_1} p_1(\omega') \sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_2(\omega', \omega'') = 1\,.$$

Iz Propozicije 1.8 sada slijedi da se $\mathbb{P}$ na jedinstven način može proširiti do vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Ovako konstruiran vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ je model za dva pokusa kod kojih vjerojatnost ishoda drugog pokusa ovisi o rezultatu prvog.

Primjer 2.10 (a) Za $\omega' \in \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$, stavimo $p_2(\omega', B) := \sum_{\omega'' \in B} p_2(\omega', \omega')$. Pokažimo da je $p_2(\omega', B)$ uvjetna vjerojatnost da se u drugom pokusu dogodio B ako je ishod prvog pokusa ω', tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) = p_2(\omega', B)\,.$$

(b) Neka je $A \subseteq \Omega_1$. POkažimo da je $\mathbb{P}(A \times \Omega_2) = \sum_{\omega' \in A} p_1(\omega')$.

Rješenje:

(i) Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \mid \{\omega'\} \times \Omega_2) &= \frac{\mathbb{P}(\Omega_1 \times B \cap \{\omega'\} \times \Omega_2)}{\mathbb{P}(\{\omega'\} \times \Omega_2)} = \frac{\mathbb{P}(\{\omega'\} \times B)}{p_1(\omega')} \\ &= p_2(\omega', B).\end{aligned}$$

(ii) Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \times \Omega_2) &= \sum_{\omega' \in A} \sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_1(\omega') p_2(\omega', \omega'') = \sum_{\omega' \in A} p_1(\omega') \sum_{\omega'' \in \Omega_2} p_2(\omega', \omega'') \\ &= \sum_{\omega' \in A} p_1(\omega').\end{aligned}$$

2.2 Nezavisnost

Za događaje A i B (pozitivne vjerojatnosti) može se dogoditi da se niti privlače niti odbijaju. To znači da je $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$, odnosno $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$. Svaka od tih jednakosti ekvivalentna je s $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. U tom slučaju ćemo reći da su događaji A i B nezavisni.

Definicija 2.11 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor.*

(a) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su nezavisni *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,.$$

(b) Događaji $A, B \in \mathcal{F}$ su uvjetno nezavisni uz dani $C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$, *ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)\,.$$

(c) *Familija događaja $(A_i)_{i\in I}$ (konačna, prebrojiva ili neprebrojiva) je nezavisna ako vrijedi*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in F} A_i\right) = \prod_{i\in F} \mathbb{P}(A_i)$$

za svaki konačan podskup $F \subseteq I$.

(d) *Familija događaja $(A_i)_{i\in I}$ je* po parovima nezavisna *ako za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, vrijedi $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.*

Uvjetna nezavisnost događaja A i B uz dani C može se zapisati kao

$$\mathbb{P}_C(A \cap B) = \mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}_C(B)\,,$$

tj. A i B su nezavisni događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_C)$. Nezavisnost događaja je svojstvo vjerojatnosti uz koju se ti događaji promatraju. Uočite da ako je familija događaja $(A_i)_{i\in I}$ nezavisna, onda je i po parovima nezavisna. Sljedeći primjer, među ostalim, pokazuje da obrat ne vrijedi.

Primjer 2.12 (a) Bacamo dvije simetrične kocke i promatramo sljedeća tri događaja: $A = \{\text{šestica na 1. kocki}\}$, $B = \{\text{jedinica na 2. kocki}\}$ i $C = \{\text{zbroj je sedam}\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$. Vidimo da je $A\cap C = B\cap C = \{(6,1)\}$. Računamo sljedeće vjerojatnosti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) &= \frac{1}{6}\,,\\
\mathbb{P}(A\cap B) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\,,\\
\mathbb{P}(A\cap C) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)\,,\\
\mathbb{P}(B\cap C) &= \frac{1}{36} = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, familija događaja $\{A, B, C\}$ je po parovima nezavisna. S druge strane, $A\cap B\cap C = \{(6,1)\}$ te je zato

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{36} \neq \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\,.$$

Dakle, $\{A, B, C\}$ nije familija nezavisnih događaja. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \mid C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\,, \\
\mathbb{P}(B \mid C) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(B)\,, \\
\mathbb{P}(A \cap B \mid C) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}\,,
\end{aligned}$$

otkud slijedi (i) da su A i C nezavisni, B i C nezavisni, (ii) zbog $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) \neq \mathbb{P}(A \mid C)\mathbb{P}(B \mid C)$, A i B nisu uvjetno nezavisni uz dano C (iako su A i B nezavisni). Dakle, nezavisnost događaja ne povlači njihovu uvjetnu nezavisnost. U sljedećem primjeru vidjet ćemo da ne vrijedi ni obratna implikacija.

(b) U istom pokusu kao u dijelu (a) promatramo sljedeća tri događaja: $E = \{\text{na 1. kocki je 1,2, ili 3}\}$, $F = \{\text{na 2. kocki je 4,5 ili 6}\}$ i $G = \{\text{zbroj je 9}\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$. Vrijedi $E \cap F \cap G = \{(3,6)\}$ te

$$\mathbb{P}(E \cap F \cap G) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\,.$$

Međutim, očito

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E \cap F) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)\,, \\
\mathbb{P}(E \cap G) &= \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(G)\,, \\
\mathbb{P}(F \cap G) &= \frac{1}{36} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G)\,.
\end{aligned}$$

Dakle, familija događaja $\{E, F, G\}$ nije nezavisna.

Primjer 2.13 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da $B \subseteq A$ i $0 < \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) < 1$. Tada imamo

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid B) = \mathbb{P}(B \mid B) = 1 = \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B \mid B).$$

Dakle, A i B su uvjetno nezavisni uz dani B. S druge strane,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),$$

tj. A i B nisu nezavisni.

Nezavisni događaji najčešće se javljaju kao rezultati nezavisnih pokusa. U pododjeljku 1.3.1 konstruirali smo produktni vjerojatnosni prostor koji služi kao model za dva nezavisna pokusa. Preciznije, neka su $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ dva konačna vjerojatnosna prostora te $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ konstruirali smo vjerojatnost $\mathbb{P}$ koja je na jedinstven način zadana s

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}), \quad \omega = (\omega', \omega'').$$

Neka su $A \subseteq \Omega_1$ i $B \subseteq \Omega_2$: događaj A ovisi o prvom pokusu, dok događaj B ovisi o drugom pokusu. Definiramo

$$\widetilde{A} = A \times \Omega_2, \qquad \widetilde{B} = \Omega_1 \times B.$$

Tada su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ događaji u Ω: $\widetilde{A}$ kaže da se u prvom pokusu dogodio A, u drugom pokusu bilo što. Tvrdimo da su $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ nezavisni događaji u $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Zaista,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) &= \mathbb{P}((A \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times B)) = \mathbb{P}(A \times B) \\
&= \sum_{\omega = (\omega', \omega'') \in A \times B} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega' \in A} \sum_{\omega'' \in B} \mathbb{P}_1(\{\omega'\})\mathbb{P}_2(\{\omega''\}) \\
&= \left(\sum_{\omega' \in A} \mathbb{P}_1(\{\omega'\}) \right) \left(\sum_{\omega' \in B} \mathbb{P}_2(\{\omega''\}) \right) = \mathbb{P}_1(A)\mathbb{P}_2(B).
\end{aligned}$$

Uzimanjem $B = \Omega_2$ (te stoga $\widetilde{B} = \Omega$), gornja jednakost postaje $\mathbb{P}(\widetilde{A}) = \mathbb{P}_1(A)$. Slično, $\mathbb{P}(\widetilde{B}) = \mathbb{P}_2(B)$. Uvrštavanjem u gornju jednakost slijedi

$$\mathbb{P}(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) = \mathbb{P}(\widetilde{A})\mathbb{P}(\widetilde{B}),$$

tj. $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$ su nezavisni.

Sljedeća dva primjera pokazuju da s uvjetnim vjerojatnosntima treba biti oprezan. Intuicija vezana uz uvjetne vjerojatnosni kod većine nas je nerazvijena što često dovodi do pogrešnih zaključaka.

Primjer 2.14 *(Bertrandov paradoks 1889)* Imamo tri igraće karte; jedna je crna s obje strane, druga je bijela s obje strane, a treća crno-bijela. Na slučajan način odabrana je jedna karta i stavljena na stol. Gornja strana karte je bijela. Kolika je vjerojatnost da je i donja strana bijela?

Označimo stranice bijelo-bijele karte sa b_1 i b_2, crno-crne sa c_1, c_2 te crno-bijele sa c_3 i b_3. Za prostor elementarnih događaja možemo uzeti $\Omega =$

$\{b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3\}$, gdje npr. b_1 znači da je donja stranica odabrane karte jednaka b_1. Zbog simetrije svi elementarni događaji imaju istu vjerojatnost $1/6$. Zanimaju nas događaji $A = \{\text{donja stranica odabrane karte je bijela}\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ i $B = \{\text{gornja stranica odabrane karte je bijela}\} = \{b_1, b_2, c_3\}$ (što znači da su, redom, gornje stranice b_2, b_1, b_3). Tada je

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\{b_1, b_2\})}{\mathbb{P}(\{b_1, b_2, c_3\})} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}\,.$$

Primjer 2.15 *(Monty Hall - auto i koze)* Natječete se u TV showu i trebate odabrati jedna od triju zatvorenih vrata. Iza jednih vrata se nalazi auto, a iza ostalih po jedna koza. Vaš cilj je osvojiti auto. Izabirete prva vrata nakon čega voditelj showa otvara treća vrata iza kojih je koza. Voditelj Vam zatim nudi mogućnost da promijenite svoj izbor vrata (tj. da prva vrata zamijenite drugim). Isplati li Vam se to? Možete li izračunati vjerojatnost da je auto iza drugih vrata?

Ovo je vrlo poznati problem te postoji puno različitih objašnjenja zašto je povoljno promijeniti vrata. Mi ćemo problem riješiti korištenjem Bayesove formule te malo detaljnije analizirati pretpostavke problema. Procedura u problemu ima nekoliko koraka (pokusa) od kojih je prvi Vaš originalni izbor vrata iza kojih je auto. Tu postoje tri mogućnosti:

$$A_i = \{\text{auto je iza } i\text{-tih vrata}\}\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Budući da na početku nemate nikakvu dodatnu informaciju, realno je pretpostaviti da su sva tri događaja jednako vjerojatna, tj. $\mathbb{P}(A_i) = 1/3$, $i = 1, 2, 3$. Izabirete prva vrata te voditelj otvara treća iza kojih je koza. Stavimo

$$\begin{aligned} K &= \{\text{koza otkrivena iza trećih vrata}\} \\ &= \{\text{otvorena treća vrata iza kojih je koza}\}\,. \end{aligned}$$

Uz danu informaciju želimo izračunati vjerojatnost da je auto iza drugih vrata, tj. zanima nas uvjetna vjerojatnost $\mathbb{P}(A_2 \mid K)$. Po Bayesovoj formuli vrijedi

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(K \mid A_2)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(K \mid A_i)} = \frac{\mathbb{P}(K \mid A_2)}{\mathbb{P}(K \mid A_1) + \mathbb{P}(K \mid A_2)}\,,$$

gdje smo iskoristili $\mathbb{P}(A_i) = 1/3$ te očiglednu činjenicu da je $\mathbb{P}(K \mid A_3) = 0$ (ako je auto iza trećih vrata, onda koza nije iza trećih vrata). Dakle, da bismo izračunali $\mathbb{P}(A_2 \mid K)$, trebamo poznavati uvjetne vjerojatnosti $\mathbb{P}(K \mid A_1)$ i $\mathbb{P}(K \mid A_2)$. Te uvjetne vjerojatnosti ovise o protokolu po kojem voditelj otvara vrata nakon Vašeg originalnog izbora vrata. Protokol otvaranja vrata ustanovljen je prije Vašeg odabira vrata.

(a) Protokol 1: (implicitno pretpostavljen) (i) koja god vrata odabrali, voditelj otvara jedna od preostalih vrata iza kojih je koza, (ii) ako ima izbor od dvije koze, izabrat će jednu na slučajan način. Uz ovaj protokol je

$$\mathbb{P}(K \mid A_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(K \mid A_2) = 1,$$

(uz A_1 koze iza drugih i trećih vrata, treća vrata izabrana slučajno; uz A_2 koza iza prvih i trećih vrata, voditelj mora otvoriti treća). Sada je

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{1}{1/2 + 1} = \frac{2}{3},$$

što pokazuje da je povoljno promijeniti vrata ($\mathbb{P}(A_1 \mid K) = 1/3$).

(b) Protokol 2: (i) koja god vrata odabrali, voditelj otvara jedna od preostalih vrata, (ii) odabir jednih od dvoja vrata je slučajan. Uz ovaj protokol je

$$\mathbb{P}(K \mid A_1) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(K \mid A_2) = \frac{1}{2},$$

(i uz A_1 i uz A_2, odabir trećih vrata jednako vjerojatan odabiru drugih vrata). Sada je

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{1/2}{1/2 + 1/2} = \frac{1}{2},$$

što pokazuje da je uz ovaj protokol svejedno mijenjate li vrata ($\mathbb{P}(A_1 \mid K) = 1/2$).

(c) Protokol 3: Voditelj nikada ne otvara treća vrata ako je auto iza prvih. Uz ovaj protokol je

$$\mathbb{P}(K \mid A_1) = 0, \qquad \mathbb{P}(K \mid A_2) = 1.$$

Sada je

$$\mathbb{P}(A_2 \mid K) = \frac{1}{0 + 1} = 1,$$

što pokazije da svakako treba promijeniti vrata. Ovakav protokol je realističan samo ako dobro potplatite voditelja.

(d) Protokol 4: (i) Ako je koza iza prvih vrata, voditelj otvara prva vrata, (ii) ako je auto iza prvih vrata, voditelj otvara neka druga vrata. Uz ovaj protokol je $\mathbb{P}(K \mid A_2) = 0$, jer ako je auto iza drugih vrata, onda je koza iza prvih vrata pa po (i) voditelj otvara prva vrata (sjetite se da događaj K znači da voditelj otvara treća vrata i iza trećih vrata je koza). Sada slijedi da je $\mathbb{P}(A_2 \mid K) = 0$.

Primjer 2.16 Dva igrača, Fabijan i Baltazar, igraju niz igara od kojih svaka završava pobjedom Fabijana s vjerojatnošću p, pobjedom Baltazara s vjerojatnošću q i neriješeno s vjerojatnošću r, $0 < p, q, r < 1$, $p + q + r = 1$. Igre su nezavisne. Niz igara završava prvom pobjedom jednog od igrača. Nađite vjerojatnost da će Fabijan pobijediti.

Rješenje 1: Promatramo sljedeće događaje:

$$\begin{aligned} F_n &= \{\text{Fabijan dobiva meč u } n\text{-toj igri}\}\,, \\ D_k &= \{k\text{-ta igra je neriješena}\}\,, \\ E_k &= \{\text{Fabijan dobiva } k\text{-tu igru}\}\,. \end{aligned}$$

Tada je $F_n = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap E_n$ i zbog nezavisnosti igara (te stoga događaja), $\mathbb{P}(F_n) = \mathbb{P}(D_1) \cdots \mathbb{P}(D_{n-1})\mathbb{P}(E_n) = r^{n-1}p$. Događaji $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su po parovima disjunktni, $F = \{\text{Fabijan dobiva meč}\} = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ te je po σ-aditivnosti,

$$\mathbb{P}(F) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}p = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}\,.$$

Rješenje 2: Događaji $\{E_1, D_1, (E_1 \cup D_1)^c\}$ tvore potpun sustav događaja (uočite, $(E_1 \cup D_1)^c = \{\text{Baltazar dobiva prvu igru}\}$). Uvjetujemo na rezultat prve igre: po formuli potpune vjerojatnosti

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(F \mid E_1) + \mathbb{P}(D_1)\mathbb{P}(F \mid D_1) + \mathbb{P}((E_1 \cup D_1)^c)\mathbb{P}(F \mid (E_1 \cup D_1)^c) \\ &= p \cdot 1 + r\mathbb{P}(F \mid D_1) + q \cdot 0 = p + r\mathbb{P}(F \mid D_1)\,. \end{aligned}$$

Međutim, zbog nezavisnosti igara, $\mathbb{P}(F \mid D_1) = \mathbb{P}(F)$ – ako je prva igra neriješena sve “počinje ispočetka”. Zato je

$$\mathbb{P}(F) = p + r\mathbb{P}(F)\,,$$

otkud rješavanjem slijedi

$$\mathbb{P}(F) = \frac{p}{1-r} = \frac{p}{p+q}\,.$$

Ovo poglavlje završavamo svojevrsnim obratom Borel-Cantellijeve leme, Lema 1.19.

Lema 2.17 *Neka je* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz* nezavisnih *događaja na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Ako je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty\,,$$

onda je

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1\,.$$

Dokaz: Prisjetimo se, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Stavimo $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz događaja i vrijedi $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukoliko pokažemo da je $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za svaki $n \geq 1$, onda će tvrdnja leme slijediti iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $m > n$ proizvoljan. Tada je zbog nezavisnosti familije $(A_j)_{j\geq 1}$ te činjenice da je $e^{-x} \geq 1 - x$ za sve $x \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m}(1-\mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)}\,. \tag{2.5}$$

Iz pretpostavke $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ i neprekidnosti eksponencijalne funkcije, slijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)} = 0\,. \tag{2.6}$$

Iz (2.5) i (2.6) te neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajuće nizove događaja slijedi

$$\mathbb{P}(B_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=n}^{m} A_k) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c)\right) = 1\,.$$

□

Poglavlje 3

Prebrojavanje

Kod mnogih vjerojatnosnih problema, korištenjem simetrije dolazimo do računanja vjerojatnosti prebrojavanjem svih elementarnih događaja i svih elementarnih događaja koji nas zanimaju.

3.1 Osnovni principi

(1) *(Pravilo sume)* Ako imam n srebrnih vilica i m zlatnih vilica, onda imam ukupno $n + m$ vilica.

(2) *(Pravilo produkta)* Ako imam n različitih vilica i m različitih noževa, onda par *vilica–nož* mogu odabrati na nm načina.

Tipični problem kod prebrojavanja je: n objekata (ili stvari) treba podijeliti u r grupa (skupina, klasa). Broj načina na koji se to može učiniti ovisi o tome

(i) razlikuju li se objekti ili ne;

(ii) razlikuju li se klase ili ne;

(iii) je li uređaj (poredak) objekata u klasama relevantan ili ne;

(iv) mogu li se objekti upotrijebiti više puta ili ne.

Primjer 3.1 (a) Baca se šest kocaka. Kolika je vjerojatnost da dobijem sve različite brojeve?

(b) Isto pitanje kao u (a) samo se baca pet kocaka.

Rješenje:

(a) Stavimo $A = \{\text{kocke pokazuju različite brojeve}\}$. Zbog simetrije imamo $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Kako je $|\Omega| = 6^6$ te $|A| = 6!$, imamo $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{324}$.

(b) Stavimo $B = \{\text{kocke pokazuju različite brojeve}\}$. Analognim zaključivanjem kao u (a) dobivamo $\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{6^5} = \frac{5}{54}$.

3.2 Varijacije

Imamo n različitih objekata koje stavljamo u red jedan do drugog. Svaki takav uređaj od r, $1 \leq r \leq n$, objekata zove se *varijacija* (bez ponavljanja). Ako je $r = n$, onda takav uređaj zovemo *permutacija*. Ako je dozvoljeno ponavljati isti objekt, uređaj se zove *varijacija s ponavljanjem*.

Teorem 3.2 *(a) Broj varijacija (bez ponavljanja) duljine r od n različitih elemenata je $\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)\cdots(n-r+1)$. Specijalno, broj permutacija je $n!$.*

(b) Broj varijacija s ponavljanjem duljine r od n različitih elemenata je n^r.

Teorem 3.3 *Dano je $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ objekata r različitih tipova od koji je n_i tipa $i = 1, \ldots, r$ (a inače su nerazlučivi). Broj varijacija (bez ponavljanja) svih objekata je*

$$M_n(n_1, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}.$$

Primjer 3.4 Na koliko načina možemo urediti slova iz riječi *KVAKA*?

Rješenje: Označimo sa $M_5(2,2,1)$ traženi broj. Pogledajmo jedan uređaj, npr. *AKKVA*. Pretpostavimo na trenutak da razlikujemo iste simbole; $A \mapsto A_1$, A_2 i $K \mapsto K_1$, K_2. Tada iz uređaja *AKKVA* dobivamo četiri uređaja u kojima se simboli razlikuju – $A_1K_1K_2VA_2$, $A_2K_1K_2VA_1$, $A_1K_2K_1VA_2$ i $A_2K_2K_1VA_1$, tj. $2!$ zamjena od A_1 i A_2 te $2!$ zamjena od K_1 i K_2 (i $1!$ zamjena od V). Dakle, jedan uređaj u kojem ne razlikujemo simbole daje $2!2!1!$ permutacije slova A_1, A_2, K_1, K_2, V. Budući da je broj permutacija pet različith simbola jednak $5!$, slijedi da je $M_5(2,2,1)2!2!1! = 5!$. Dakle, $M_5(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!}$.

Dokaz: (Teorem 3.3) Dokaz slijedi analogno kao u Primjeru 3.4. □

Broj $M_n(n_1, \dots, n_r)$ se zove *polinomijalni koeficijent* (ili multinomijalni koeficijent). Specijalno, kada je $r = 2$, onda $n_1 = k$, $n_2 = n-k$ i $M_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$, kojeg zovemo *binomni koeficijent*.

Primjer 3.5 Na polici se nalaze četiri knjige iz matematike, četiri iz fizike, četiri iz kemije i dvije iz biologije. Nađite vjerojatnost da su knjige složene po područjima.

Rješenje: Stavimo $A = \{$knjige su složene po područjima$\}$. Sada imamo, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4!(4!3!2!)}{13!} = \frac{4!}{M_{13}(4,4,3,2)}$.

Proširimo sada pojam binomnog koeficijeta na skup realnih brojeva.

Definicija 3.6 *Za $x \in \mathbb{R}$ i $r \in \mathbb{N}$ definiramo*

$$\binom{x}{r} := \frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}.$$

3.3 Kombinacije

Izbor od r objekata između n različitih objekata zove se *kombinacija* (izabrane objekte ne uređujemo).

Teorem 3.7 *Broj načina izbora skupa od r objekata iz skupa od n različitih objekata (bez ponavljanja) je $\binom{n}{r}$.*

Teorem 3.8 *Broj načina podjela n različitih objekata u r različitih grupa veličine $n_1, \dots, n_r$, $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$, jednak je $M_n(n_1, \dots, n_r)$.*

Dokaz: Numerirajmo objekte brojevima $1, 2, \dots, n$. Ukoliko je broj 1 u i-toj grupi, na mjesto 1 stavimo kuglicu boje i. Ukoliko je objekt 2 u j-toj grupi, na mjesto 2 stavimo kuglicu boje j, itd. Na taj način smo svakoj podjeli n različitih simbola u r grupa pridružili jedan uređaj od n kuglica r različitih boja (tipova) od kojih je n_i boje (tipa) i. Od prije znao da takvih uređaja imamo $M_n(n_1, \dots, n_r)$. □

Teorem 3.9 *Broj cjelobrojnh rješenja* $(x_1, \ldots, x_n)$ *jednadžbe* $x_1 + \cdots + x_n = r$ *je*

(a) $\binom{r-1}{n-1}$ *ako je* $x_i > 0$ *za sve* $i = 1, \ldots, n$.

(b) $\binom{n+r-1}{n-1}$ *ako je* $x_i \geq 0$ *za sve* $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz:

(a) Problem je ekvivalentan sljedećem: imamo r kuglica i n kutija. Na koliko načina možemo raspodijeliti kuglice u kutije tako da niti jedna kutija ne ostane prazna? Zamislimo da je r kuglica posloženo u red te pretpostavimo da imamo $n-1$ štapova koje stavljamo u $r-1$ razmaka među kuglicama (na stavljajući više od jednog štapa u isti razmak). Broj mogućih izbora razmaka je $\binom{r-1}{n-1}$. Svaki izbor $r-1$ razmaka, odnosno načina postavljenog štapa, daje jednu raspodjelu kuglica po kutijama. Dakle, traženi odgovor je $\binom{r-1}{n-1}$.

(b) Problem je ekvivalentan sljedećem: imamo r kuglica i n kutija. Na koliko načina možemo raspodijeliti kuglice u kutije? Dodajmo još n kuglica te $n+r$ kuglica raspodjelimo po kutijama tako da niti jedna kutija ne ostane prazna. Po (a) takvih raspodjela ima $\binom{n+r-1}{n-1}$. Konačno, iz svake kutije maknimo točno jednu kuglicu. $\square$

Korolar 3.10 *Dan je skup od* n *različitih objekata koj se mogu ponavljati. Tada je broj načina odabira skupa veličine* r *jednak* $\binom{n+r-1}{n-1}$.

Dokaz: Odabiremo x_1 objekata tipa 1, ..., x_n objekata tipa n tako da je $x_1 + \cdots + x_n = r$. Sada zbog $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, slijedi tvrdnja. $\square$

Teorem 3.11 *(Binomni teorem) Za sve* $x, y \in \mathbb{R}$ *i* $n \geq 0$ *vrijedi*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k ,$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Nadalje, za $|x| < 1$ *i* $n \geq 0$ *vrijedi*

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Dokaz: Prve dvije jednakosti se lagano pokažu indukcijom. Pokažimo treću. Imamo

$$(1-x)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} x^l.$$

Dakle,

$$(1-x)^{-n} = \left(\sum_{l=0}^{\infty} x^l \right)^n = \sum_{l_1=0}^{\infty} x^{l_1} \cdots \sum_{l_n=0}^{\infty} x^{l_n}.$$

Želimo odrediti koeficijent uz x^k, $k = 0, 1, \ldots,$ u $(1-x)^{-n}$, koji je oblika $x^k = x^{l_1} \cdots x^{l_n}$, tj. $k = l_1 + \cdots + l_n$. Međutim, znamo da takvih cjelobrojnih rješenja ima $\binom{n+k-1}{n-1}$. □

Teorem 3.12 *(Multinomijalni teorem) Za sve* $r \geq 1$, $n \geq 0$ *i* $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_r \geq 0 \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} M_n(n_1, \ldots, n_r) x^{n_1} \cdots x^{n_r}.$$

Primjer 3.13 Krilati zmaj ugrožena je vrsta u divljini. Želite osnovati koloniju krilatih zmajeva koja će se moći razmožavati te procijenjujete da bi kolonija trebala imati r mužjaka i r ženki. Stoga lovite niz krilatih zmajeva, svaki od kojih je (nezavisno od drugih) mužjak s vjerojatnošću p, odnosno ženka s vjerojatnošću $q = 1 - p$, gdje je $p \neq q$. Nađite vjerojatnost p_n da je potrebno uloviti n zmajeva da bi u tih n bilo barem r mužjaka i barem r ženki.

Rješenje: Označimo s $A_n = \{$ulovljeno je r mužjaka i r ženki u n-tom ulovu$\}$ i $M_n = \{n$-ti krilati zmaj je mužjak$\}$. Tada je u prvih $n-1$ ulovljenih zmajeva $r-1$ mužjaka i $n-r$ ženki. Za bilo koji fiksan uređaj spolova vjerojatnost ulova u tom poretku je $p \cdot p^{r-1} q^{n-r}$. Broj načina na koji se može urediti $r-1$ mužjaka i $n-r$ ženki je $\binom{n-1}{r-1}$. Zato je za $n \geq 2r$,

$$\mathbb{P}(A_n \cap M_n) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}.$$

Slično,

$$\mathbb{P}(A_n \cap M_n^c) = \binom{n-1}{r-1} p^{n-r} q^r.$$

Slijedi

$$p_n = \binom{n-1}{r-1} p^r q^r (p^{n-2r} + q^{n-2r}).$$

□

3.4 Uključenje – isključenje

Tipičan primjer primjene U–I formule je problem deranžmana (engl. derangements = poremećenost, nered).

Primjer 3.14 Permutacija π skupa $\{1, \ldots, n\}$ je *deranžman* ako je $\pi(i) \neq i$, $i = 1, \ldots, n$. Nađite vjerojatnost p_n da slučajno odabrana permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ ne fiksira niti jednu točku te nađite $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Rješenje: Za $i = 1, \ldots, n$ stavimo $A_i = \{\pi : \ \pi(i) = i\}$ i $A = \cup_{i=1}^n A_i = \{\pi : \ \pi \text{ ima fiksnu točku}\}$. Dakle, $A^c = \{\pi : \pi \text{ nema fiksnu točku}\}$ i $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots \\
&\quad + (-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).
\end{aligned}$$

Računamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_i) &= \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \\
\mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \\
\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) &= \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{k} k!} \\
\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= \frac{1}{n!}.
\end{aligned}$$

Također, uočimo da je broj članova u sumi $\sum_{i_1<\cdots<i_k}$, $k=1,\ldots,n$, jednak $\binom{n}{k}$. Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= n\frac{1}{n}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{\binom{n}{k}k!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\\ &= \frac{1}{1!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{1}{k!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$p_n=\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{k!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}.$$

Konačno, $\lim_{n\to\infty}p_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}=e^{-1}$. □

3.5 Funkcije izvodnice

Definicija 3.15 *Dan je niz $a=(a_n)_{n\geq 0}$ realnih brojeva.*

(a) Funkcija $g_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ zove se funkcija izvodnica *niza a.*

(b) Funkcija $h_a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ zove se eksponencijalna funkcija izvodnica *niza a.*

Uočimo da je funkcija izvodnica niza $a=(a_n)_{n\geq 0}$ red potencija. Pretpostavit ćemo da je radijus konvergencije r_0 tog reda potencija strogo pozitivan ili beskonačan, $r_0\in(0,\infty]$. Tada red konvergira apsolutno na otvorenom intervalu $(-r_0,r_0)$, uniformno na svakom kompaktnom podskupu tog intervala i definira analitičku funkciju na $(-r_0,r_0)$. Po Taylorovom teoremu je tada $g_a^{(n)}(0)=n!a_n$, što znači da red potencija jedinstveno određuje svoje koeficijenete. Na taj način je pokazan sljedeći rezultat.

Teorem 3.16 *Neka su $a=(a_n)_{n\geq 0}$ i $b=(b_n)_{n\geq 0}$ nizovi realnih brojeva. Ako vrijedi $g_a(x)=g_b(x)$ za sve $x\in(x_0,x_1)$, $-r_0\leq x_0<0<x_1\leq r_0$, onda je $a_n=b_n$ za sve $n\geq 0$.*

Definicija 3.17 *Neka je dan niz funkcija $(f_n)_{n\geq 0}$. Funkcija $g(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)y^n$ zove se* dvodimenzionalna funkcija izvodnica.

Sljedeći primjer pokazuje primjenu funkcija izvodnica. Više o funkcijama izvodnicama bit će rečeno u Poglavlju 6.

Primjer 3.18 U šumi je n ptica, niti jedna nije prstenovana. Svaki dan se ulovi jedna ptica te joj se stavi prsten (ukoliko već nije prstenovana) i pusti. Svaka ptica ima jednaku šansu biti ulovljena svaki dan. Ta procedura ponavlja se r dana uzastopce, $r \geq n$. Pokažite da je vjerojatnost da nakon r dana sve ptice budu prstenovane jednaka

$$p(r,n) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^r.$$

Rješenje 1: Ukupan broj ishoda je n^r (ptice su različite). Stavimo

$$N(r,n) = \text{broj ishoda u kojima je svaka ptica ulovljena barem jednom.}$$

Nazovimo jednu pticu prvom pticom. Neka je

$$\begin{aligned} N_k(r,n) = {} & \text{broj ishoda u kojima je prva ptica ulovljena točno } k \text{ puta,} \\ & \text{a sve ostale barem jednom.} \end{aligned}$$

Uočimo de je $\binom{r}{k}$ broj odabira od k dana u kojima je ulovljena prva ptica i

$$\begin{aligned} N(r-k, n-1) = {} & \text{broj ishoda u kojima je preostalih } n-1 \textit{ ptica ulovljeno} \\ & \text{u ostalih } r-k \textit{ dana.} \end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} N_k(r,n) &= \binom{r}{k} N(r-k, n-1) \\ N(r,n) &= \sum_{k=1}^{r} N_k(r,n) \\ N(r,1) &= 1. \end{aligned}$$

Dakle,

$$N(r,n) = \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} N(r-k, n-1).$$

Uvedimo sada eksponencijalnu funkciju izvodnicu niza $(N(r,n))_{r\geq 0}$, $n \geq 1$. Imamo

$$h_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N(n,r)}{r!} x^r, \qquad n \geq 1.$$

Očito

$$h_1(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} = e^x - 1.$$

Nadalje, za $n > 1$ imamo

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} N(r-k, n-1) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{r} \frac{x^{r-k}x^k}{(r-k)!k!} N(r-k, n-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{r=k}^{\infty} \frac{x^{r-k}}{(r-k)!} N(r-k, n-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{x^l}{l!} N(l, n-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} h_{n-1}(x) = (e^x - 1) h_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Dakle, $h_n(x) = (e^x - 1)h_{n-1}(x)$ uz $h_1(x) = e^x - 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} h_n(x) &= (e^x - 1)^n = e^{nx}(1 - e^{-x})^n = e^{nx} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-e^{-x})^{-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j e^{(n-j)x}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-j)^r x^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(n-j)^r}{r!} (-1)^j \binom{n}{j} x^r. \end{aligned}$$

Za $r = 0$ imamo

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0.$$

Dakle,

$$h_n(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N(r,n}{r!} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \sum_{j=0}^{n} (n-j)^r (-1)^j \binom{n}{j},$$

iz čega zaključujemo da je

$$N(r,n) = \sum_{j=0}^{n} (n-j)^r (-1)^j \binom{n}{j}.$$

Konačno,

$$p(r,n) = \frac{N(r,n)}{n^r} = \sum_{j=0}^{n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^r (-1)^j \binom{n}{j}.$$

Rješenje 2: Stavimo $A_k = \{k\text{-ta ptica nije prstenovana}\}$ i $A = \cup_{k=1}^{n} A_k$. Tada je $A^c = \{\text{sve su ptice prstenovane}\}$ te imamo $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) =& \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\\ =& \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \cdots\\ &+ (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^r = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\\ \mathbb{P}(A_i \cap A_j) &= \left(\frac{n-2}{n}\right)^r = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^r\\ \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) &= \left(\frac{n-k}{n}\right)^r = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r\\ \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= 0.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\mathbb{P}(A) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^r + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r + \cdots + 0.$$

Konačno,

$$\mathbb{P}(A^c) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^r.$$

Poglavlje 4

Slučajne varijable

4.1 Slučajne varijable

Primjer 4.1 (a) Bacamo novčić n puta. Zanima nas broj pisama. Taj broj je slučajan i ovisi o elementarnom događaju $\omega \in \Omega$. Označimo taj broj s $X(\omega)$. Dakle, $X : \Omega \to \{0, \dots, n\}$.

(b) Bacamo novčić sve dok ne pade pismo. Neka je T broj potrebnih bacanje. Ponovno, taj broj je slučajan i ovisi o elementarnom događaju $\omega \in \Omega$; $T(\omega) \in \mathbb{N}$. Dakle, $T : \Omega \to \mathbb{N}$.

Definicija 4.2 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zove se* diskretna slučajna varijabla *ako postoji prebrojiv skup* $D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ *takav da je*

(i) $X(\omega) \in D$ *za sve* $\omega \in \Omega$*;*

(ii) $\{X = a_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_j\} \in \mathcal{F}$ *za sve* $j \in \mathbb{N}$.

Napomena 4.3 Neka je $x \in \mathbb{R}$ i neka je X diskretna slučajna varijabla. Tada je $\{X \le x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \cup_{a_j \le x}\{X = a_j\} \in \mathcal{F}$. Obratno, prepostavimo da je $X : \Omega \to D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ te da vrijedi $\{X \le x\} \in \mathcal{F}$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Tvrdimo da je X diskretna slučajna varijabla. Uočimo da je $\{X < x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{X \le x - 1/n\} \in \mathcal{F}$. Zato je za svaki $x \in \mathbb{R}$, $\{X = x\} = \{X \le x\} \setminus \{X < x\} \in \mathcal{F}$. Specijalno, $\{X = a_j\} \in \mathcal{F}$ za sve $j \in \mathbb{N}$.

Gornja napomena vodi do sljedeće općenite definicije slučajne varijable.

Definicija 4.4 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *zove se* slučajna varijabla *ako vrijedi* $\{X \le x\} \in \mathcal{F}$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$.

Napomena 4.3 kaže da je diskretna slučajna varijabla ujedno i slučajna varijabla te da je slučajna varijabla koja poprima prebrojivo mnogo vrijednosti diskretna slučajna varijabla.

Napomena 4.5 Neka je Ω konačan ili prebrojiv te $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Tada je svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna vrijabla.

4.1.1 Bernoullijeva slučajna varijabla

Ako $X : \Omega \to \{0, 1\}$, X se zove *Bernoullijeva slučajna varijabla.* Stavimo, $p = \mathbb{P}(X = 1)$ i $q = 1 - p = \mathbb{P}(X = 0)$. Tada pišemo $X \sim B(1, p)$ ili

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

i nazivamo je Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p \in [0, 1]$.

Napomena 4.6 Uočimo da za $A \in \mathcal{F}$, $X = 1_A$ je Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\mathbb{P}(A)$.

Primjer 4.7 Slučajno biramo točku iz intervala $[0, 1]$. Elementarni događaji su točke iz $[0, 1]$ pa stavimo $\Omega = [0, 1]$. Zanima nas je li slučajno odabrana točka veća ili jednaka od $1/2$.

Rješenje: Definirajmo $X = 1_{[1/2,1]}$. Tada je $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}([1/2, 1]) =$ intuitivno $= 1/2$.

Bernoullijevu slučajnu varijablu možemo kanonski reprezentirati na sljedeći način. Stavimo $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega_1)$ i $\mathbb{P}_1(\{0\}) = q$ te $\mathbb{P}_1(\{1\}) = p$. Definirajmo $X_1 : \Omega_1 \to \{0, 1\}$ kao $X_1(\omega) = \omega$. Dakle, $\mathbb{P}_1(X_1 = 1) = \mathbb{P}_1(\{1\}) = p$ pa je $X_1 \sim B(1, p)$. Nadalje, za $n \ge 1$ stavimo $\Omega = \{0, 1\}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \cdots \times \mathbb{P}_1$. Uočimo da je $\omega \in \Omega$ oblika $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ (niz 0 i 1). Za $i = 1, \ldots, n$ definirajmo $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ kao $X_i(\omega) = \omega_i$. Očito $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}_1(\{1\}) = p$ pa je $X_i \sim B(1, p)$.

4.1.2 Binomna slučajna varijabla

Bacamo ne nužno simetričan novčić n puta. Pretpostavljamo da su bacanja nezavisna. Vjerojatost da će u jednom bacanju pasti pismo je $p \in [0,1]$ Neka je X broj pisama koji su pali. Dakle, $X(\omega) \in \{0,1,\ldots,n\}$ za sve $\omega \in \Omega$ te vrijedi da je $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ za $k = 0,1,\ldots,n$. Nadalje, za $j = 1,\ldots,n$ stavimo

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{u } j\text{-tom bacanju je palo pismo} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, $X_j \sim B(1,p)$ za sve $j = 1,\ldots,n$. Intuitivno očekujemo $X = \sum_{j=1}^n X_j$. Zaista, uz $\Omega = \Omega_1^n$, gdje je $\Omega_1 = \{0,1\}$, definiramo $X(\omega) := \sum_{j=1}^n \omega_j$, $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$. Sada jednostavno zaključujemo da je $X = \sum_{j=1}^n X_j$. Slučajnu varijablu X zovemo *binomna slučajna varijabla* s parametrima p i n. Pišemo $X \sim B(n,p)$ ili

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ q^n & \binom{n}{1} p q^{n-1} & \ldots & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \ldots & p^n \end{pmatrix}.$$

4.1.3 Geometrijska slučajna varijabla

Bacamo ne nužno simetričan novčić. Pretpostavljamo da su bacanja nezavisna. Vjerojatnost da će u jedom bacanju pasti pismo je $p \in (0,1]$. Neka je T broj bacanja potrebnih da bi se dobilo prvo pismo. Dakle, $T(\omega) \in \mathbb{N}$ za sve $\omega \in \Omega$ i $\mathbb{P}(T=n) = q^{n-1}p$ za $n \in \mathbb{N}$. Uočimo, ako dozvolimo $p = 0$, onda je $\mathbb{P}(T < \infty) = 0$. Analogno kao i prije, za $j \in \mathbb{N}$ stavimo

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{u } j\text{-tom bacanju je palo pismo} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle, $X_j \sim B(1,p)$ za sve $j \in \mathbb{N}$. Intuitivno očekujemo $T = \min\{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^n X_j = 1\}$. Stavimo $\Omega = \Omega_1^{\mathbb{N}}$ (pripadna σ-algebra i vjerojatnost su dane u duhu odjeljka 1.4 te ih ovdje nećemo detaljno diskutirati), gdje je ponovno $\Omega_1 = \{0,1\}$ i $T(\omega) = \min\{j \in \mathbb{N} : \omega_j = 1\}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$. Sada jednostavno zaključujemo da je $T = \min\{n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^n X_j = 1\}$. Slučajnu varijablu T zovemo *geometrijska slučajna varijabla s parametrom* p *s vrijednostima u* $\mathbb{N}$. Pišemo $T \sim G(p)$ ili

$$T \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n & \ldots \\ p & qp & \ldots & q^{n-1}p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Uz gore opisanu geometrijsku slučajnu varijablu, ponekad se koristi i sljedeća modifikacija. Označimo sa $\widetilde{T}$ broj glava prije nego što se pojavi prvo pismo. Tada je $\widetilde{T}(\omega) \in \mathbb{Z}_+$ za $\omega \in \Omega$, očito vrijedi da je $\widetilde{T} = T - 1$ te $\mathbb{P}(\widetilde{T} = n) = \mathbb{P}(T = n + 1) = q^n p$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Slučajnu varijablu $\widetilde{T}$ zovemo *geometrijska slučajna varijabla s parametrom p s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$* te ćemo je označavati sa $\widetilde{T} \sim G_0(p)$.

4.2 Distribucije

Definicija 4.8 *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosi prostor i neka je $X : \Omega \to D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla. Funkcija $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana sa*

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

zove se diskretna (vjerojatnosna) funkcija gustoće *slučajne varijable X.*

Neka je $p_j = \mathbb{P}(X = a_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f(x) = \begin{cases} p_j, & x = a_j \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

Gornju relaciju često pišemo kao

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

i to zovemo *distribucija* od X.

Primjer 4.9 Neka je $X \sim B(n, p)$. Tada je

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & x \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ te neka je f njena diskretna funkcija gustoće. Uočimo da vrijedi

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sum_{x \in D} f(x) = \sum_{a_j \in D} f(a_j) = \sum_{a_j \in D} p_j = \mathbb{P}(X \in D) = 1.$$

Izraz $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ je neuobičajen, jer sugerira sumaciju po neprebrojivom skupu $\mathbb{R}$. No, budući da je $f(x) \neq 0$ za najviše prebrojivo mnogo x, sumacija je po prebrojivom skupu.

Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ te da postoji $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ takav da je

(i) $f(x) = 0$ za $x \notin D$;

(ii) $\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sum_{x\in D} f(x) = 1$.

Tada je f funkcija gustoće neke diskretne slučajne varijable. Uočimo da takva slučajna varijabla zaista postoji. Naime, stavimo $\Omega = D$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(D)$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definiramo s $X(\omega) = \omega$.

Primjer 4.10 Neka je $\lambda > 0$ i neka je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, & x \in \{0,1,2,\dots\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Uočimo,

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!} = 1.$$

Dakle, f je funkcija gustoće neke diskretne slučajne varijable X koju nazivamo *Poissonova slučajna varijabla* s parametrom λ. Oznaka je $X \sim P(\lambda)$.

Primjer 4.11 Bacamo ne nužno simetričan simetričan novčić. Pretpostavljamo da su bacanja nezavisna. Vjerojatnost da će u jedom bacanju pasti pismo je $p \in (0,1]$. Neka je Y broj bacanja potrebnih da se dobije r pisama, $r \in \mathbb{N}$. Nađite funkciju gustoće slučajne varijable Y.

Rješenje: Izračunajmo $\mathbb{P}(Y = m)$, $m \geq r$. Dakle, u m-tom bacanju smo dobili pismo. U prethodnih $m-1$ bacanja imamo $r-1$ pisama i $(m-1)-(r-1) = m-r$ glava. Vjerojatnost svakog takvog niza je $q^{m-r}p^{r-1}p = q^{m-r}p^r$. Broj načina da u prvih $m-1$ bacanja imamo $r-1$ pisama jedak je $\binom{m-1}{r-1}$. Dakle,

$$\mathbb{P}(Y = m) = \binom{m-1}{r-1}q^{m-r}p^r.$$

Uočite da je za $r = 1$ slučajna varijabla Y u stvari geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N}$.

Neka je sada Z broj glava koje su se pojavile prije r-tog pisma. Drugim riječima, Z je broj neuspjeha prije r-tog uspjeha. Tada je $Z+r$ broj pokusa potrebnih za r uspjeha, tj. $Z+r=Y$. Slijedi,

$$\mathbb{P}(Z=n)=\mathbb{P}(Y-r=n)=\mathbb{P}(Y=n+r)=\binom{n+r-1}{r-1}q^n p^r.$$

Slučajnu varijablu Z zovemo *negativna binomna slučajna varijabla* s parametrima r i p te označavamo $Z\sim N(r,p)$. Ponovno, $N(1,p)$ je geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Zbog

$$1=\sum_{n=0}^{\infty} f_Z(n)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}q^n p^r$$

imamo

$$(1-q)^{-r}=p^{-r}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}q^n.$$

Definicija 4.12 *Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.* Funkcija distribucije *od X je funkcija $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ definirana sa*

$$F(x)=\mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\le x\}).$$

Primjer 4.13 Neka je $X\sim B(1,p)$. Tada je pripadna funkcija distribucije dana sa

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0\\ 1-p, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Uočimo sljedeća svojstva funkcija distribucije, koja su izravna posljedica svojstva vjerojatnosti.

Teorem 4.14 *Neka je X slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ te neka je F pripadna funkcija distribucije. Tada vrijedi*

(i) F je neopadajuća;

(ii) F je neprekida zdesna u svakoj točki $x\in\mathbb{R}$;

(iii) F ima limes s lijeva u svakoj točki $x\in\mathbb{R}$;

(iv) $F(-\infty) := \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *i* $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Dokaz:

(i) Neka je $x \leq y$. Tada je $\{X \leq x\} \subseteq \{X \leq y\}$ te je zbog monotonosti vjerojatnosti $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \leq \mathbb{P}(X \leq y) = F(y)$.

(ii) Neka je $x \in \mathbb{R}$ te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz takav da je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (dakle x_n konvergira prema x zdesna). Tada je $\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \cdots \supseteq \{X \leq x\}$ te $\{X \leq x\} = \cap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}$. Iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja slijedi

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)\,,$$

što dokazuje neprekidnost zdesna u x.

(iii) Poznato je da svaka neopadajuća funkcija ima limes slijeva u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$. U ovom dokazu vjerojatnosno ćemo identificirati taj limes slijeva. Neka je $x \in \mathbb{R}$ te $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz takav da je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ (dakle x_n konvergira prema x slijeva). Tada je $\{X \leq x_1\} \subseteq \{X \leq x_2\} \subseteq \cdots \subseteq \{X \leq x\}$ te $\{X < x\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}$ (uočite strogu nejednakost u $\{X < x\}$). Iz neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajuće nizove događaja slijedi

$$\mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}\left(\cup_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n)\,.$$

To dokazuje da F ima limes slijeva u x te da je $F(x-) = \mathbb{P}(X < x)$.

(iv) Neka je $(x_n)_{n\geq 1}$ proizvoljan nerastući niz takav da je $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Tada je $\{X \leq x_1\} \supseteq \{X \leq x_2\} \supseteq \ldots$ te $\cap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\} = \emptyset$. Iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja slijedi

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x_n) = \mathbb{P}\left(\cap_{n=1}^{\infty}\{X \leq x_n\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0\,,$$

što dokazuje prvu jednakost. Druga se dokazuje na sličan način.

□

Posljedica gornjeg dokaza je sljedeća važna činjenica: za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi da je

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x) = F(x) - F(x-)\,. \tag{4.1}$$

Zaključujemo da je F neprekidna u $x \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Sljedeći teorem pokazuje da se kod diskretne slučajne varijable funkcija gustoće može rekonstruirati iz funkcije distribucije i obratno.

Teorem 4.15 *Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka su F i f, redom, pripadne fukcije distribucije i gustoće. Tada vrijedi:*

(i) $f(x) = F(x) - F(x-)$;

(ii) $F(x) = \sum_{y \leq x} f(x)$.

Dokaz:

(i) Za diskretnu slučajnu varijablu je $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$ pa tvrdnja slijedi iz (4.1).

(ii) Pretpostavimo da je $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ skup vrijednosti slučajne varijable X. Za $x \in \mathbb{R}$ je $\{X \leq x\} = \cup_{a_j \leq x}\{X = a_j\}$ pa je

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\cup_{a_j \leq x}\{X = a_j\} = \sum_{a_j \leq x} \mathbb{P}(X = a_j) = \sum_{a_j \leq x} f(a_j)\,.$$

Zadnju sumu često pišemo kao $\sum_{y \leq x} f(y)$. Budući da je $f(y) \neq 0$ samo za najviše prebrojivo mnogo y, ta suma je najviše prebrojiva te stoga dobro definirana.

$\square$

Primjer 4.16 Neka je slučajna varijabla X dana sa

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}.$$

Tada je pripadna funkcija distribucije dana sa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 2 \\ 3/4, & 2 \leq x < 3 \\ 7/8, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ skup njezinih vrijednosti. Nadalje, neka je $g : D \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada $Y := g \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ poprima vrijednosti u skupu $g(D) = \{b_1, b_2, \dots\}$, koji je također najviše prebrojiv. Nadalje, za svaki $j \in \mathbb{N}$,

$$\{Y = b_j\} = \{g \circ X = b_j\} = \{X \in g^{-1}(\{b_j\})\} \in \mathcal{F}.$$

Dakle, Y je diskretna slučajna varijabla.

Teorem 4.17 *Funkcija gustoće slučajne varijable Y dana je s*

$$f_Y(y) = \sum_{x:\, g(x)=y} f_X(x).$$

Dokaz: Imamo,

$$f_Y(y) = \mathbb{P}(g(X) = y) = \mathbb{P}(X \in g^{-1}(\{y\})) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} f_X(x) = \sum_{x:\, g(x)=y} f_X(x).$$

$\square$

Primjer 4.18 Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X. Odredimo funkciju gustoće sljedećih slučajnih varijabli

(a) $-X$;

(b) $X^+ := \max\{0, X\}$;

(c) $X^- := \max\{0, -X\}$;

(d) $|X| = X^+ + X^-$;

(e) $\operatorname{sgn} X := \begin{cases} X/|X|, & X \neq 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

Rješenje:

(a) Očito $f_{-X}(x) = f_X(-x)$.

(b) Imamo

$$f_{X^+}(y) = \sum_{x:\, x^+=y} f_X(x) = \begin{cases} f_X(y), & y > 0 \\ \sum_{x\le 0} f_X(x), & y = 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(c) Imamo

$$f_{X^-}(y) = \sum_{x:\, x^-=y} f_X(x) = \begin{cases} f_X(-y), & y > 0 \\ \sum_{x\ge 0} f_X(x), & y = 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(d) Imamo,

$$f_{|X|}(y) = \mathbb{P}(|X| = y) = \begin{cases} f_X(y) + f_X(-y), & y > 0 \\ f_X(0), & y = 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

(e) Očito, $\operatorname{sgn} X \in \{-1, 0, 1\}$. Sada imamo $f_{\operatorname{sgn} X}(0) = f_X(0)$,

$$f_{\operatorname{sgn} X}(1) = \mathbb{P}(X > 0) = \sum_{x>0} f_X(x)$$

i

$$f_{\operatorname{sgn} X}(-1) = \mathbb{P}(X < 0) = \sum_{x<0} f_X(x).$$

Primjer 4.19 Kutija sadrži n kuglica numeriranih brojevima $1, \ldots, n$. Iz kutije je izvučeno $r < n$ kuglica (s vraćanjem). Neka je Y najveći od izvučenih brojeva. Odredimo pripadnu funkciju gustoće f_Y i funkciju distribucije F_Y.

Nadalje, r kuglica izvlači se bez vraćanja. Neka je X najveći izvučeni broj. Ponovno, odredimo pripadnu funkciju gustoće f_X i funkciju distribucije F_X te pokažimo da je $F_X \le F_Y$.

Rješenje: Očito, $Y \in \{1, \ldots, n\}$ i $X \in \{r, \ldots, n\}$. Za $x \in \{1, \ldots, n\}$ imamo

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(\text{svaka izvučena kuglica je manja ili jednaka od } x) = \frac{x^r}{n^r}$$

te

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \mathbb{P}(Y = x) = \mathbb{P}(Y \leq x) - \mathbb{P}(Y \leq x-1) = F_Y(x) - F_Y(x-1) \\ &= \frac{x^r}{n^r} - \frac{(x-1)^r}{n^r}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{x^r}{n^r} - \frac{(x-1)^r}{n^r}, & x \in \{1, \dots, n\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{[x]^r}{n^r}, & 0 \leq x < n \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$

S druge strane, ako je $x \in \{r, \dots, n\}$, onda je

$$F_X(x) = \frac{\binom{x}{r}}{\binom{n}{r}}$$

i

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F_X(x) - F_X(x-1) \\ &= \frac{\binom{x}{r}}{\binom{n}{r}} - \frac{\binom{x-1}{r}}{\binom{n}{r}} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{r}} \left[\frac{x \cdots (x-r+1)}{r!} - \frac{(x-1) \cdots (x-r)}{r!} \right] \\ &= \frac{1}{\binom{n}{r}} \frac{(x-1) \cdots (x-r+1)}{r!} (x - (x-r)) \\ &= \frac{\binom{x-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{x-1}{r-1}}{\binom{n}{r}}, & x \in \{r, \dots, n\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < r \\ \frac{\binom{[x]}{r}}{\binom{n}{r}}, & 0 \leq x < n \\ 1, & x \geq n. \end{cases}$$

Sada se lagano pokaže da vrijedi $F_X \leq F_Y$.

4.3 Matematičko očekivanje

Matematičko očekivanje je poopćenje pojma srednje vrijednosti.

Definicija 4.20 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako vrijedi $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f(x) < \infty$, onda kažemo da X ima* matematičko očekivanje *koje definiramo kao*

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x\in\mathbb{R}} xf(x).$$

Uočimo, ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix},$$

onda je $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f(x) = \sum_{a_j\in D} |a_j|p_j$ i $\mathbb{E}(X) = \sum_{a_j\in D} a_j p_j$. Ako X poprima najviše konačno mnogo vrijednosti, onda X nužno ima očekivanje. Broj $\mathbb{E}(X)$ shvaćamo kao parametar lokacije od X.

Definicija matematičkog očekivanja ima sljedeću fizikalnu interpretaciju: ako distribuciju

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

interpretiramo kao sustav materijalnih točaka s masama p_j razmještenih po realnom pravcu na koordinatama a_j, $j = 1, \dots, n$, onda, s fizikalnog kuta gledišta, veličina $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j p_j$ predstavlja težište tog sustava.

Primjer 4.21 Neka je $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) = p$ i $X := 1_A$. Tada je $X \sim B(1, p)$ i $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$.

Primjer 4.22 Neka su X i Y diskretne slučajne varijable s, redom, funkcijama gustoće

$$f_X(x) = \frac{4}{x(x+1)(x+2)}, \qquad x \in \mathbb{N}$$

i

$$f_Y(x) = \frac{1}{x(x+1)}, \qquad x \in \mathbb{N}.$$

Tada X ima matematičko očekivanje, a Y nema.

Rješenje: Za $m \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{m} |x| f_X(x) &= \sum_{x=1}^{m} \frac{4x}{x(x+1)(x+2)} \\ &= 4 \sum_{x=1}^{m} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f_X(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{x=1}^{m} |x| f_X(x) = 2$$

i

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_X(x) = 2.$$

S druge strane,

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f_Y(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{x=1}^{m} |x| f_Y(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{x=1}^{m} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

Dakle, Y nema matematičko očekivanje.

Primjer 4.23 Modificirajmo slučajnu varijablu Y iz prethodnog primjera na sljedeći način. Neka je Z diskretna slučajna varijabla koja prima vrijednosti u skupu $D = \{\dots, -6, -4, -2, 1, 3, 5, \dots\}$ s funkcijom gustoće

$$f_Z(x) = \frac{1}{|x|(|x|+1)}, \qquad x \in D\,.$$

Uočite da je razlika između Y i Z ta da Z poprima negativne parne vrijednosti, no s istim vjerojatnostima s kojima Y poprima pozitivne parne vrijednosti. Pokažimo da Z nema matematičko očekivanje. Zaista, isto kao u prethodnom primjeru imamo

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f_Z(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{x=1}^{m} |x| f_Z(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{x=1}^{m} \frac{1}{x+1} = \infty.$$

Uočite da odgovarajući red bez apsolutnih vrijednosti

$$\sum_{x\in\mathbb{R}} xf_Z(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^{x+1}x}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(-1)^{x+1}}{x+1}$$

konvergira po Leibnizovom kriteriju. Dakle, iako je red $\sum_{x\in\mathbb{R}} xf_Z(x)$ konvergentan, slučajna varijabla Z *nema* matematičko očekivanje.

Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, takva da $X \geq 0$ i $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f(x) = \infty$. Tada je očito $\sum_{x\in\mathbb{R}} xf(x) = \infty$ i možemo definirati $\mathbb{E}(X) = \infty$. Nadalje, neka je X proizvoljna diskretna slučajna varijabla. Tada očito vrijedi $X = X^+ - X^-$, X^+ i X^- su također diskretne slučajne varijable te $X^+ \geq 0$ i $X^- \geq 0$. Ako je barem jedan od brojeva $\mathbb{E}(X^+)$ i $\mathbb{E}(X^-)$ konačan, onda definiramo $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$.

4.3.1 Matematičko očekivanje nekih slučajnih varijabli

U ovom odjeljku računamo matematičko očekivanje najpoznatijih diskretnih slučajnih varijabli – binomne, Poissonove i geometrijske.

Primjer 4.24 Neka je $X \sim B(n,p)$. Odredimo $\mathbb{E}(X)$.

Rješenje: Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n\cdots(n-k+1)}{k!}p^k q^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}p^{k-1}q^{n-k} \\
&= np\sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)\cdots(n-l)}{l!}p^l q^{(n-1)-l} = np\sum_{l=0}^{n-1}\binom{n-1}{l}p^l q^{(n-1)-l} \\
&= np(p+q)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

Primjer 4.25 Neka je $X \sim P(\lambda)$. Odredimo $\mathbb{E}(X)$.

Rješenje: Imamo,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

Primjer 4.26 Neka je $T \sim G(p)$ geometrijska slučajna varijabla na $\mathbb{N}$. Odredimo $\mathbb{E}(X)$.

Rješenje: Imamo,

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p = p\frac{d}{dq}\sum_{n=0}^{\infty} q^n = p\frac{d}{dq}(1-q)^{-1} = p(1-q)^{-2} = \frac{1}{p}\,.$$

Ako je $\widetilde{T}$ geometrijska slučajna varijabla na $\mathbb{Z}_+$, onda je $\widetilde{T} = T - 1$ pa je (vidi Teorem 4.31 (a)), $\mathbb{E}(\widetilde{T}) = \mathbb{E}(T) - 1 = 1/p - 1 = q/p$.

4.3.2 Matematičko očekivanje na diskretnom vjerojatnosnom prostoru

Na diskretnom vjerojatnosnom prostoru matematičko očekivanje može se definirati na ekvivalentan način, često pogodniji za neke izračune.

Propozicija 4.27 *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskretan vjerojatnosni prostor i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla s vjerojatnosnom funkcijom gustoće f. Tada X ima matematičko očekivanje ako i samo ako*

$$\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty\,. \tag{4.2}$$

U tom slučaju je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\,. \tag{4.3}$$

Dokaz: Budući da je Ω najviše prebrojiv, X prima najviše prebrojivo vrijednosti $D = \{a_1, a_2, \dots\}$. Stavimo $A_j := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_j\}$ te $p_j := \mathbb{P}(A_j) = \sum_{\omega\in A_j} \mathbb{P}(\{\omega\})$. Nadalje vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\,\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{a_j\in D}\sum_{\omega\in A_j} |X(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{a_j\in D}\sum_{\omega\in A_j} |a_j|\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{a_j\in D} |a_j| \sum_{\omega\in A_j} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{a_j\in D} |a_j| p_j = \sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x)\,.\end{aligned}$$

Dakle, red u (4.2) konvergira ako i samo ako je $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f(x) < \infty$, tj. ako i samo ako postoji matematičko očekivanje. Jednakost (4.3) sada slijedi sličnim računom kao gore. □

Propozicija 4.28 *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ diskretan vjerojatnosni prostor i $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije slučajne varijable. Ako X i Y imaju matematičko očekivanje, onda i slučajna varijabla $X+Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ima matematičko očekivanje i vrijedi*

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\,.$$

Dokaz: Računamo

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} |X+Y|(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)+Y(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &\le \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty\,.\end{aligned}$$

Po Propoziciji 4.27 zaključujemo da $X+Y$ ima matematičko očekivanje. Nadalje, ponovno koristeći Propoziciju 4.27 dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\,.\end{aligned}$$

□

4.3.3 Očekivanje funkcije slučajne varijable

Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Definirajmo $Y := g(X)$. Želimo odrediti $\mathbb{E}(Y)$ (ako isto postoji). Po definiciji, $\mathbb{E}(Y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} y f_Y(y)$ ako $\sum_{y\in\mathbb{R}} |y| f_Y(y) < \infty$. Dakle, prvo bismo trebali odrediti f_Y, što nije uvijek jednostavno. Sljedeći rezultat olakšava računanje $\mathbb{E}(Y)$.

Teorem 4.29 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x\in\mathbb{R}} g(x) f(x),$$

kadgod $\sum_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| f(x) < \infty$.

Dokaz: Neka je $g(X(\Omega)) = \{g_1, g_2, \dots\}$. Za $j \in \mathbb{N}$ definiramo $A_j := \{x \in \mathbb{R} : g(x) = g_j\}$. Uočimo, $g(X(\omega)) = g_j$ ako i samo ako $X(\omega) \in A_j$. Dakle, $f_{g(X)}(g_j) = \mathbb{P}(g(X) = g_j) = \mathbb{P}(X \in A_j)$, $j \in \mathbb{N}$. Konačno, ukoliko sve donje sume apsolutno konvergiraju (što je slučaj uz pretpostavku teorema), imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \sum_{g_j \in g(X(\Omega))} g_j f_{g(X)}(g_j) = \sum_{g_j \in g(X(\Omega))} g_j \mathbb{P}(g(X) = g_j) \\
&= \sum_{g_j \in g(X(\Omega))} g_j \mathbb{P}(X \in A_j) = \sum_{g_j \in g(X(\Omega))} g_j \sum_{x \in A_j} f(x) \\
&= \sum_{g_j \in g(X(\Omega))} \sum_{x \in A_j} g_j f(x) = \sum_{g_j \in g(X(\Omega))} \sum_{x \in A_j} g(x) f(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) f(x),
\end{aligned}$$

gdje smo u zadnjem koraku koristili činjenicu da je $A_j \cap A_k = \emptyset$ za $j \neq k$. $\square$

Primjer 4.30 Neka je $X \sim P(\lambda)$. Odredimo $\mathbb{E}(\cos(\theta X))$.

Rješenje: Kako je $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\cos(\theta X)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \operatorname{Re} \left(e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{i\theta})^n}{n!} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i\theta}} \right) \\
&= \operatorname{Re} e^{\lambda(e^{i\theta} - 1)} = \operatorname{Re} e^{\lambda(\cos\theta - 1) + i\lambda \sin\theta} \\
&= e^{\lambda(\cos\theta - 1)} \cos(\lambda \sin\theta).
\end{aligned}$$

Teorem 4.31 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f i matematičkim očekivanjem $\mathbb{E}(X)$ te neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

(i) $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$;

(ii) ako je $\mathbb{P}(X = a) = 1$, *onda je* $\mathbb{E}(X) = a$;

(iii) ako je $\mathbb{P}(a < X \leq b) = 1$, *onda je* $a < \mathbb{E}(X) \leq b$;

(iv) ako $g(X)$ i $h(X)$ imaju matematičko očekivanje, za neke funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onda $\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X))$.

Dokaz:

(i) Prvo uočimo da slučajna varijabla $aX + b$ ima očekivanje. Naime,

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |ax + b| f(x) \leq \sum_{x \in \mathbb{R}} (|a||x| + |b|) f(x) = |a| \sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f(x) + |b| < \infty.$$

Sada imamo

$$\mathbb{E}(aX + b) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (ax + b) f(x) = a \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x) + b = a\mathbb{E}(X) + b.$$

(ii) Imamo,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \mathbb{P}(X = x) = aP(X = a) = a.$$

(iii) Imamo,

$$a = \sum_{x \in \mathbb{R}} a f(x) < \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x) = \mathbb{E}(X) \leq \sum_{x \in \mathbb{R}} b f(x) = b.$$

(iv) Prvo uočimo da slučajna varijabla $g(X) + h(X)$ ima očekivanje. Naime,

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in \mathbb{R}} |g(x) + h(x)| f(x) &\leq \sum_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| + |h(x)| f(x) \\
&\leq \sum_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| f(x) + \sum_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| f(x) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X) + h(X)) &= \mathbb{E}((g + h)(X)) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} (g + h)(x) f(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} (g(x) + h(x)) f(x) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x) f(x) + \sum_{x \in \mathbb{R}} h(x) f(x) \\
&= \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).
\end{aligned}$$

□

Napomena 4.32 Uočite sličnost tvrdnji Propozicije 4.28 i Teorema 4.31 (iv): obje kažu da je očekivanje zbroja slučajnih varijabli jednako zbroju očekivanja. Kod Propozicije 4.28 slučajne varijable X i Y su definirane na prebrojivom vjerojatnosnom prostoru, dok je kod Teorema 4.31 (iv) vjerojatnosni prostor proizvoljan, ali su slučajne varijable koje zbrajamo funkcije jedne te iste diskretne slučajne varijable X. Opći rezultat koji dokazujemo u sljedećem poglavlju, vidi Korolar 5.11, kaže da za diskretne slučajne varijable X i Y definirane na proizvoljnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koje imaju matematičko očekivanje, diskretna slučajna varijabla $X + Y : \Omega \to \mathbb{R}$ također ima matematičko očekivanje i vrijedi $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$. Taj rezultat često pojednostavljuje računanje očekivanja te ćemo korisititi u nastavku teksta.

Primjer 4.33 U pododjeljku 4.1.2 pokazali smo da se binomna slučajna varijabla $X \sim B(n,p)$ može prikazati kao zbroj od n Bernoullijevih slučajnih varijabli X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, s parametrom p: $X = X_1 + \cdots + X_n$. Iz prethodne primjedbe, indukcijom slijedi da je $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_n$. Za sve $i = 1, 2, \ldots, n$, vrijedi $\mathbb{E}X_i = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$. Zato je $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} p = np$ što smo korištenjem definicije dobili i u Primjeru 4.24.

Teorem 4.34 *Neka je X diskretna slučajna varijabla. Ako postoji $\mathbb{E}(X)$, onda vrijedi*
$$\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(|X|)^2 \leq \mathbb{E}(X^2). \tag{4.4}$$

Dokaz: Prvo uočimo da je $-|X| \leq X \leq |X|$. Sada po Teoremu 4.31 (iii) i (iv) imamo
$$-\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(|X|),$$
tj. $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$, što je ekvivalentno s prvom nejednakosti u (4.4).

U slučaju da je $\mathbb{E}(X^2) = \infty$ druga nejednakost trivijalno slijedi. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i uočimo da je $(|X| - \mathbb{E}(|X|))^2 \geq 0$. Sada imamo
$$\begin{aligned} 0 &\overset{\text{Tm 4.31 (iii)}}{\leq} \mathbb{E}\big[(|X| - \mathbb{E}(|X|))^2\big] \\ &= \mathbb{E}(|X|^2 - 2|X|\mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|X|)^2) \\ &\overset{\text{Tm 4.31 (iv)}}{=} \mathbb{E}(|X|^2) - \mathbb{E}(2|X|\mathbb{E}(|X|)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \\ &\overset{\text{Tm 4.31 (i) i (iii)}}{=} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(|X|)^2. \end{aligned}$$

□

Napomena 4.35 Iz Teorema 4.29 i 4.31 možemo zaključiti sljedeće: ako je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, onda X ima matematičko očekivanje. Zaista, neka su $g, h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dane s $g(x) = |x| 1_{\{y \in \mathbb{R} : |y| < 1\}}(x)$ i $h(x) = |x| 1_{\{y \in \mathbb{R} : |y| \geq 1\}}(x)$. Očito vrijedi da je $|X| = g(X) + h(X)$, $0 \leq g(X) \leq 1$ i $0 \leq h(X) \leq X^2$. Sada primjenom Teorema 4.29 zaključujemo da $g(X)$ i $h(X)$ imaju matematičko očekivanje te primjenom Teorema 4.31 (iv) imamo $\mathbb{E}(|X|) \leq 1 + \mathbb{E}(X^2)$. Alternativno, isti zaključak možemo izvesti korištenjem Cauchy-Schwartzove nejednakosti za sume/redove:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f(x) = \sum_{x \in \mathbb{R}} (|x| f(x)^{1/2}) f(x)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{x \in \mathbb{R}} |x|^2 f(x) \right)^{1/2} \left(\sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) \right)^{1/2} = (\mathbb{E}(X^2))^{1/2} .
\end{aligned}
$$

Na kraju odjeljka izvest ćemo korisnu formulu za računanje matematičkog očekivanja diskretne slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$.

Teorem 4.36 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Tada vrijedi*

$$
\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n).
$$

Dokaz: Imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} f(k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k f(k).
\end{aligned}
$$

□

Na kraju ovog odjeljka pokazujemo prirodan primjer proširene slučajne varijable, tj. slučajne varijable koja kao vrijednost može poprimiti ∞.

Primjer 4.37 Igramo niz nezavisnih igara. Vjerojatnost dobitka u n-toj igri je 2^{-n}, $n \in \mathbb{N}$. Označimo sa T broj igre u kojoj prvi put dobijemo. Malo formalnije, neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{P}(X_n = 1) = 2^{-n}$ i stavimo

$$T = \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}.$$

Budući da apriori nije jasno da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $X_n = 1$ (odnosno nije jasno da ćemo dobiti u bilo kojoj igri), dopuštamo mogućnost da je $T = \infty$. Formalno, definiramo da je $\min \emptyset = +\infty$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X_j = 0) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2^{-j})$$

te je po neprekidnosti vjerojatnosti na padajući niz događaja

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T > n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (1 - 2^{-j}) \,.$$

Može se pokazati da ako je $(x_n)_{n\geq 1}$ niz brojeva iz intervala $(0,1)$, onda vrijedi $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} x_j > 0$ ako i samo ako $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - x_j) < \infty$. Budući da je $\sum_{j=1}^{\infty} (1 - (1 - 2^{-j})) < \infty$, zaključujemo da je

$$\mathbb{P}(T = +\infty) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (1 - 2^{-j}) > 0 \,.$$

Dakle, T je slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ te sve vrijednosti imaju strogo pozitivnu vjerojatnost. Takve slučajne varijable zovemo *proširenim slučajnim varijablama*. Kako možemo definirati matematičko očekivanje takve proširene slučajne varijable? Po analogiji s Definicijom 4.20 stavimo

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(T = n) + \infty \cdot \mathbb{P}(T = \infty) \,.$$

Formalno je $\infty \cdot a = \infty$ za svaki $a > 0$. Stoga zaključujemo da je $\mathbb{E}(T) = \infty$. Da bismo izbjegli ovakvo formalno zaključivanje, definiramo da je matematičko očekivanje proširene slučajne varijable jednako ∞.

Uočite da iz gornjeg razmatranja slijedi da ako je X nenegativna (eventualno proširena) diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(X) < \infty$, onda je $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$.

4.4 Varijanca

Neka su

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Slučajnu varijablu X, odnosno Y, možemo shvatiti kao dobitak/gubitak u igri koja može rezultirati dobitkom 1, odnosno 1000, ili gubitkom 1, odnosno 1000. Uočimo da je $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$. Postavlja se pitanje koju igru se više "isplati" igrati.

Promatramo odstupanje diskretne slučajne varijable od svog očekivanja $X - \mathbb{E}(X)$. Zbog $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0$ kvadriramo odstupanje te tražimo očekivano kvadratno odstupanje.

Definicija 4.38 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f i očekivanjem $\mathbb{E}(X)$.* Varijanca *od X definira se kao*

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big].$$

Standardna devijacija *od X je definirana kao $\sigma(X) := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. Za $k \in \mathbb{N}$,* k-ti moment *i* k-ti centralni moment *od X su, redom, definirani kao $\mu_k := \mathbb{E}(X^k)$ i $\sigma_k := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k)$, ako $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x|^k f(x) < \infty$.*

Uočimo $0 \leq \mathrm{Var}(X) \leq \infty$ i $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ pa $\mathrm{Var}(X) < \infty$ povlači $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Obratno, ako je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, onda po Teoremu 4.34 vrijedi $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ i specijalno $\mathrm{Var}(X) < \infty$.

Propozicija 4.39 *Ako je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, onda je za sve $a, b \in \mathbb{R}$,* $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

Dokaz: Već smo komentirali da $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ povlači da X ima matematičko očekivanje. Sada imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(aX + b) &= \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) = \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2) \\ &= a^2 \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = a^2 \mathrm{Var}(X). \end{aligned}$$

□

Sljedeći rezultat analogon je Teorema 4.36 te se dokazuje na sličan način.

Teorem 4.40 *Neka je X diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ i neka je $k \geq 2$. Tada vrijedi*

$$\mathbb{E}(X \cdots (X-k+1)) = k \sum_{n=k}^{\infty} (n-1) \cdots (n-k+1) \mathbb{P}(X \geq n).$$

4.4.1 Varijanca nekih slučajnih varijabli

U ovom odjeljku računamo varijancu najpoznatijih diskretnih slučajnih varijabli.

Primjer 4.41 Neka je $X \sim B(n,p)$ binomna slučajna varijabla. Pomoću Teorema 4.29 prvo računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{j!(n-2-j)!} p^j q^{n-2-j} = n(n-1)p^2 .
\end{aligned}$$

Sada je $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)+X] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] = n(n-1)p^2 + np$ pa je

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = npq\,.$$

Primjer 4.42 Neka je $X \sim P(\lambda)$. Slično kao u prethodnom primjeru prvo računamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 .
\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[(X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\,.$$

Primjer 4.43 Neka je $T \sim G(p)$. Tada znamo da je $\mathbb{P}(T = n) = q^{n-1}p$, $n \in \mathbb{N}$. U Primjeru 4.26 smo pokazali da je $\mathbb{E}(T) = 1/p$. Alternativno, vrijedi $\mathbb{P}(T > n) = q^n$. Po Teoremu 4.36 imamo

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Izračunajmao sada $\mathrm{Var}(T) = \mathbb{E}(T^2) - \mathbb{E}(T)^2$. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathbb{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^{n-1} p = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) q^{n-1} p + \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1} p \\
&= pq \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) q^{n-2} + \mathbb{E}(T) = pq \frac{\partial^2}{\partial q^2} \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-2} + \mathbb{E}(T) \\
&= pq \frac{2}{(1-q)^3} + \mathbb{E}(T) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Konačno,

$$\mathrm{Var}(T) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Ako je $\widetilde{T} \sim G_0(p)$, onda otprije znamo da je $\widetilde{T} = T - 1$ pa je po Propoziciji 4.39, $\mathrm{Var}(\widetilde{T}) = \mathrm{Var}(T) = (1-p)/p^2$.

4.4.2 Razni primjeri

Primjer 4.44 Kutija sadrži n listića numeriranih brojevima $1, \ldots, n$. Na slučajan način izabran je listić. Neka slučajna varijabla X označava broj na tom listiću. Odredimo $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$.

Rješenje: Prirodno je za pretpostaviti da je

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ 1/n & \ldots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Slučajna varijabla s gornjom distribucijom zove se *uniformna* ili *jednolika slučajna varijabla.* Oznaka $X \sim U(1, \ldots, n)$. Imamo,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

i

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dakle,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

Primjer 4.45 Kutija sadrži n kuglica numeriranih brojevima $1, \dots, n$. Iz kutije se izvuče kuglica, zabilježi njen broj te vrati u kutiju. Postupak se ponavlja sve dok ne budu zabilježeni svi brojevi. Neka je R slučajna varijabla koja označava broj izvlačenja potrebnih da se zabilježe svi brojevi. Odredimo $\mathbb{E}(R)$.

Rješenje: Za $r \in \mathbb{N}$ stavimo

$$A_n^r := \{\text{u prvih } r \text{ izvlačenja nisu izvučeni svi brojevi}\} = \{R > r\}$$

i

$$C_k^r := \{\text{kuglica s brojem } k \text{ nije izvučena u prvih } r \text{ izvlačenja}\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Tada je $A_n^r = \cup_{k=1}^n C_k^r$. Računamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_i^r) &= \frac{(n-1)^r}{n^r} \\
\mathbb{P}(C_i^r \cap C_j^r) &= \frac{(n-2)^r}{n^r}, \qquad i \neq j \\
\mathbb{P}(C_{i_1}^r \cap \dots C_{i_k}^r) &= \frac{(n-k)^r}{n^r}, \qquad i_1, \dots, i_k \text{ različiti.}
\end{aligned}$$

Dakle, za $r \geq 1$,

$$\mathbb{P}(A_n^r) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n C_k^r) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r}.$$

Za $r = 0$ također vrijedi

$$\mathbb{P}(R > 0) = 1 = 1 - (1-1)^n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r},$$

uz konvenciju da je $0^0 = 1$. Sada imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}(R > r) &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)^r}{n^r} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \sum_{r=0}^{\infty} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^r = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{1}{1-(1-j/n)} \\
&= n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{1}{j}.
\end{aligned}$$

Stavimo

$$u_n := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{1}{j}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Računamo,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \binom{n+1}{j} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \frac{1}{j} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\binom{n+1}{j} - \binom{n}{j} \right).
\end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{j} \left(\binom{n+1}{j} - \binom{n}{j} \right) &= \frac{(n+1)\cdots(n-j+2) - n\cdots(n-j+1)}{j \cdot j!} \\
&= \frac{n\cdots(n-j+2)j}{j \cdot j!} \\
&= \frac{(n+1)\cdots(n-j+2)}{(n+1)\cdot j!} \\
&= \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{j},
\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{n+1} \binom{n+1}{j} \\
&= \frac{1}{n+1} \left((-1)^{n+2} + \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{j+1} \binom{n+1}{j} - ((-1)^1 + (-1)^{n+2}) \right) \\
&= \frac{1}{n+1} \left((1-1)^{n+1} + 1 \right) \\
&= \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Dakle, $u_{n+1} = u_n + 1/(n+1)$ $n \in \mathbb{N}$. Zbog $u_1 = 1$ zaključujemo

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

Konačno,

$$\mathbb{E}(R) = n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j},$$

što se za velike n ponaša kao $n \log n$.

Primjer 4.46 U kutiji se nalazi N kuglica, od kojih m bijelih i $N-m$ crnih. Iz kutije se na slučajan način izabere (uzorak od) n kuglica. Označimo sa X broj izvučenih bijelih kuglica. Tada je

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{m}{i}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}}, \qquad \max\{0, n+m-N\} \le i \le \min\{m, n\}.$$

Ova slučajna varijaba se zove *hipergeometrijska slučajna varijabla*. Izračunajmo očekivanje od X. Numerirajmo bijele kuglice brojevima $1, \dots, m$ te stavimo $A_j :=$ {izvučena je samo bijela kuglica s brojem j} i $X_j := 1_{A_j}$, $j = 1, \dots, m$. Tada je $X = \sum_{j=1}^m X_j$. Dakle, kako je

$$\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{P}(A_j) = \frac{\binom{1}{1}\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N},$$

imamo $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^m X_j) = \sum_{j=1}^m \mathbb{E}(X_j) = m\frac{n}{N}$.

Primjer 4.47 Iz kutije koja sadrži 20 kuglica numeriranih brojevima $1, \ldots, 20$ izvučene su 3 kuglice. Označimo s X najveći broj među njima. Odredite $\mathbb{E}(X)$ i $\mathbb{P}(X \geq 17)$.

Rješenje: Izračunajmo $\mathbb{P}(X = i)$. Prvo uočimo da je $X \geq 3$ pa je $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 0$. Nadalje,

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}}, \qquad i = 3, \ldots, 20.$$

Slijedi da je

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=3}^{20} i\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=3}^{20} i\frac{\binom{i-1}{2}}{\binom{20}{3}} = \frac{17955}{1140} = 15.75$$

U nastavku primjera uvodimo dvije nove mjere lokacije slučajne varijable, medijan i mod. Kao prvo, vrijedi da je

$$\mathbb{P}(X \geq 17) = \sum_{i=17}^{20} \mathbb{P}(X = i) \approx 0.508 \geq \frac{1}{2}.$$

Također, uočimo

$$\mathbb{P}(X \leq 17) = 1 - \mathbb{P}(X \geq 18) = 1 - \sum_{i=18}^{20} \mathbb{P}(X = i) \approx 0.507 \geq \frac{1}{2}.$$

Broj $m \in \mathbb{R}$ je *medijan* slučajne varijable X ako vrijedi

$$\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{i} \qquad \mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

Dakle, u našem primjeru $m = 17$. Također, uočimo da medijan ne mora biti jedinstven. Primjerice, za $X \sim B(1, 1/2)$ svaki broj u intervalu $[0, 1]$ je medijan od X.

Usporedimo sada $\mathbb{P}(X = i + 1)$ i $\mathbb{P}(X = i)$ za $i = 3, \ldots, 19$. Imamo

$$\frac{\mathbb{P}(X = i + 1)}{\mathbb{P}(X = i)} = \frac{\binom{i}{2}}{\binom{i-1}{2}} = \frac{i}{i-2} > 1.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(X = 20) > \cdots > \mathbb{P}(X = 3).$$

Broj $\mu \in \mathbb{R}$ je *mod* diskretne slučajne varijable X s funkcijom gustoće f, ako f postiže svoj maksimum u μ. Ekvivalentno, mod je najvjerojatnija vrijednost od X. U našem primjeru $\mu = 20$. Očito, niti mod ne mora biti jedinstven.

Primjer 4.48 Kladite se na igru u kojoj je vjerojatnost dobitka $0 < p \leq 1/2$. Ako dobijete u igri, dobitak je jednak iznosu uloga (ako izgubite, izgubili ste ulog). Prva oklada je 1 kn; ako dobijete, prestajete igrati. Ako izgubite, kladite se za 2 kn, itd. Vaša n-ta oklada iznosi 2^{n-1} kn. Čim dobijete u nekoj igri odmah odustajete od daljnje igre.

(a) Pokažite da je Vaš ukupni dobitak 1 kn s vjerojatnošću 1.

(b) Nađite očekivani iznos oklade kojom dobivate.

Nadalje, pretpostavite da je najveća dopuštena oklada jednaka 2^L kn, $L \in \mathbb{N}$.

(c) Koliki je očekivani dobitak kada prestajete s igrom.

Rješenje: Stavimo $T := \{\text{broj igara do prvog dobitka}\}$.

(a) Očito $\mathbb{P}(T = n) = q^{n-1}p$, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $T \sim G(p)$. Nadalje, oklada u T-toj igri je 2^{T-1} kn te budući da u toj igri pobjeđujete, dobivate 2^{T-1} kn. S druge strane, gubitak do tada je $\sum_{k=1}^{T-1} 2^{k-1} = 2^{T-1} - 1$. Budući da je $\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$, s vjerojatnošću 1 dobivate 1 kn.

(b) Dobitna oklada iznosi 2^{T-1} kn. Sada imamo

$$\mathbb{E}(2^{T-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}q^{n-1}p = p\sum_{n=1}^{\infty}(2q)^{n-1} = \infty,$$

zbog $2q \geq 1$.

(c) Dobivate 1 kn ako je $1 \leq T \leq L+1$ $(2^{T-1} = 2^L)$, a gubite $\sum_{k=0}^{L} 2^k$ ako je $T > L+1$. Slijedi da je očekivani dobitak γ jednak

$$\begin{aligned}
\gamma &= \mathbb{P}(T \leq L+1) - \left(\sum_{k=0}^{L} 2^k\right)\mathbb{P}(T > L+1) \\
&= 1 - q^{L+1} - (2^{L+1} - 1)q^{L+1} \\
&= 1 - (2q)^{L+1}.
\end{aligned}$$

Dakle, za $p = q = 1/2$, $\gamma = 0$, te za $p < 1/2$, $\gamma < 0$. Također, za veći L imamo veći očekivani dobitak.

4.5 Uvjetne distribucije

Neka je X diskretna slučajna varijabla na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ s vrijednostima u skupu $D = \{a_1, a_2, \dots\}$. Distribucija slučajne varijable X ovisi o vjerojatnosti $\mathbb{P}$ koju imamo na $(\Omega, \mathcal{F})$: $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$. Zamjenimo li vjerojatnost $\mathbb{P}$ nekom drugom vjerojatnošću na $(\Omega, \mathcal{F})$, promijenit će se distribucija slučajne varijable X. Tipična situacija je sljedeća: neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$. Promatramo *uvjetnu vjerojatnost* $\mathbb{P}_B$. Distribucija slučajne varijable X uz vjerojatnost $\mathbb{P}_B$ naziva se uvjetna distribucija od X uz dano B. Preciznije, imamo sljedeću definiciju.

Definicija 4.49 *Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s vrijednostima u skupu $D = \{a_1, a_2, \dots\}$ te neka je B događaj iz $\mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$.* Uvjetna funkcija distribucije od X uz dano B *je funkcija $F(\cdot \mid B) : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana sa*

$$F(x \mid B) := \mathbb{P}(X \leq x \mid B) = \mathbb{P}_B(X \leq x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Uvjetna diskretna funkcija gustoće od X uz dano B *je funkcija $f(\cdot \mid B) : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana sa*

$$f(x \mid B) := \mathbb{P}(X = x \mid B) = \mathbb{P}_B(X = x)\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Definicija 4.50 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Nadalje, neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(B) > 0$ i neka je $f(\cdot|B)$ uvjetna funkcija gustoće od X. Ako vrijedi $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x|B) < \infty$, definiramo* uvjetno očekivanje *od X uz dano B kao $\mathbb{E}(X|B) := \sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x|B)$.*

Uočimo, ako postoji $\mathbb{E}(X)$, tj. $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x) < \infty$, onda postoji i $\mathbb{E}(X|B)$, tj. $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x|B) < \infty$. Zaista,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x|B) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} |x| \frac{\mathbb{P}(\{X = x\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&\leq \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{x\in\mathbb{R}} |x| \mathbb{P}(X = x) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x).
\end{aligned}$$

Teorem 4.51 *Neka je $\{H_i : i \in I\}$ potpun sustav događaja te neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, koja ima očekivanje. Tada je*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{E}(X|H_i).$$

Dokaz: Kako $\mathbb{E}(X|H_i)$, $i \in I$, postoje, imamo

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{E}(X|H_i) &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i) \sum_{x\in\mathbb{R}} xf(x|H_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i) \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x|H_i) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(X = x|H_i) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xf(x) = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

□

Kao posljedicu Teorema 4.51 zaključujemo da ze $B \in \mathcal{F}$ takav da $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ imamo

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(B)\mathbb{E}(X|B) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{E}(X|B^c).$$

Primjer 4.52 Bacamo novčić. Vjerojatnost glave je p. Promatramo nizove glava, odnosno nizove pisama. Prvi niz može biti niz pisama ili niz glava. Označimo s R_n duljinu n-tog niza. Pokažimo da za sve $k, j \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathbb{E}(R_{2k+1}) \geq \mathbb{E}(R_{2j})$ uz jednakost ako i samo ako $p = q = 1/2$.

Rješenje: Neka je X broj glava prije pojave prvog pisma. Tada, $\mathbb{P}(X = k) = p^k q$, $k \geq 0$. Izračunajmo $\mathbb{E}(X)$. Primjenom Teorema 4.36 lagao dobijemo $\mathbb{E}(X) = p/q$. Ovdje dajemo alternativni dokaz, temeljen na uvjetnim distribucijama. Stavimo $G :=$ {prvo bacanje je glava}. Uz dano G, neka je X' broj glava prije pojave prvog pisma. Dakle, $\mathbb{P}(X' = k) = p^k q = \mathbb{P}(X = k)$, $k \geq 0$. Nadalje, uočimo da je uvjetno na G, $X = 1 + X'$ te uvjeto na G^c je $X = 0$. Sada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(G)\mathbb{E}(X|G) + \mathbb{P}(G^c)\mathbb{E}(X|G^c) = p(1 + \mathbb{E}(X')) = p + p\mathbb{E}(X).$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = p/q$. Slično, ako je Y broj pisama prije pojave prve glave, onda imamo $\mathbb{E}(Y) = q/p$.

Nadalje, uočimo da je R_{2k+1} niz glava ako i samo ako je prvo bacanje glava. Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_{2k+1}) &= \mathbb{P}(G)\mathbb{E}(R_{2k+1}|G) + \mathbb{P}(G^c)\mathbb{E}(R_{2k+1}|G^c) \\
&= p\mathbb{E}(R_{2k+1}|G) + q\mathbb{E}(R_{2k+1}|G^c) \\
&= p\mathbb{E}(1 + X') + q\mathbb{E}(1 + Y') \\
&= p\left(1 + \frac{p}{q}\right) + q\left(1 + \frac{q}{p}\right) \\
&= \frac{p}{q} + \frac{q}{p},
\end{aligned}$$

gdje je uz dano G^c, Y' broj pisama prije pojave prve glave. Slično, R_{2j} je niz glava ako i samo ako je prvo bacanje pismo. Slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_{2j}) &= \mathbb{P}(G)\mathbb{E}(R_{2j}|G) + \mathbb{P}(G^c)\mathbb{E}(R_{2j}|G^c) = p\mathbb{E}(R_{2j}|G) + q\mathbb{E}(R_{2j}|G^c) \\
&= p\mathbb{E}(1 + Y') + q\mathbb{E}(1 + X') = p\left(1 + \frac{q}{p}\right) + q\left(1 + \frac{p}{q}\right) = 2.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(R_{2k+1}) \geq \mathbb{E}(R_{2j})$ i lako se vidi da se jednakost postiže ako i samo ako $p = q = 1/2$.

4.6 Nizovi distribucija

Definicija 4.53 *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F, definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo s C_F skup svih točaka u $\mathbb{R}$ u kojima je F neprekidna. Niz funkcija distribucije $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira funkciji distribucije F ako vrijedi*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x), \qquad x \in C_F.$$

Niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji *slučajnoj varijabli X ako niz pripadnih funkcija distribucije konvergira funkciji distribucije od X.*

Propozicija 4.54 *Neka je X slučajna varijabla i $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije F i $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, funkcijama gustoće f i $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ te vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Tada,*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x), \qquad x \in C_F,$$

ako

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dokaz: Uočimo prvo da je $f(x) = 0$ za $x \in \{0, 1, \dots\}^c \subseteq C_X$. Kako je $F(x) = \sum_{y \le x} f(y)$ i $F_n(x) = \sum_{y \le x} f_n(y)$, imamo

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\le x} f_n(y) = \sum_{y \le x} \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \sum_{y\le x} f(y) = F(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili činjenicu da baratamo konačnom sumom. □

Primjer 4.55 Gledamo slučajnu permutaciju skupa $\{1, \dots, n\}$. Neka je X_n broj fiksnih točaka permutacije. Odredimo distribuciju od X_n. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = r) =& \binom{n}{r} \mathbb{P}(\{\text{odabranih } r \text{ točaka su fiksne točke}\}) \\
& \mathbb{P}(\{\text{preostalih } n-r \text{ točaka nema fiksne točke}\}) \\
=& \binom{n}{r} \frac{1}{n \cdots (n-r+1)} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \frac{1}{k!} \\
=& \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \frac{1}{k!}, \qquad r = 0, \dots, n,
\end{aligned}$$

gdje smo u drugom koraku iskoristili Primjer 3.14. Sada imamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = r) = \frac{1}{r!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = \frac{1}{r!} e^{-1},$$

iz čega zaključujemo da niz $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji Poissonovoj slučajnoj varijabli s parametrom 1.

Teorem 4.56 *(Zakon rijetkih događaja) Neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim B(n, p_n)$, $0 < p_n < 1$, takva da $\lambda := \lim_{n\to\infty} np_n \in (0, \infty)$. Tada niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji Poissonovoj slučajnoj varijabli s parametrom λ.*

Dokaz: Po Propoziciji 4.54 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Računamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{(np_n)^k}{k!}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{(np_n)^k}{k!}\left(1-\frac{np_n}{n}\right)^n (1-p_n)^{-k}.
\end{aligned}$$

Sada puštajući $n \to \infty$, tvrdnja slijedi. □

4.7 Nejednakosti

Teorem 4.57 *Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f i neka je $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ funkcija. Tada za svaki $a > 0$ vrijedi*

$$\mathbb{P}(h(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{a}. \tag{4.5}$$

Dokaz: Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)] &= \sum_{x\in\mathbb{R}} h(x)f(x) \geq \sum_{x:\, h(x)\geq a} h(x)f(x) \geq \sum_{x:\, h(x)\geq a} af(x) \\
&= a\sum_{x:\, h(x)\geq a} f(x) = a\mathbb{P}(h(X)\geq a)\,,
\end{aligned}$$

otkud odmah slijedi tvrdnja.

Alternativni dokaz: Prvo uočimo da je

$$\mathbb{P}(h(X) \geq a) = \mathbb{E}(1_{\{h(X)\geq a\}}) \qquad \text{i} \qquad h(X) \geq a1_{\{h(X)\geq a\}}.$$

Sada, zbog monotonosti očekivanja, imamo

$$\mathbb{E}(h(X)) \geq \mathbb{E}(a1_{\{h(X)\geq a\}}) = a\mathbb{E}(1_{\{h(X)\geq a\}}) = a\mathbb{P}(h(X) \geq a).$$

$\square$

Ako u Teoremu 4.57 stavimo $h(x) = |x|$, dobijemo tzv. *Markovljevu nejednakost*:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}, \qquad a > 0.$$

Ako uzmemo $h(x) = (x - \mathbb{E}(X))^2$, onda, za $a > 0$, dobijemo tzv. *Čebiševljevu nejedakost*:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) = \mathbb{P}((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.$$

Uočite da alternativni dokaz nejednakosti (4.5) ne koristi pretpostavku da je X diskretna slučajna varijabla. Kasnije u tekstu (vidi Teorem 6.22 (iii)), istu nejednakost dokazat ćemo i za apsolutno neprekidne slučajne varijable. Nejednakost vrijedi i općenito za sve slučajne varijable, što ćemo iskoristiti u sljedećem korolaru. Za diskretne slučajne varijable rezultat kaže da ako je X nenegativna, diskretna i $\mathbb{E}X = 0$, onda je X identički jednaka nuli. Zaista, ako je $X \in D = \{a_1, a_2, \dots\}$ i $0 = \mathbb{E}X = \sum_{a_j \in D} a_j p_j$, onda je $a_j p_j = 0$ za sve j, otkud $p_j = 0$ ako je $a_j > 0$ pa zato $X = 0$.

Korolar 4.58 *(i) Ako je $X \geq 0$ slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}X = 0$, onda je $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.*

(ii) Ako je X slučajna varijabla takva da je $\mathrm{Var}(X) = 0$, onda postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{P}(X = c) = 1$.

Dokaz: (i) Po Markovljevoj nejednakosti za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X \geq 1/n) \leq n\mathbb{E}X = 0\,.$$

Zato je

$$\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}\big(\cup_{n=1}^{\infty} \{X \geq 1/n\}\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq 1/n) = 0\,,$$

odnosno $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.
(ii) Stavimo $Y = (X - \mathbb{E}X)^2$. Po pretpostavci je $\mathbb{E}Y = \mathrm{Var}(X) = 0$ pa iz dijela (i) slijedi da je $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$. To znači da je uz $c = \mathbb{E}X$, $\mathbb{P}(X = c) = 1$.
$\square$

Primjer 4.59 Broj tjednih proizvoda u tvornici je slučajna varijabla X s očekivanjem 50. Ocijenimo $\mathbb{P}(X > 75)$. Imamo $\mathbb{P}(X > 75) \leq \mathbb{E}(X)/75 = 2/3$.

Ako je pripadna varijanca 25, ocijenimo $\mathbb{P}(40 \leq X \leq 60)$. Imamo $\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \mathrm{Var}(X)/100 = 1/4$, odnosno $\mathbb{P}(40 \leq X \leq 60) \geq 3/4$.

Poglavlje 5

Slučajni vektori: nezavisnost i zavisnost

5.1 Slučajni vektori

Primjer 5.1 Tri kuglice su na slučajan način izvučene iz kutije koja sadrži tri crvene, četiri bijele i pet plavih kuglica. Neka X označava broj crvenih izvučenih kuglica, a Y broj bijelih. Odredimo $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = i\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = j\})$, $i, j = 0, \ldots, 3$.

Rješenje: Imamo

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220},$$
$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220},$$
$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220},$$
$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{220},$$
$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220},$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1,Y=1) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220},\\
\mathbb{P}(X=1,Y=2) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220},\\
\mathbb{P}(X=2,Y=0) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220},\\
\mathbb{P}(X=2,Y=1) &= \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{220},\\
\mathbb{P}(X=3,Y=0) &= \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}.
\end{aligned}$$

Gornje vrijednosti možemo zapisati i tablično:

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$\mathbb{P}(X=i)$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{40}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{4}{220}$	$\frac{84}{220}$
1	$\frac{30}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{15}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	0	$\frac{27}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	0	0	0	$\frac{1}{220}$
$\mathbb{P}(Y=j)$	$\frac{56}{220}$	$\frac{112}{220}$	$\frac{48}{220}$	$\frac{4}{220}$	1

Uočimo da $\mathbb{P}(X=i,Y=j) \neq \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ za $i,j=0,\ldots,3$.

Definicija 5.2 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Uređeni par (X,Y) zove se* dvodimenzionalni (diskretni) slučajni vektor.

Uočimo da je $(X,Y):\Omega\to\mathbb{R}^2$ preslikavanje s prostora elementarnih događaja Ω u $\mathbb{R}^2$ te da postoji prebrojiv skup $D=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\}\subset\mathbb{R}^2$ takav da $\mathbb{P}((X,Y)\in D)=1$. Naime, ako su D_X i D_Y (prebrojivi) skupovi vrijednosti od, redom, X i Y, onda je $D\subseteq D_X\times D_Y$. Nadalje, za sve $i,j\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\{(X,Y)=(x_i,y_j)\} &= \{\omega\in\Omega:(X(\omega),Y(\omega))=(x_i,y_j)\}\\
&= \{\omega\in\Omega:X(\omega)=x_i\}\cap\{\omega\in\Omega:Y(\omega)=y_j\}\\
&= \{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\}\in\mathcal{F}.
\end{aligned}$$

Ako su $X_1, \ldots, X_n$ diskretne slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, na analogan način definiramo *n-dimenzionalni (diskretni) slučajni vektor* $(X_1, \ldots, X_n)$.

Kod slučajnih vektora najvažnije pitanje je veza (međuzavisnost) slučajnih varijabli.

Definicija 5.3 *Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.* Diskretna funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) *(ili zajednička funkcija gustoće diskretnih slučajnih varijabli X i Y) je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ definirana s*

$$f(x, y) = \mathbb{P}(X = x, Y = y).$$

Neka je $D = \{(x_i, y_j), i, j \geq 1\}$ skup vrijednosti od (X, Y) te neka su D_X i D_Y skupovi vrijednosti od, redom, X i Y. Tada vrijedi

$$f(x, y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j), & (x, y) = (x_i, y_j) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nadalje, uočimo
(i) vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) &= \sum_{(x_i,y_j)\in D} f(x_i, y_j) = \sum_{x_i\in D_X} \sum_{y_j\in D_Y} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \sum_{x_i\in D_X} \mathbb{P}(X = x_i) = 1; \end{aligned}$$

(ii) za $C \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X, Y) \in C) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in C\}) \\ &= \sum_{(x,y)\in C} f(x, y) = \sum_{(x_i,y_j)\in C} f(x_i, y_j); \end{aligned}$$

(iii) ako su f_X i f_Y funkcije gustoće od, redom, X i Y, onda vrijedi

$$f_X(x) = \sum_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) \qquad \text{i} \qquad f_Y(y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x, y).$$

Zaista,

$$\sum_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) = f_X(x),$$

gdje smo u drugom koraku koristili čijenicu da je $\{Y = y\}_{y \in \mathbb{R}}$ potpun sustav događaja. Analogno slijedi i druga relacija. U ovom kontekstu se funkcije f_X i f_Y zovu *marginalne funkcije gustoće* od (X, Y).

Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada je dobro definirano preslikavanje $Z := g \circ (X, Y) = g(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}$. Štoviše, Z je diskretna slučajna varijabla. Pripadna funkcija gustoće f_Z je dana s

$$f_Z(z) = \mathbb{P}(g(X, Y) = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ g(x,y) = z}} f(x, y).$$

5.2 Nezavisnost

Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s funkcijom gutoće f i marginalnim funkcijama gustoće f_X i f_Y. Uočimo da općenito marginalne funkcije gustoće ne određuju jedinstveno fukciju gustoće (distribuciju).

Primjer 5.4 Neka su dvodimenzionalni diskretni slučajni vektori (X, Y) i (U, V) dani, redom, sljedećim tablicama:

$X \backslash Y$	0	1	f_X
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
f_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

i

$U \backslash V$	0	1	f_U
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
f_V	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Slučajni vektori (X, Y) i (U, V) očito imaju iste marginalne funkcije gustoće, $f_X = f_U$ i $f_Y = f_V$, dok je $f_{(X,Y)} \neq f_{(U,V)}$.

Specijalan slučaj u kojem marginalne funkcije distribucije na jedinstven način određuju funkciju distribucije je nezavisnost.

Definicija 5.5 *Neka su X i Y diskretne slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s funkcijama gustoće f_X i f_Y. Nadalje, neka je f funkcija gustoće od (X, Y). Kažemo da su X i Y* nezavisne *ako vrijedi $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$. Ekvivalentno, X i Y su nezavisne ako je $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$.*

Analogno kao u gornjoj definiciji, kažemo da su diskretne slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *nezavisne* ako $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n)$ za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Također, beskonačna (prebrojiva ili neprebrojiva) familija diskretnih slučajnih varijabli $(X_i)_{i \in I}$ definiranih na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je *nezavisna* ako za svaki konačan $F \subseteq I$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in F} \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i \in F} \mathbb{P}(X_i = x_i), \qquad x_i \in \mathbb{R}, \ i \in F.$$

Teorem 5.6 *Neka su X i Y diskretne slučajne varijable definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

(a) Slučajne varijable X i Y su nezavisne ako i samo ako $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$ za sve $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Ako su X i Y nezavisne, onda su $g(X)$ i $h(Y)$ također nezavisne za proizvoljne funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne diskretne slučajne varijable te neka su $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ i $h : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ dvije funkcije. Tada su slučajne varijable $g(X_1, \ldots, X_m)$ i $h(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ također nezavisne.

Dokaz:

(a) Dovoljnost je očita (uzmemo $A = \{x\}$ i $B = \{y\}$). Pokažimo nužnost. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) &= \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \\
&= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).
\end{aligned}$$

(b) Neka su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neke funkcije. Za fiksne $u, v \in \mathbb{R}$ stavimo $A := g^{-1}(\{u\}) = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = u\}$ i $B := h^{-1}(\{v\}) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = v\}$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(g(X) = u, h(Y) = v) &= \mathbb{P}(X \in A, Y \in B) \\
&= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B) \\
&= \mathbb{P}(g(X) = u)\mathbb{P}(g(Y) = v).
\end{aligned}$$

(c) Očito, $(X_1,\dots,X_m)$ i $(X_{m+1},\dots,X_n)$ su diskretni slučajni vektori te su $g(X_1,\dots,X_m)$ i $h(X_{m+1},\dots,X_n)$ diskretne slučajne varijable. Za $x,y\in\mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(g(X_1,\dots,X_m)=x,\ h(X_{m+1},\dots,X_n)=y)\\
&=\mathbb{P}((X_1,\dots,X_m)\in g^{-1}(\{x\}),\ (X_{m+1},\dots,X_n)\in h^{-1}(\{y\})\\
&=\mathbb{P}((X_1,\dots,X_n)\in g^{-1}(\{x\})\times h^{-1}(\{y\})),
\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
g^{-1}(\{x\})\times h^{-1}(\{y\})=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:(x_1,\dots,x_m)\in g^{-1}(\{x\}),\\
(x_{m+1},\dots,x_n)\in h^{-1}(\{y\})\}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(g(X_1,\dots,X_m)=x,\ h(X_{m+1},\dots,X_n)=y)\\
&=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in g^{-1}(\{x\})\times h^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}((X_1,\dots,X_n)=(z_1,\dots,z_n))\\
&=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in g^{-1}(\{x\})\times h^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}(X_1=z_1,\dots,X_n=z_n)\\
&=\sum_{(z_1,\dots,z_n)\in g^{-1}(\{x\})\times h^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}(X_1=z_1)\cdots\mathbb{P}(X_n=z_n)\\
&=\sum_{(z_1,\dots,z_m)\in g^{-1}(\{x\})}\ \sum_{(z_{m+1},\dots,z_n)\in h^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}(X_1=z_1)\cdots\mathbb{P}(X_n=z_n)\\
&=\sum_{(z_1,\dots,z_m)\in g^{-1}(\{x\})}\mathbb{P}(X_1=z_1\dots X_m=z_m)\\
&\qquad\sum_{(z_{m+1},\dots,z_n)\in h^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}(X_{m+1}=z_{m+1}\dots X_n=z_n)\\
&=\sum_{(z_1,\dots,z_m)\in g^{-1}(\{x\})}\mathbb{P}((X_1\dots X_m)=(z_1,\dots,z_m))\\
&\qquad\sum_{(z_{m+1},\dots,z_n)\in h^{-1}(\{y\})}\mathbb{P}((X_{m+1}\dots X_n)=(z_{m+1},\dots,z_n))\\
&=\mathbb{P}((X_1,\dots,X_m)\in g^{-1}(\{x\}))\mathbb{P}((X_{m+1},\dots,X_n)\in h^{-1}(\{y\}))\\
&=\mathbb{P}(g(X_1,\dots,X_m)=x)\mathbb{P}(h(X_{m+1},\dots,X_n)=y).
\end{aligned}$$

$\square$

Primjer 5.7 Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable čije su distribucije dane s

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-a & a \end{pmatrix} \qquad \text{i} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-b & b \end{pmatrix},$$

gdje su $a, b \in [0, 1]$. Nadalje, definirajmo $Z := \cos((X + Y)\pi/2)$. Pokažimo da postoje jedinstvene vrijednosti $a, b \in (0, 1)$ takve da su X i Z te Y i Z nezavisne. Jesu li u tom slučaju X, Y i Z nezavisne?

Rješenje: Prvo uočimo da Z poprima samo vrijednosti 1 ili -1. Sada imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = 1) &= \mathbb{P}(X + Y = 0) = a(1-b) + (1-a)b \\ \mathbb{P}(Z = -1) &= \mathbb{P}(X + Y = 2) + \mathbb{P}(X + Y = -2) = ab + (1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1, Z = 1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = -1) = a(1-b) \\ \mathbb{P}(X = 1, Z = -1) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = ab \\ \mathbb{P}(X = -1, Z = 1) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = (1-a)b \\ \mathbb{P}(X = -1, Z = -1) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = (1-a)(1-b). \end{aligned}$$

Dakle, mora vrijediti

$$\begin{aligned} a(1-b) &= a(a(1-b) + (1-a)b) \\ ab &= a(ab + (1-a)(1-b)) \\ (1-a)b &= (1-a)(a(1-b) + (1-a)b) \\ (1-a)(1-b) &= (1-a)(ab + (1-a)(1-b)). \end{aligned}$$

Rješavajući gornje jednadžbe zaključujemo da su X i Z nezavisne ako i samo ako $b = 1/2$. Analogno, Y i Z su nezavisne ako i samo ako $a = 1/2$.

Konačno, u slučaju $a = b = 1/2$, X, Y i Z nisu nezavisne. Naime, $0 = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1) = 1/8$.

Primjer 5.8 Neka su $X \sim G(\lambda)$ i $Y \sim G(\mu)$ nezavisne, gdje su $0 < \lambda, \mu < 1$. Odredimo funkciju gustoće od $Z := \min\{X, Y\}$.

Rješenje: Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\mathbb{P}(Z > n) = \mathbb{P}(X > n, Y > n) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(Y > n) = (1-\lambda)^n(1-\mu)^n.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \mathbb{P}(Z > n-1) - \mathbb{P}(Z > n) = ((1-\lambda)(1-\mu))^{n-1}(1-(1-\lambda)(1-\mu)),$$

iz čega zaključujemo da je $Z \sim G(1-(1-\lambda)(1-\mu))$.

Teorem 5.9 *Neka su $f_1, \ldots, f_n$ diskretne funkcije gustoće. Tada postoji vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i nezavisne slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$, definirane na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, čije su funkcije gustoće upravo, redom, $f_1, \ldots, f_n$.*

Dokaz: Za $i = 1, \ldots, n$ stavimo $D_i := \{x \in \mathbb{R} : f_i(x) > 0\}$. Po pretpostavci $D_1, \ldots, D_n$ su najviše prebrojivi skupovi. Sada, definirajmo $\Omega := D_1 \times \cdots \times D_n$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = f_1(\omega_1)\cdots f_n(\omega_n)$ te $X_i(\omega) = \omega_i$ za $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ i $i = 1, \ldots, n$. Dakle, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je dobro definiran vjerojatnosni prostor i $X_1, \ldots, X_n$ su dobro definirane diskretne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Provjerimo da je funkcija gustoće od X_i upravo f_i, $i = 1, \ldots, n$. Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_i = x) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = x\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega_i = x\}) \\
&= \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega_i = x}} f_1(\omega_1)\cdots f_{i-1}(\omega_{i-1}) f_i(x) f_{i+1}(\omega_{i+1})\cdots f_n(\omega_n) \\
&= f_i(x).
\end{aligned}$$

Konačno, provjerimo nezavisnost od $X_1, \ldots, X_n$. Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = x_1, \ldots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = x_i,\ i = 1, \ldots, n\}) \\
&= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega_i = x_i,\ i = 1, \ldots, n\}) \\
&= f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = x_n).
\end{aligned}$$

□

5.3 Očekivanje

Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija te $Z := g(X, Y)$. Tada je Z diskretna slučajna varijabla pa je po definiciji matematičkog očekivanja

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z f_Z(z) = \sum_{z \in \mathbb{R}} z\mathbb{P}(g(X, Y) = z),$$

ako $\sum_{z \in \mathbb{R}} |z|\mathbb{P}(g(X, Y) = z) < \infty$. Međutim, gornju formulu nije uvijek lako primijeniti, budući da zahtijeva računanje funkcije gustoće slučajne varijable Z. Umjesto nje pogodnija je sljedeća formula.

Teorem 5.10 *Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s funkcijom gustoće f te neka je $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Ako suma*

$$\sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |g(x, y)| f(x, y) < \infty\,,$$

onda je

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y).$$

Dokaz: Neka je $g(X, Y)(\Omega) = \{g_1, g_2, \dots\}$ skup vrijednosti od $g(X, Y)$. Stavimo $A_j := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = g_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, i $Z := g(X, Y)$. Sada imamo

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A_j) = \mathbb{P}(g(X, Y) = g_j) = f_Z(g_j), \qquad j \in \mathbb{N},$$

gdje je f_Z funkcija gustoće od Z. Također, uočimo da po pretpostavci

$$\sum_{g_j \in g(X,Y)(\Omega)} |g_j| f_Z(g_j) < \infty.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X, Y)) &= \sum_{g_j \in g(X,Y)(\Omega)} g_j f_Z(g_j) = \sum_{g_j \in g(X,Y)(\Omega)} g_j \mathbb{P}(g(X, Y) = g_j) \\
&= \sum_{g_j \in g(X,Y)(\Omega)} g_j \mathbb{P}((X, Y) \in A_j) = \sum_{g_j \in g(X,Y)(\Omega)} g_j \sum_{(x,y) \in A_j} f(x, y) \\
&= \sum_{g_j \in g(X,Y)(\Omega)} \sum_{(x,y) \in A_j} g(x, y) f(x, y) = \sum_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y).
\end{aligned}$$

□

Korolar 5.11 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable te neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Ako slučajne varijable X i Y imaju matematičko očekivanje, onda i slučajna varijabla $aX + bY$ ima matematičko očekivanje i vrijedi*

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Dokaz: Neka je f funkcija gustoće od (X, Y) te neka su f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Tada po Teoremu 5.10, za $g(x, y) = ax + by$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + bY) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (ax + by) f(x, y) \\
&= a \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x f(x, y) + b \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} y f(x, y) \\
&= a \sum_{x\in\mathbb{R}} x \sum_{y\in\mathbb{R}} f(x, y) + b \sum_{y\in\mathbb{R}} y \sum_{x\in\mathbb{R}} f(x, y) \\
&= a \sum_{x\in\mathbb{R}} x f_X(x) + b \sum_{y\in\mathbb{R}} y f_Y(y) \\
&= a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

□

Primjer 5.12 Riješimo sada Primjer 4.45 alternativnim načinom. Prisjetimo se, kutija sadrži n kuglica numeriranih brojevima $1, \ldots, n$. Iz kutije se izvuče kuglica, zabilježi njen broj te vrati u kutiju. Postupak se ponavlja sve dok ne budu zabilježeni svi brojevi. Neka je R slučajna varijabla koja označava broj izvlačenja potrebnih da se zabilježe svi brojevi. Treba odrediti $\mathbb{E}(R)$.

Rješenje: Stavimo

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \{\text{broj izvlačenja potrebnih za prvi broj}\} \\
T_2 &:= \{\text{daljnji broj izvlačenja potrebnih za novi različiti broj}\}
\end{aligned}$$

te, induktivno,

$$T_k := \{\text{daljnji broj izvlačenja potrebnih za } k\text{-ti različiti broj}\}.$$

Prvo uočimo da je $T_1 = 1$. Nadalje, za $r \geq 1$ imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 = r) &= \left(\frac{1}{n}\right)^{r-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\\ \mathbb{P}(T_k = r) &= \left(\frac{k-1}{n}\right)^{r-1}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Dakle, $T_k \sim G(1-(k-1)/n)$ za $k = 1, \ldots, n$, iz čega zaključujemo $\mathbb{E}(T_k) = n/(n-k+1)$. Konačno, budući je $R = \sum_{k=1}^n T_k$, imamo

$$\mathbb{E}(R) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T_k) = n\sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k+1} = n\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Tipična primjena Korolara 5.11 je sljedeća: neka je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ familija događaja. Stavimo $X_i := 1_{A_i}$, $i = 1, \ldots, n$, te

$$X := \text{broj } A_i\text{-ova koji su se dogodili.}$$

Očito, $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Dakle, $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$. Specijalno, ako je $X \sim B(n,p)$ i $A_i := \{\text{uspjeh u } i\text{-tom pokusu}\}$, $i = 1, \ldots, n$. Tada, $\mathbb{P}(A_i) = p$ za sve $i = 1, \ldots, n$, te $\mathbb{E}(X) = np$.

Definicija 5.13 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable.* Zajednički momenti *od X i Y definiraju se s*

$$\mu_{ij} := \mathbb{E}(X^i Y^j), \qquad i, j \in \mathbb{N},$$

kadgod postoje.

Uočimo, po Teoremu 5.10,

$$\mu_{ij} = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} x^i y^j f(x,y),$$

gdje je f funkcija gustoće od (X, Y).

Lema 5.14 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Tada vrijedi:*

(a) $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$.

(b) (Cauchy-Schwartzova nejednakost) $|\mathbb{E}(XY)| \le \mathbb{E}(X^2)^{1/2}\mathbb{E}(Y^2)^{1/2}$.

(c) U gornjoj relaciji jednakost se postiže ako i samo ako su X i Y kolinearne, tj. postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da $\mathbb{P}(Y = \lambda X) = 1$ ili $\mathbb{P}(X = \lambda Y) = 1$.

Dokaz: (a) Neka je f funkcija gustoće od (X, Y) te neka su f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|XY|) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |x||y|f(x,y) \\
&= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (|x|f(x,y)^{\frac{1}{2}})(|y|f(x,y)^{\frac{1}{2}}) \\
&\le \sqrt{\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |x|^2 f(x,y)}\sqrt{\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |y|^2 f(x,y)} \\
&= \sqrt{\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|^2 f_X(x)}\sqrt{\sum_{y\in\mathbb{R}} |y|^2 f_Y(y)} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)} < \infty,
\end{aligned}$$

gdje smo u prvom koraku koristili Teorem 5.10, a u trećem koraku Cauchy-Schwartzovu nejednakost (za konačne sume, odnosno redove).
(b) Budući da je po dijelu (a) $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$, možemo primjeniti Teorem 4.34 i zaključiti da je $|\mathbb{E}(XY)| \le \mathbb{E}(|XY|)$. Tražena nejednakost sada slijedi iz dokaza dijela (a).

U nastavku dajemo alternativni dokaz Cauchy-Schwartzove nejednakosti iz kojeg će odmah slijediti i dio (c). Uočimo prvo da za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi $(X+\lambda Y)^2 \le 2(X^2+\lambda^2 Y^2)$. Odavde, iz pretpostavke $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ i linearnosti očekivanja slijedi da je $\mathbb{E}(X + \lambda Y)^2 < \infty$. Budući da je po dijelu (a) $\mathbb{E}(XY)$ dobro definirano, imamo

$$0 \le \mathbb{E}(X + \lambda Y)^2 = \mathbb{E}(X)^2 + 2\lambda\mathbb{E}(XY) + \lambda^2\mathbb{E}(Y^2)\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Ako je $\mathbb{E}(Y^2) \ne 0$, gornja nejednakost kaže da je kvadratna funkcija po λ svuda nenegativna, pa joj je diskriminanta nepozitivna. Zaključujemo da je

$(2\mathbb{E}(XY))^2 \leq 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$ što dokazuje tvrdnju. Ako je $\mathbb{E}(Y^2) = 0$, tvrdnja je trivijalna (jer je tada $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$).
(c) Iz dokaza dijela (b) vidimo da u slučaju $\mathbb{E}(Y^2) \neq 0$ jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{E}(X + \lambda Y)^2 = 0$. Zadnja jednakost ekvivalentna je s $\mathbb{P}(X + \lambda Y = 0) = 1$, odnosno $\mathbb{P}(X = -\lambda Y) = 1$. U slučaju $\mathbb{E}(Y^2) = 0$ očito vrijedi $\mathbb{P}(Y = \lambda X) = 1$ za $\lambda = 0$. □

Definicija 5.15 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.* Kovarijanca *od X i Y definira se kao*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Uočimo da je kovarijanca dobro definirana (tj. postoji očekivanje na desnoj strani) zbog Leme 5.14.

Teorem 5.16 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ te neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

(i) $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathrm{Cov}(X, Y)$;

(ii) $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Dokaz:

(i) Imamo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) &= \mathbb{E}((aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)(cY + d - c\mathbb{E}(Y) - d)) \\ &= ac\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= ac\mathrm{Cov}(X, Y).\end{aligned}$$

(ii) Imamo,

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}(X + Y) \\ &= \mathbb{E}((X + Y - \mathbb{E}(X + Y))^2) \\ &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2 + 2(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) + (Y - \mathbb{E}(Y))^2) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).\end{aligned}$$

□

Teorem 5.17 *Neka su X i Y dvije* nezavisne *diskretne slučajne varijable takve da $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ i $\mathbb{E}(|Y|) < \infty$. Tada je $\mathbb{E}(|XY|) < \infty$ i $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Dokaz: Neka je f funkcija gustoće od (X, Y) te neka su f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|XY|) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |x||y|f(x,y) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |x||y|f_X(x)f_Y(y)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} |x|f_X(x) \sum_{y\in\mathbb{R}} |y|f_Y(y) = \mathbb{E}(|X|)\mathbb{E}(|Y|) < \infty.\end{aligned}$$

Zato postoji matematičko očekivanje produkta XY te analogno dobivamo,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} xyf(x,y) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} xyf_X(x)f_Y(y)\\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} xf_X(x) \sum_{y\in\mathbb{R}} yf_Y(y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$

□

Uočimo da iz prethodnog teorema slijedi da ako su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable s konačnim očekivanjima, onda ima smisla promatrati njihovu kovarijancu čak iako one nužno nemaju konačne druge momente. Štoviše, prethodni teorem implicira da je u toj situaciji $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Definicija 5.18 *Ako je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, onda kažemo da su X i Y* nekorelirane. *Ako je $\mathbb{E}(XY) = 0$, onda kažemo da su X i Y* ortogonalne.

Uočimo, X i Y su nekorelirane ako i samo ako su $X - \mathbb{E}(X)$ i $Y - \mathbb{E}(Y)$ ortogonalne.

Definicija 5.19 *Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s funkcijom gustoće f. Slučajna varijabla X je* simetrična *ako $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Ekvivalentno, X je simetrična ako $f(x) = f(-x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.*

U Teoremu 5.17 je pokazano da nezavisnost dviju slučajnih varijabli povlači njihovu nekoreliranost. Međutim, obrat ne vrijedi.

Primjer 5.20 Neka je X simetrična diskretna slučajna varijabla takva da $\mathbb{E}(|X|^3) < \infty$. Definirajmo $Y := X^2$. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x<0} x\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x>0} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x>0} (-x)\mathbb{P}(X = -x) + \sum_{x>0} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= -\sum_{x>0} x\mathbb{P}(X = x) + \sum_{x>0} x\mathbb{P}(X = x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$. Međutim, budući je X simetrična slučajna varijabla, analogno kao i gore zaključujemo $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0$. Dakle, X i Y su nekorelirane. S druge strane, ako ne postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{P}(X^2 = x_0^2) = 1$, onda imamo

$$0 = \mathbb{P}(X = x, Y \neq x^2) \neq \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y \neq x^2)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da $\mathbb{P}(X = x) > 0$. Dakle, X i Y nisu nezavisne.

Kovarijanca slučajnih varijabi X i Y je određena mjera njihove zavisnosti. Međutim, $\mathrm{Cov}(X, Y)$ ovisi o skali od X i Y. Primjerice, ako umjesto X i Y gledamo aX i Y, $a \in \mathbb{R}$, onda je $\mathrm{Cov}(aX, Y) = a\mathrm{Cov}(X, Y)$, dok je, intuitivno, zavisnost ostala ista. Shodno tome, uvodimo sljedeću definiciju mjere zavisnosti slučajnih varijabli koja ne ovisi o skali.

Definicija 5.21 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable takve da $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.* Korelacija *(ili* koeficijent korelacije*) od X i Y se definira kao*

$$\rho(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}.$$

Teorem 5.22 *Neka su X i Y diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ te neka je $\rho(X, Y)$ njihov koeficijent korelacije. Tada vrijedi:*

(i) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;

(ii) $|\rho(X,Y)| = 1$ *ako i samo ako postoje* $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $\mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$*;*

(iii) ako su X *i* Y *nezavisne, onda je* $\rho(X,Y) = 0$*.*

Dokaz: Stavimo $\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ i $\sigma_Y := \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$.

(i) Imamo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) &= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\sigma_Y^2} + 2\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= 2 + 2\rho(X,Y) = 2(1 + \rho(X,Y)). \end{aligned}$$

Dakle, $\rho(X,Y) \geq -1$. Analogno, iz

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$$

zaključujemo da je $\rho(X,Y) \leq 1$.

(ii) Očito, $\rho(X,Y) = 1$ ako i samo ako $\mathrm{Var}(X/\sigma_X - Y/\sigma_Y) = 0$, što je ekvivalentno s egzistencijom $c \in \mathbb{R}$ takvim da

$$\mathbb{P}\left(Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X - c\sigma_Y\right) = 1.$$

Analogno, $\rho(X,Y) = -1$ ako i samo ako postoji $c \in \mathbb{R}$ takav da

$$\mathbb{P}\left(Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} X + c\sigma_Y\right) = 1.$$

(iii) Tvrdnja slijedi izravno iz definicije korelacije.

□

Primjer 5.23 Neka je

$$X := \text{broj fiksnih točaka slučajnih permutacija skupa } \{1, \ldots, n\}.$$

Odredimo $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$

Rješenje: Za $j = 1, \dots, n$ stavimo $A_j := \{j \text{ je fiksna točka}\}$ i $X_j := 1_{A_j}$. Očito, $X = \sum_{j=1}^n X_j$. Nadalje, za $i, j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_j = 1) &= \mathbb{P}(A_j) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \\
\mathbb{P}(X_i X_j = 1) &= \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.
\end{aligned}$$

Dakle, slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ nisu u parovima nezavisne. Imamo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) = 1 \\
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(X_j) + \sum_{i \neq j} \mathbb{E}(X_i X_j) = 2.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1$.

5.4 Zbroj slučajnih varijabli

Teorem 5.24 *Neka su X i Y dvije diskretne slučajne varijable s funkcijama gustoće, redom, f_X i f_Y. Nadalje, neka je f funkcija gustoće od (X, Y). Definirajmo $Z := X + Y$. Tada je i Z diskretna slučajna varijabla čija je funkcija gustoće dana s*

$$f_Z(z) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x, z - x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} f(z - y, y).$$

Ako su X i Y nezavisne, onda je

$$f_Z(z) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z - x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} f_X(z - y) f_Y(y).$$

Dokaz: Očito je Z diskretna slučajna varijabla. Odredimo pripadnu funkciju gustoće. Imamo,

$$f_Z(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ x + y = z}} f(x, y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x, z - x).$$

U slučaju da su X i Y nezavisne, imamo $f(x, z-x) = f_X(x)f_Y(z-x)$. Analogno se dokazuju druge dvije relacije. $\square$

Primjer 5.25 (a) Neka su $X_1, X_2 \sim G_0(p)$ nezavisne slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ (vidi pododjeljak 4.1.3). Vrijedi $\mathbb{P}(X_1 = n) = (1-p)^n p$, $n = 0, 1, 2 \dots$. Odredimo funkciju gustoće od $Z := X_1 + X_2$. Za $n = 0, 1, \dots$ imamo,

$$f_Z(n) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X_1}(x) f_{X_2}(n-x) = \sum_{k=0}^{n} f_{X_1}(k) f_{X_2}(n-k) = (n+1)p^2(1-p)^n.$$

(b) Neka su $X_1, \dots, X_r \sim G_0(p)$ nezavisne. Odredimo funkciju gustoće od $Z := X_1 + \cdots + X_r$. Uočimo da je jedna od mogućih realizacija geometrijske slučajne varijable X_i broj neuspjeha do prvog uspjeha u nizu nezavisnih pokusa. Zato $X_1, X_2, \dots, X_r$ možemo interpretirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} X_1 &= \text{broj neuspjeha do prvog uspjeha} \\ X_2 &= \text{broj daljnjih neuspjeha do drugog uspjeha} \\ &\vdots \\ X_r &= \text{broj daljnjih neuspjeha do } r\text{-tog uspjeha.} \end{aligned}$$

Uz takvu interpretaciju,

$$Z = \text{broj neuspjeha potrebnih za } r \text{ uspjeha.}$$

Iz Primjera 4.11 znamo da je $Z \sim N(r, p)$ negativna biomna slučajna varijabla. To sugerira da je funkcija gustoće od Z jednaka

$$f_Z(n) = \binom{n+r-1}{n}(1-p)^n p^r, \qquad n \geq 0. \tag{5.1}$$

Dokažimo to sada formalno matematičkom indukcijom. Za $r = 1$, (5.1) je očito točno. Pretpostavimo da (5.1) vrijedi za $r \geq 1$ i izračunajmo funkciju gustoće slučajne varijable $X_1 + \cdots + X_r + X_{r+1} = Z + X_{r+1}$. Uočimo prvo da su po Propoziciji 5.6 (c), Z i X_{r+1} nezavisne slučajne varijable. Neka je $f_{Z+X_{r+1}}$ funkcija gustoće od $Z + X_{r+1}$. Tada, za $n \geq 0$ imamo

$$\begin{aligned}
f_{Z+X_{r+1}}(n) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} f_Z(x) f_{X_{r+1}}(n-x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} f_Z(k) f_{X_{r+1}}(n-k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r (1-p)^{n-k} p \\
&= (1-p)^n p^{r+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{k+r-1}{k} \\
&= \binom{n+r}{n} (1-p)^n p^{r+1}.
\end{aligned}$$

(c) Konačno, prisjetimo se Primjera 4.43 u kojem smo izračunali očekivanje i varijancu geometrijske slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Po tom primjeru je $\mathbb{E}(X_j + 1) = 1/p$ te $\mathrm{Var}(X_j + 1) = (1-p)/p^2$. Zato je $\mathbb{E}(X_j) = \mathbb{E}(X_j + 1) - 1 = 1/p - 1 = (1-p)/p$ i $\mathrm{Var}(X_j) = \mathrm{Var}(X_j + 1) = (1-p)/p^2$, $j = 1, \dots, r$. Upotrebom linearnosti očekivanja i Teorema 5.16 dobivamo

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{r(1-p)}{p} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Primjer 5.26 Neka su $X \sim B(n, p)$ i $Y \sim B(m, p)$ nezavisne. Pokažimo da je $X + Y \sim B(n + m, p)$. Neka je f_{X+Y} funkcija gustoće od $X + Y$ te neka su

f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Tada, za $l = 0, \dots, n+m$ imamo

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(l) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) f_Y(l-x) \\
&= \sum_{k=0}^{l} f_X(k) f_Y(l-k) \\
&= \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{l-k} p^{l-k} (1-p)^{m-l+k} \\
&= p^l (1-p)^{n+m-l} \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} \\
&= \binom{n+m}{l} p^l (1-p)^{n+m-l}.
\end{aligned}$$

Propozicija 5.27 Neka su $X_1, \dots, X_n \sim B(1,p)$ nezavisne. Tada je $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$.

Dokaz: Za $k = 0, \dots, n$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

što dokazuje tvrdnju. □

Primjenjujući Teorem 5.6 (c) i Propoziciju 5.27, Primjer 5.26 možemo riješiti alternativnim pristupom. Neka su $X_1, \dots, X_{n+m} \sim B(1,p)$. Tada je $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$, $X_{n+1} + \cdots + X_{n+m} \sim B(m,p)$ te su zbog Teorema 5.6 (c) to nezavisne slučajne varijable. Budući da je $X_1 + \cdots + X_{n+m} \sim B(n+m,p)$ to dokazuje tvrdnju.

Primjer 5.28 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne. Pokažimo da je $X + Y \sim P(\lambda + \mu)$. Neka je f_{X+Y} funkcija gustoće od $X + Y$ te neka su f_X

i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Tada, za $l = 0, 1, \dots$ imamo

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(l) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(l-x) = \sum_{k=0}^{l} f_X(k) f_Y(l-k) \\ &= \sum_{k=0}^{l} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu}\frac{\mu^{l-k}}{(l-k)!} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{l!}\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}\lambda^k\mu^{l-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)}\frac{(\lambda+\mu)^l}{l!}. \end{aligned}$$

5.5 Zavisnost i uvjetno očekivanje

Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s funkcijom gustoće f. Nadalje, neka su f_X i f_Y pripadne marginalne gustoće. Postavlja se pitanje utječe li, i kako, poznavanje slučajne varijable Y na distribuciju od X.

Definicija 5.29 Uvjetna (diskretna) funkcija gustoće *slučajne varijable X uz dano $Y = y$ definira se s*

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

za sve $y \in \mathbb{R}$ za koje je $f_Y(y) > 0$.

Uočimo, ako je $f_Y(y) > 0$, onda

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)} = \mathbb{P}(X = x | Y = y).$$

Primjer 5.30 Neka su $X, Y \sim G_0(p)$ nezavisne slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ te neka je $Z := X + Y$. Odredimo $f_{X|Z}(x|z)$.

Rješenje: Primjetimo da X i Y možemo interpretirati kao broj neuspjeha potrebnih za prvi uspjeh. Vrijedi: $X, Y \in \mathbb{Z}_+$ i $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Uz takvu intrepretaciju Z je broj neuspjeha potrebnih za dva uspjeha te je $Z \sim N(2, p)$ – negativna binomna. Iz Primjera 5.25 vidimo da je

$$f_Z(z) = (z+1)(1-p)^z p^2, \qquad z \in \mathbb{Z}_+.$$

Sada za $x \in \{0, 1, \ldots, z\}$ imamo

$$\begin{aligned} f_{X|Z}(x|z) &= \frac{\mathbb{P}(X = x, Z = z)}{\mathbb{P}(Z = z)} = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = z - x)}{\mathbb{P}(Z = z)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = z - x)}{\mathbb{P}(Z = z)} \\ &= \frac{(1-p)^x p (1-p)^{z-x} p}{(z+1)(1-p)^z p^2} = \frac{1}{z+1}. \end{aligned}$$

Dakle, uvjetna distribucija od X uz dano $Z = z$ je uniformna na skupu $\{0, \ldots, z\}$. Drugim riječima, ako nam je poznato da je broj neuspjeha potrebnih za dva uspjeha jednak $z \in \mathbb{Z}_+$, onda su sve vrijednosti $x \in \{0, 1, \ldots, z\}$ jednako vjerojatne kao broj neuspjeha do prvog uspjeha.

Uočimo, ako su X i Y nezavisne, onda je $f_{X|Y} = f_X$. Zaista,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x) f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x).$$

Teorem 5.31 *Funkcija $x \mapsto f_{X|Y}(x|y)$ je diskretna funkcija gustoće, tj.*

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) = 1.$$

Dokaz: Imamo

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{f_Y(y)} \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x,y) = 1.$$

□

Budući je $f_{X|Y}$ funkcija gustoće, može imati očekivanje, koje zovemo uvjetno očekivanje.

Definicija 5.32 Uvjetno očekivanje slučajne varijable X uz dano $Y = y$, *gdje je $f_Y(y) > 0$, definira se kao*

$$\mathbb{E}(X|Y = y) := \sum_{x \in \mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y),$$

ako $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f_{X|Y}(x|y) < \infty$.

Uočimo,

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)} = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(X=x|Y=y).$$

Neka je $D := Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots\}$. Definiramo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$g(y) := \begin{cases} \mathbb{E}(X|Y=y), & y \in D \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Tada je $g \circ Y = g(Y)$ diskretna slučajna varijabla. Tu slučajnu varijablu označavamo s $\mathbb{E}(X|Y)$ i zovemo *uvjetno očekivanje od X uz dano Y*.

Primjer 5.33 Odredimo $\mathbb{E}(X|Z=z)$ i $\mathbb{E}(X|Z)$ u Primjeru 5.30.

Rješenje: Za $n \in \mathbb{Z}_+$ imamo,

$$\mathbb{E}(X|Z=n) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x f_{X|Z}(x|n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

Dakle, $g(z) = z/2$, tj. $\mathbb{E}(X|Z) = Z/2$. Nadalje, $\mathbb{E}(Z/2) = \mathbb{E}(Z)/2$. Međutim, $Z \sim N(p,2)$ pa je $\mathbb{E}(Z) = 2(1-p)/p$. Dakle, $\mathbb{E}(Z/2) = (1-p)/p$. S druge strane $\mathbb{E}(X) = (1-p)/p$, iz čega zaključujemo $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X)$. Sada se postavlja pitanje je li to slučajnost ili pravilo.

Teorem 5.34 *Ukoliko oba očekivanja postoje, onda vrijedi*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X).$$

Dokaz: Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(g(Y)) &= \sum_{y\in\mathbb{R}} g(y) f_Y(y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X|Y=y) f_Y(y) \\
&= \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y) \\
&= \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x,y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \sum_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x f_X(x) = \mathbb{E}(X).
\end{aligned}$$

$\square$

Primjer 5.35 Rudar je izgubljen u rudniku s troja vrata. Prva vrata vode u tunel koji će izvesti rudara na sigurno nakon 3 sata hoda. Druga vrata vode u tunel koji će ga vratiti u rudnik nakon 5 sati hoda, a treća vode u tunel koji će ga vratiti u rudnik nakon 7 sati hoda. Rudar izabire vrata s jednakom vjerojatnošću. Odredimo očekivano vrijeme za koje će rudar doći na sigurno.

Rješenje: Stavimo

$$\begin{aligned} X &:= \text{vrijeme u satima za koje će rudar doći na sigurno} \\ Y &:= \text{početno odabrana vrata.} \end{aligned}$$

Imamo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) \\ &= \mathbb{E}(X|Y=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{E}(X|Y=2)\mathbb{P}(Y=2) + \mathbb{E}(X|Y=3)\mathbb{P}(Y=3) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{E}(X|Y=1) + \mathbb{E}(X|Y=2) + \mathbb{E}(X|Y=3)). \end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Y=1) &= 3 \\ \mathbb{E}(X|Y=2) &= 5 + \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X|Y=3) &= 7 + \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}(3 + 5 + \mathbb{E}(X) + 7 + \mathbb{E}(X)),$$

iz čega slijedi $\mathbb{E}(X) = 15$.

Poglavlje 6

Neprekidne slučajne varijable

U ovom poglavlju uvest ćemo pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable, pokazat kako se računaju vjerojatnosti vezane uz takve slučajne varijable, navesti glavne primjere apsolutno neprekidnih slučajnih varijabli i definirati pojam matematičkog očekivanja.

6.1 Funkcije distribucije i funkcije gustoće

Prisjetimo se prvo opće definicije slučajne varijable i pripadajuće funkcije distribucije iz Poglavlja 4.

Definicija 6.1 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor.* Slučajna varijabla *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *je svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *takva da vrijedi*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 6.2 Funkcija distribucije *slučajne varijable* X *je funkcija* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definirana formulom*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Prisjetimo se, $\mathbb{P}(X = x) = F(x) - F(x-)$, gdje je $F(x-) := \lim_{y \nearrow x} F(y)$. Ako je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $D = \{a_1, a_2, \dots\}$, onda je $F(a_j) - F(a_j-) = \mathbb{P}(X = a_j) > 0$, $j = 1, 2, \dots$, tj., funkcija distribucije nije neprekidna. Svi dosadašnji primjeri bili su takvi. S druge strane, ukoliko je F neprekidna u $x \in \mathbb{R}$, onda je $\mathbb{P}(X = x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sljedeći primjer ilustrira jednu takvu slučajnu varijablu.

Primjer 6.3 Odabiremo točku iz segmenta $[0,1]$ na način da su, intuitivno, sve točke "jednako vjerojatne". Za prostor elementarnih događaja prirodno je uzeti $\Omega = [0,1]$. Također je prirodno zahtijevati da su intervali događaji. Neka je $\mathcal{F}$ najmanja σ-algebra generirana familijom svih otvorenih i zatvorenih intervala sadržanih u $[0,1]$, vidi Zadatak 1.6. Ta σ-algebra zove se Borelova σ-algebra na $[0,1]$ i označava s $\mathcal{B}([0,1])$. Neka je $\mathbb{P} : \mathcal{B}([0,1]) \to [0,1]$ vjerojatnost takva da vrijedi $\mathbb{P}((a,b)) = b-a$ za sve otvorene intervale $(a,b) \subset \Omega$. Egzistencija takve vjerojatnosti je netrivijalna i izlazi iz okvira ovog kolegija. Neka je, nadalje, $X(\omega) := \omega$, tj.,

$$X := \text{udaljenost točke } \omega \text{ od } 0.$$

Tada imamo

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}([0,x]) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Specijalno, F je neprekidna pa imamo da je $\mathbb{P}(X = x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Slučajna varijabla X se zove *uniformna slučajna varijabla* na segmentu $[0,1]$ što označavamo sa $X \sim U(0,1)$.

Definicija 6.4 *Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je* apsolutno neprekidna *ako postoji $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcija f se zove funkcija gustoće *od X.*

Napomenimo da je integral na desnoj strani u gornjoj definiciji tzv. Lebesgueov integral čiji pojam izlazi iz okvira ovog kolegija te ga ovdje nećemo diskutirati. U slučaju nenegativne funkcije f koja ima najviše prebrojivo mnogo prekida, taj se integral podudara s klasičnim nepravim Riemannovim integralom. Općenito, ako je nenegativna funkcija f Riemann integrabilna (u pravom ili nepravom smislu), onda je ona i Lebesgue integrabilna. Dodatno, omeđena funkcija na segmentu je Riemann integrabilna ako i samo ako je skup njenih prekida skup Lebesgueove mjere nula, što je slučaj kad ima konačno ili prebrojivo mnogo prekida. Također, napomenimo ako je X

apsolutno neprekidna, onda je za "većinu točaka" $x \in \mathbb{R}$ funkcija F diferencijabilna i vrijedi $F'(x) = f(x)$ (preciznije, skup točaka za koje to eventualno ne vrijedi je skup Lebesgueove mjere nula). Ako je f neprekidna, onda $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Nadalje, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, imamo

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Specijalno, za svaki $b \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \mathbb{P}(b - \varepsilon < X \leq b) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{b-\varepsilon}^{b} f(t)dt = 0.$$

U slučaju da je f Riemann integrabilna i b točka neprekidnosti od f, gornja relacija jednostavno slijedi. U općenitoj situaciji ona je posljedica tzv. teorema o monotonoj konvergenciji. Napomenimo također da se gornja relacija može poopćiti, tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_{B} f(t)dt, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ (vidi Zadatak 1.6).

6.2 Neke apsolutno neprekidne slučajne varijable

U ovom odjeljku diskutiramo neke najpoznatije apsolutno neprekidne slučajne varijable.

Primjer 6.5 Neka je $X \sim U(0, 1)$. Tada je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla. Zaista, za

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1, \end{cases}$$

vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

što je funkcija distribucije F uniformne slučajne varijable $U(0, 1)$. Uočite još da je $F'(x) = f(x)$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ te da funkcija distribucije F nije diferencijabilna u točkama 0 i 1.

Neka je $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ (Lebesgue integrabilna) funkcija za koju vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Tada je f funkcija gustoće neke apsolutno neprekidne slučajne varijable. Zaista, stavimo $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{P}(B) := \int_B f(t)dt$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $X(\omega) := \omega$, $\omega \in \Omega$. Tada vrijedi,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \omega \leq x\}) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Primjer 6.6 Neka je X slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

gdje je $\lambda > 0$ parametar. Funkcija distribucije slučajne varijable X je tada

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Slučajna varijabla X se zove *eksponencijalna slučajna varijabla* s parametrom $\lambda > 0$. Oznaka je $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Eksponencijalna slučajna varijabla X ima svojstvo zaboravljanja: za sve $s, t > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > t) = \mathbb{P}(X > s). \tag{6.1}$$

Ukoliko slučajnu varijablu X interpretiramo kao vrijeme čekanja da se nešto dogodi, onda svojstvo zaboravljanja kaže da je vjerojatnost da je vrijeme čekanja barem $s + t$ uz uvjet da smo čekali barem vrijeme t, jednako bezuvjetnoj vjerojatnosti da je vrijeme čekanja barem s: slučajna varijabla X je "zaboravila" da je već prošlo t vremenskih trenutaka. Dokaz jednakosti (6.1) je jednostavan i koristi činjenicu da je za sve $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$. Slijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > s + t | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t,\, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s). \end{aligned}$$

Stavimo $\bar{F}(x) := 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Tada je (6.1) ekvivalentno s

$$\bar{F}(s+t) = \bar{F}(s)\bar{F}(t), \qquad s, t > 0.$$

Može se pokazati da ako zdesna neprekidna funkcija $\bar{F}$ zadovoljava gornju funkcionalnu jednakost, onda postoji $\lambda > 0$ tako da je $\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$. To znači da svojstvo zaboravljanja karakterizira eksponencijalnu slučajnu varijablu.

Primjer 6.7 Odredimo konstantu $c > 0$ takvu da funkcija

$$f(x) = \frac{c}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

bude funkcija gustoće neke slučajne varijable. Mora vrijediti

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$$

Imamo.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+t^2}dt = c\arctan(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = c\pi.$$

Dakle, $c = 1/\pi$. Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće f se zove *Cauchyjeva slučajna varijabla.*

Primjer 6.8 Neka je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pokažimo da je ϕ funkcija gustoće neke slučajne varijable. Definirajmo

$$I := \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}ds\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dsdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}rdr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-t}dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, $I = \sqrt{\pi/2}$. Konačno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \frac{2I}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće ϕ zove se *standardna normalna slučajna varijabla*. Oznaka je $X \sim N(0,1)$. Pripadnu funkciju distribucije označavamo s Φ.

Nadalje, neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ te neka je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Budući da vrijedi (zamjena varijabli $t = (x-\mu)/\sigma$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1,$$

f je funkcija gustoće neke slučajne varijable. Pripadna slučajna varijabla X zove se *normalna slučajna varijabla s parametrima μ i σ^2*. Oznaka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Primjer 6.9 Za $\alpha > 0$ definiramo

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Funkcija Γ se zove *gama funkcija*. Odredimo $\Gamma(n)$ za $n \in \mathbb{N}$. Očito $\Gamma(1) = 1$. Za $n \geq 2$, koristeći parcijalnu integraciju, dobivamo

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt \\ &= -t^{n-1}e^{-t}\Big|_0^{\infty} + (n-1)\int_0^{\infty} t^{n-2} e^{-t} dt \\ &= (n-1)\Gamma(n-1). \end{aligned}$$

Dakle, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Nadalje, za $\lambda > 0$, uz zamjenu varijabli $t = \lambda s$, imamo

$$\int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} s^{\alpha-1} e^{-\lambda s} ds = \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-t}\frac{dt}{\lambda} = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha).$$

Definiramo funkciju

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Tada je

(i) $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$;

(ii) koristeći zamjenu varijabli $t = \lambda x$ i definiciju gama funkcije,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt = 1.$$

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće f zove se *gama distribucija s parametrima α i λ*. Oznaka je $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

Uočimo, za $\alpha = 1$ dobivamo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \end{cases}$$

tj. pripadna slučajna varijabla je eksponencijalna s parametrom λ. Nadalje, za $\lambda = 1/2$ i $\alpha = n/2$, $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(n/2)}\lambda^{n/2}x^{n/2-1}e^{-x/2}, & x > 0. \end{cases}$$

Slučajna varijabla $X \sim \Gamma(n/2, 1/2)$ zove se *hi-kvadrat distribucija s n stupnjeva slobode*. Oznaka je $X \sim \chi^2(n)$.

6.3 Funkcije slučajnih varijabli

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X, definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija. Tada je (uz neke dodatne uvjete na g, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida) $Y := g \circ X = g(X)$ slučajna varijabla. Funkcija distribucije F_Y od Y je dana s

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y) = \int_{\{x:\, g(x) \leq y\}} f_X(x)dx.$$

Ako je F_Y diferencijabilna na $\mathbb{R}$, onda možemo naći pripadnu funkciju gustoće f_Y. Primjerice, pretpostavimo da je g strogo rastuća i diferencijabilna. Neka je $m = \inf_{x\in X(\Omega)} g(x) \geq -\infty$ i $M = \sup_{x\in X(\Omega)} g(x) \leq \infty$. Tada vrijedi

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y)\,, \qquad y \in \mathbb{R}\,.$$

Dakle,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m \\ 1, & y \geq M\,. \end{cases}$$

Nadalje, za $m < y < M$ imamo

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f_X(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t)dt.$$

Dakle, Y je apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M\,. \end{cases}$$

U slučaju da je g strogo padajuća, uz iste oznake kao i gore, imamo

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))|(g^{-1})'(y)|, & m < y < M\,. \end{cases}$$

Primjer 6.10 Neka je $X \sim U(0,1)$ i neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Definirajmo $g(x) := (b-a)x + a$. Tada je $Y := g(X)$ slučajna varijabla s fukcijom gustoće

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < y < b \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

Slučajnu varijablu Y zovemo *uniformna slučajna varijabla na segmetu* $[a, b]$. Oznaka $Y \sim U(a, b)$.

Primjer 6.11 Neka je $X \sim U(0,1)$ i neka je $\lambda > 0$. Definirajmo $g(x) := -(1/\lambda)\log x$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla i vrijedi $Y \in (0,\infty)$. Odredimo pripadnu funkciju gustoće f_Y. Imamo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq y) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda}\log X \leq x\right) = \mathbb{P}(\log X \geq -\lambda x) \\ &= \mathbb{P}(X \geq e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}.\end{aligned}$$

Dakle, $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Primjer 6.12 Neka je $X \sim U(-1,1)$ i neka je $g(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Odredimo funkciju gustoće f_Y od $Y := g(X)$.

Rješenje: Imamo dva slučaja.

(i) U slučaju da je n neparan imamo $Y \in [-1,1]$ te g je strogo rastuća i diferencijabilna. Dakle,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2n} y^{\frac{1}{n}-1}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(ii) U slučaju kada je n paran imamo $Y \in [0,1]$ i g nije monotona. Međutim, za $0 < y < 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^n \le y) = \mathbb{P}\left(-y^{\frac{1}{n}} \le X \le y^{\frac{1}{n}}\right) \\ &= \int_{-y^{1/n}}^{y^{1/n}} \frac{1}{2} dx = y^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

Primjer 6.13 Neka je $X \sim N(0,1)$ i neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$. Definirajmo $g(x) := \sigma x + \mu$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla i pripadna funkcija gustoće je

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dakle, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Primjer 6.14 Neka je X slučajna varijabla sa strogo rastućom funkcijom distribucije F. Definirajmo $Y := F(X)$. Tada je $Y \sim U(0,1)$. Zaista, kako Y poprima vrijednosti u $(0,1)$, za $0 < x < 1$ imamo

$$\mathbb{P}(Y \le x) = \mathbb{P}(F(X) \le x) = \mathbb{P}(X \le F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x,$$

što dokazuje tvrdnju.

Nadalje, uočimo da ako je $U \sim U(0,1)$, onda $Z := F^{-1}(U)$ ima funkciju distribucije F. Imamo

$$\mathbb{P}(Z \le x) = \mathbb{P}(F^{-1}(U) \le x) = \mathbb{P}(U \le F(x)) = F(x).$$

6.4 Matematičko očekivanje

Definicija 6.15 *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$, onda postoji* matematičko očekivanje *od X koje definiramo sa*

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Primjer 6.16 (i) Neka je $X \sim U(a,b)$. Tada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}.$$

(ii) Neka je $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Tada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

(iii) Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

(iv) Neka je $\alpha > 1$ te neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x^{-\alpha}, & x \geq 1 \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

Slučajnu varijablu X zovemo *Paretova slučajna varijabla s parametrom* α. Sada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{1}^{\infty} (\alpha-1) x^{1-\alpha} dx = \begin{cases} \infty, & 1 < \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha-1}{\alpha-2}, & \textit{inače}. \end{cases}$$

(v) Neka je X Cauchyeva slučajna varijabla. Uočimo da očekivanje od X ne postoji. Zaista,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x} = \infty.$$

Teorem 6.17 *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f_X i neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka funkcija (koja zadovoljava određena svojstva, npr. g ima najviše prebrojivo mnogo prekida). Definirajmo $Y := g \circ X = g(X)$. Ako $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$, onda Y ima matematičko očekivanje i vrijedi*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx.$$

Dokaz: Dokaz provodimo za slučaj kada je g strogo rastuća i diferencijabilna funkcija. Tada je

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq m\,,\ y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M\,, \end{cases}$$

gdje je f_Y funkcija gustoće od Y, $m = \inf_{x \in X(\Omega)} g(x)$ i $M = \sup_{x \in X(\Omega)} g(x)$. Dakle,

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_m^M y f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx\,.$$

$\square$

Primjer 6.18 Neka je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pokažimo da je $\mathbb{E}(Y) = \mu$. Neka je $X \sim N(0,1)$. Budući da je $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, po Teoremu 6.17 zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma X + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu.$$

Teorem 6.19 Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Tada je

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x)dx.$$

Dokaz: Za $y > 0$, uz primjenu parcijalne integracije, imamo

$$\begin{aligned} \int_0^y x f(x)dx &= -x(1 - F(x))\Big|_0^y + \int_0^y (1 - F(x))dx \\ &= -y(1 - F(y)) + \int_0^y (1 - F(x))dx. \end{aligned}$$

Međutim,

$$0 \leq y(1 - F(y)) = y \int_y^\infty f(x)dx \leq \int_y^\infty xf(x)dx$$

te zadnji član u gornjoj relaciji teži u 0 kada y teži u ∞ jer $\int_0^\infty xf(x)dx = \mathbb{E}(X) < \infty$. Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y xf(x)dx = \lim_{y\to\infty} \int_0^y (1 - F(x))dx \\ &= \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx.\end{aligned}$$

$\square$

Primjer 6.20 Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ neka funkcija takva da $\mathbb{E}(g(X)) < \infty$. Tada imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X)) &= \int_0^\infty \mathbb{P}(g(X) > y)dy = \int_0^\infty \int_{\{x:\, g(x)>y\}} f(x)dxdy \\ &= \int_0^\infty f(x) \int_{\{y:\, 0<y<g(x)\}} dydx = \int_0^\infty f(x)g(x)dx.\end{aligned}$$

Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f te neka je $k \in \mathbb{N}$. Ukoliko je $\int_{-\infty}^\infty |x|^k f(x)dx < \infty$, *k-ti moment* od X definiramo kao

$$\mu_k := \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^\infty x^k f(x)dx.$$

Analogno, *k-ti centralni moment* od X je definiran kao

$$\sigma_k := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^k) = \int_{-\infty}^\infty (x - \mathbb{E}(X))^k f(x)dx.$$

Očito, $\sigma_1 = 0$ i $\sigma_2 = \mathrm{Var}(X)$. Nadalje,

$$\begin{aligned}\sigma_2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X-\mu_1)^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_1)^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu_1 x + \mu_1^2) f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx + \mu_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu_1^2 = \mu_2 - \mu_1^2.\end{aligned}$$

Primjer 6.21 Neka je $X \sim N(0, \sigma^2)$. Odredimo μ_k, $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Prvo uočimo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Zaista, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $M(k) > 0$ takav da $|x|^k \le e^{|x|}$ za sve $|x| \ge M(k)$. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= \int_{-M(k)}^{M(k)} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{\{x\colon |x| \ge M(k)\}} |x|^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &\le 2M(k)^{k+1} + e^{\frac{1}{2}} \int_{\{x:|x|\ge M(k)\}} e^{-\frac{(|x|-1)^2}{2}} dx < \infty.\end{aligned}$$

Nadalje, za k neparan očito imamo $\mu_k = 0$. Neka je $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$. Uz primjenu parcijalne integracije imamo

$$\begin{aligned}\mu_{2n} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{(2n-1)\sigma^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= (2n-1)\sigma^2 \mu_{2(n-1)}.\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mu_{2n} = \sigma^{2n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Specijalno, $\mu_2 = \sigma^2$.

Neka je sada $X \sim (\mu, \sigma^2)$. Uočimo da je onda $X - \mu \sim N(0, \sigma^2)$. Dakle, za $n \in \mathbb{N}$ imamo $\sigma_{2n-1} = 0$ i $\sigma_{2n} = \sigma^{2n}\frac{(2n)!}{2^n n!}$. Specijalno, $\sigma_2 = \sigma^2$.

Teorem 6.22 *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f.*

(i) Ako su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije takve da $g(X)$ i $h(X)$ imaju očekivanje, onda vrijedi

$$\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).$$

(ii) Ako je $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$ za $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, onda $a \leq \mathbb{E}(X) \leq b$.

(iii) Ako je $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, onda

$$\mathbb{P}(g(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{a}, \qquad a > 0.$$

Dokaz:

(i) Vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(g+h)(x)| f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)| f(x) dx$$

pa $(g+h)(X)$ ima očekivanje. Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X) + h(X)) = \mathbb{E}((g+h)(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (g+h)(x) f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) + h(x)) f(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx \\
&= \mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}(h(X)).
\end{aligned}$$

(ii) Imamo

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} a f(x) dx \leq \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} b f(x) dx = b.$$

(iii) Ako je $\mathbb{E}(g(X)) = \infty$, tvrdnja slijedi trivijalno. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(g(X)) < \infty$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \geq \int_{\{x:\, g(x) \geq a\}} g(x) f(x) dx \\
&\geq \int_{\{x:\, g(x) \geq a\}} a f(x) dx = a \mathbb{P}(g(X) \geq a),
\end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju.

□

Kao posljedicu Teorema 6.22 imamo Čebiševljevu nejednakost.

Korolar 6.23 *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Pretpostavimo da X ima očekivanje. Tada vrijedi*

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq a)\leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}, \qquad a>0.$$

Dokaz: Definirajmo $g(x) := (x-\mathbb{E}(X))^2$, $x\in\mathbb{R}$. Tada, po Teoremu 6.22, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geq a) = \mathbb{P}(g(X)\geq a^2) &\leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{a^2}\\ &= \frac{\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)}{a^2} = \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}.\end{aligned}$$

□

Poglavlje 7

Funkcije izvodnice

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti

Definicija 7.1 *Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Stavimo $p_n := \mathbb{P}(X = n)$, $n \geq 0$.* Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti) *od X definiramo kao*

$$G(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

za $s \in \mathbb{R}$ za koje $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n < \infty$.

Uočimo, $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$. Nadalje, za $-1 \leq s \leq 1$ imamo

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Dakle, za $-1 \leq s \leq 1$ red konvergira.

Lema 7.2 *Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ s nenegativnim koeficijentima apsolutno konvergira za $|s| < 1$, onda apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Ako je $f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ za $|s| < 1$, onda je $f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Nadalje,*

$$f'(1-) := \lim_{s \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n s^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \in [0, \infty].$$

Primjenjujući Lemu 7.2 na funkciju izvodnicu imamo $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ za $|s| < 1$, $G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$ te, indukcijom,

$$G^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} p_k s^{k-n}, \qquad |s| < 1\,.$$

Specijalno, $G^{(n)}(0) = n! p_n$, odnosno

$$p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n \geq 0.$$

Propozicija 7.3 *Ako su X i Y dvije diskretne slučajne varijable koja poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ takve da im se pripadne funkcije izvodnice, redom G_X i G_Y, podudaraju za sve $|s| < 1$, onda vrijedi $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ za sve $n \geq 0$.*

Dokaz: Imamo,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = \frac{G_Y^{(n)}(0)}{n!} = \mathbb{P}(Y = n).$$

$\square$

Primjer 7.4 (a) Neka je $\widetilde{X} \sim G_0(p)$. Tada je za $|s| < 1/(1-p)$,

$$\widetilde{G}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)s)^n = \frac{p}{1 - s(1-p)}.$$

Ako je $X \sim G(p)$. Tada je za $|s| < 1/(1-p)$,

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} s^n = ps \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)s)^n = \frac{ps}{1 - s(1-p)}.$$

(b) Neka je $X \sim P(\lambda)$. Tada je za sve $s \in \mathbb{R}$,

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} s^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

Pomoću funkcija izvodnica (vjerojatnosti) mogu se računati i momenti slučajnih varijabli. Za $0 \leq s < 1$ imamo

$$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1}.$$

Za $s = 1$, po Lemi 7.2, vrijedi

$$G'(1) := \lim_{s \nearrow 1} G'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \mathbb{E}(X).$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = G'(1) \in [0, \infty]$. Analogno zaključujemo

$$G^{(n)}(1) := \lim_{s \nearrow 1} G^{(n)}(s) = \mathbb{E}(X \cdots (X - n + 1)).$$

Specijalno,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= G''(1) + G'(1) - G'(1)^2.\end{aligned}$$

Primjer 7.5 Odredimo varijancu od $X \sim P(\lambda)$.

Rješenje: Imamo $G(s) = e^{\lambda(s-1)}$ za $s \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$\begin{aligned}G'(s) &= \lambda e^{\lambda(s-1)} \\ G''(s) &= \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \\ G'(1) &= \lambda \\ G''(1) &= \lambda^2,\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli

Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Neka su f_X i f_Y te G_X i G_Y, redom, pripadne funkcije gustoće i funkcije izvodnice. Definiramo $Z := X + Y$. Neka su f_Z i G_Z, redom, pripadna funkcija gustoće i funkcija izvodnica. Imamo

$$f_Z(n) = \sum_{j=0}^{n} f_X(j) f_Y(n-j), \qquad n \geq 0,$$

tj.

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = n - j), \qquad n \geq 0.$$

Želimo odrediti G_Z.

Teorem 7.6 *(a) Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ s funkcijama izvodnicama, redom G_X i G_Y. Definiramo $Z := X + Y$ i neka je G_Z pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi*

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s), \qquad |s| \leq 1.$$

(b) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$, s, redom, funkcijama izvodnicama $G_{X_1}, \ldots, G_{X_n}$. Definiramo $S := X_1 + \cdots + X_n$ i neka je G_S pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_S(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s), \qquad |s| \leq 1.$$

Dokaz:

(a) Kako je $G_Z(s) = \mathbb{E}(s^Z)$, imamo

$$G_Z(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y) = G_X(s)G_Y(s), \quad |s| \leq 1,$$

gdje treća jednakost slijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli X i Y.

(b) Dokaz slijedi analogno kao u (a), uz primjenu matematičke indukcije. $\square$

Primjer 7.7 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne. Odredimo distribuciju od $Z := X + Y$.

Rješenje: Imamo

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Kako je $e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$ funkcija izvodnica od $P(\lambda + \mu)$, pomoću Propozicije 7.3 zaključujemo $Z \sim P(\lambda + \mu)$.

Primjer 7.8 Neka je $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i uniformno distribuiranih na $\{1, \ldots, n\}$ slučajnih varijabli. Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ i

$$T_n := \min\{k : S_k > n\}.$$

Odredimo funkciju gustoće i funkciju izvodnicu od T_n te izračunajmo $\mathbb{E}(T_n)$.

Rješenje: Prvo uočimo da je

$$\{T_n \geq j + 1\} = \{T_n > j\} = \{S_j \leq n\}.$$

Nadalje, zbog nezavisnosti imamo

$$\mathbb{E}(s^{S_j}) = \mathbb{E}(s^{X_1+\cdots+X_j}) = \mathbb{E}(s^{X_1})^j, \qquad |s| < 1.$$

Dakle, kako je

$$G_{X_1}(s) = \mathbb{E}(s^{X_1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} s^k = \frac{s - s^{n+1}}{n(1 - s)}, \qquad |s| < 1,$$

imamo

$$G_{S_j}(s) = \mathbb{E}(s^{S_j}) = \left(\frac{s}{n}\right)^j \left(\frac{1 - s^n}{1 - s}\right)^j, \qquad |s| < 1.$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j \leq k) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(S_j = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{1 - s} \mathbb{P}(S_j = l) = \frac{1}{1 - s} \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \frac{G_{S_j}(s)}{1 - s} = \left(\frac{s}{n}\right)^j \frac{(1 - s^n)^j}{(1 - s)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{n^j} s^j \left(\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l s^{nl}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} s^l\right)^{j+1}, \qquad |s| < 1.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}(S_j \leq n)$ je jednaka koeficijentu uz s^n izraza na desnoj strani gornje relacije. Očito, doprinos srednjeg faktora mora biti $\binom{j}{0}(-1)^0 = 1$, a zadnjeg koeficijent uz s^{n-j}. Po Teoremu 3.9 taj koeficijent je jednak broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$k_1 + \cdots + k_{j+1} = n - j, \qquad k_1, \ldots, k_{j+1} \geq 0,$$

a taj broj je jednak

$$\binom{j+1+n-j-1}{j+1-1} = \binom{n}{j}.$$

Dakle,

$$\mathbb{P}(T_n \geq j+1) = \mathbb{P}(S_j \leq n) = \frac{\binom{n}{j}}{n^j}.$$

Sada imamo

$$\mathbb{P}(T_n = j) = \mathbb{P}(T_n \geq j) - \mathbb{P}(T_n \geq j+1) = \frac{\binom{n}{j-1}}{n^{j-1}} - \frac{\binom{n}{j}}{n^j}, \qquad n \geq j \geq 1.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(T_n > j) &= \sum_{j=0}^{n} s^j \mathbb{P}(T_n > j) = \sum_{j=0}^{n} s^j \mathbb{P}(T_n \geq j+1) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{s}{n}\right)^j \binom{n}{j} = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n, \qquad s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Specijalno, za $s = 1$ imamo

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n > j) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Konačno,

$$
\begin{aligned}
G_{T_n}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = j)s^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \geq j)s^j - \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \geq j+1)s^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} s^j \frac{1}{n^{j-1}} \binom{n}{j-1} - \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n \\
&= 1 + (s-1)\left(1 + \frac{s}{n}\right)^n, \qquad s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Također, po Lemi 7.2, imamo

$$
\mathbb{E}(T_n) = G'_{T_n}(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.
$$

7.2.1 Slučajne sume

Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednakodistribuiranih diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ te neka je N diskretna slučajna varijabla koja također poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ i koja je nezavisna od niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definiramo slučajnu sumu S kao

$$
S(\omega) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), & N(\omega) \geq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}
$$

Također, za $n \geq 1$ definiramo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Neka su G_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, G_N i G_S funkcije izvodnice od, redom, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, N, i S. Odredimo G_S. Imamo,

$$
G_S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = k)s^k, \qquad |s| \leq 1,
$$

i

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S=k, N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k, N=n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N=n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \mathbb{P}(N=n), \qquad k \geq 0.\end{aligned}$$

Uočimo da za funkciju izvodnicu G_{S_n}, $n \geq 1$, od S_n vrijedi $G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s)^n$, $|s| \leq 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned}G_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \mathbb{P}(N=n) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) G_{S_n}(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N=n) G_{X_1}(s)^n \\ &= G_N(G_{X_1}(s)), \qquad |s| \leq 1.\end{aligned}$$

Odredimo sada očekivanje slučajne sume. Vrijedi $\mathbb{E}(S) = G'_S(1)$. Kako je

$$G'_S(s) = G'_N(G_{X_1}(s)) G'_{X_1}(s), \qquad |s| < 1,$$

imamo

$$G'_S(1) = G'_N(G_{X_1}(1)) G'_{X_1}(1) = G'_N(1) G'_{X_1}(1) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

Dakle, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

Napomenimo ovdje da se u duhu odjeljka 1.4 i Teorema 5.9 za dani niz diskretnih funkcija gustoće $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ može konstruirati vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i niz diskretnih nezavisnih slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiranih na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, čije su funkcije gustoće upravo, redom, f_n, $n \in \mathbb{N}$.

Primjer 7.9 Bacamo simetričan novčić. Svaki put kada padne pismo bacamo simetričnu igraću kocku i zabilježimo broj. Prestajemo kada prvi put pri bacanju novčića padne glava. Neka je S ukupan zbroj brojeva palih pri bacanju kocke. Odredimo $G_S(s)$ i $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje: Neka je

$$N := \text{broj bacanja kocke} = \text{broj bacanja pisama prije prve glave.}$$

Očito, $N \sim G_0(1/2)$. Dakle, $G_N(s) = 1/(2-s)$, $|s| < 2$. Nadalje, neka je

$$X_n := \text{broj pri } n\text{-tom bacanju kocke}, \qquad n \geq 1.$$

Imamo,

$$G_{X_1}(s) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} s^i = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = \frac{1}{2 - \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}}, \qquad |s| \leq 1.$$

Konačno, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$. Imamo $\mathbb{E}(N) = G_N'(1) = 1$ i $\mathbb{E}(X_1) = 7/2$ pa je $\mathbb{E}(S) = 7/2$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata

Neka je X diskretna slučajna varijabla ili apsolutno neprekidna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 7.10 *Pretpostavimo da postoji* $0 < \delta < 1$ *takav da je* $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ *za sve* $|t| < \delta$. *Funkcija* $M : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$M(t) := \mathbb{E}(e^{tX})$$

zove se funkcija izvodnica momenata *od* X.

Uočimo nekoliko svojstava od M:

(i) $M(0) = 1$;

(ii) $e^{tX} > 0$ pa je $0 < \mathbb{E}(e^{tX}) \leq \infty$;

(iii) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za $|t| < \delta$, onda

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X<0\}}).$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X\geq 0\}}) < \infty$ i $\mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X<0\}}) < \infty$ za $|t| < \delta$.

(iv) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za $|t| < \delta$, onda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X<0\}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}1_{\{X<0\}}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX}).\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{t|X|}) < \infty$ za $|t| < \delta$. Nadalje, kako je

$$e^{t|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t|X|)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n|X|^n}{n!}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

zaključujemo da je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ i $|\mathbb{E}(X^n)| < \infty$ za sve $n \geq 0$. Također, zbog $e^{tX} \leq e^{|t||X|}$ i

$$\mathbb{E}(e^{|t||X|}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n|X|^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n\mathbb{E}(|X|^n)}{n!} < \infty, \qquad |t| < \delta,$$

imamo

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nX^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathbb{E}(X^n)}{n!} < \infty, \qquad |t| < \delta.$$

Deriviranjem gornje relacije (primjenom verzije Leme 7.2, naime $\mathbb{E}(X^n)$ ne mora biti nužno nenegativno ali tvrdnja će vrijediti jer gornji red, kao što je pokazano, apsolutno konvergira) dobivamo

$$M'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\mathbb{E}(X^n)}{(n-1)!} < \infty, \qquad |t| < \delta,$$

i, matematičkom indukcijom, za $k \geq 1$,

$$M^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}\mathbb{E}(X^n)}{(n-k)!} < \infty, \qquad |t| < \delta. \tag{7.1}$$

Dakle, $M^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ što objašnjava ime *funkcija izvodnica momenata*.

Primjer 7.11 Odredimo funkciju izvodnicu momentata od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Za $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma x+\mu)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t\sigma)^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Odredimo sada $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$. Imamo $\mathbb{E}(X) = M'(0)$, $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M''(0) - M'(0)^2$ i

$$\begin{aligned}
M'(t) &= (\sigma^2 t + \mu) e^{t^2\sigma^2/2 + t\mu} \\
M''(t) &= (\sigma^2 t + \mu)^2 e^{t^2\sigma^2/2 + t\mu} + \sigma^2 e^{t^2\sigma^2/2 + t\mu} \\
M'(0) &= \mu \\
M''(0) &= \mu^2 + \sigma^2.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$, iz čega se ponovno vidi značenje parametara μ i σ.

Primjer 7.12 Odredimo funkciju izvodnicu momentata od $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Neka je $t < \lambda$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\lambda-t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda-t} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Teorem 7.13 *Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable (ili nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable) s funkcijama izvodnicama momentata, redom, M_X i M_Y koje su definirane za $|t| < \delta$. Definirajmo $Z := X + Y$. Tada postoji pripadna funkcija izvodnica momentata M_Z, dobro je definirana za $|t| < \delta$ i vrijedi $M_Z(t) = M_X(t) M_Y(t)$ za $|t| < \delta$.*

Dokaz: Dokaz provodimo za diskretne slučajne varijable X i Y. Iz nezavisnosti od X i Y slijedi nezavisnost od e^{tX} i e^{tY} za sve $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, neka je f funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) te neka su f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Sada, za $|t| < \delta$, imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{tZ}) = \mathbb{E}(e^{tX+tY}) &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{tx+ty} f(x,y) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{tx+ty} f_X(x) f_Y(y) \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) \sum_{y\in\mathbb{R}} e^{ty} f_Y(y) = M_X(t) M_Y(t).\end{aligned}$$

□

Napomenimo da obrat Teorema 7.13 ne vrijedi: iz jednakosti $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, $|t| < \delta$, ne slijedi da su X i Y nezavisne. Naime, neka je (X, Y) slučajni vektor dan sljedećom tablicom

$X\backslash Y$	0	1	2	f_X
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
f_Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Očito, X i Y su jednako distribuirane i *zavisne*. Također,

$$X + Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/9 & 2/9 & 3/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$G_X(s) = G_Y(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2, \qquad s \in \mathbb{R},$$

pa je $G_X(s)G_Y(s) = (1/9)(1 + s + s^2)^2$ za $s \in \mathbb{R}$. S druge strane imamo

$$G_{X+Y}(s) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}s + \frac{3}{9}s^2 + \frac{2}{9}s^3 + \frac{1}{9}s^4 = \frac{1}{9}(1 + s + s^2)^2, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ za sve $s \in \mathbb{R}$, a X i Y nisu nezavisne, što pokazuje da obrat Teorema 7.6 ne vrijedi. Konačno, uočimo da u ovom slučaju vrijedi $M_X(t) = M_Y(t) = G_X(e^t)$ za $t \in \mathbb{R}$ što uz dokazano pokazuje da ne vrijedi niti obrat Teorema 7.13.

Sljedeća dva teorema su primjeri rezultata koji imaju fundamentalno značenje u teoriji vjerojatnosti. Prvi teorem je analogon Propozicije 7.3 i kaže da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju. Drugi teorem daje karakterizaciju konvergencije po distribuciji, vidi Definiciju 4.53, pomoću konvergencije niza funkcija izvodnica. Dokazi ovih teorema izlaze iz okvira ovog kolegija.

Teorem 7.14 *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom momenata M_X koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada je distribucija od X jedinstveno određena s M_X. Preciznije, ako su X i Y slučajne varijable s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y koje su definirane za $|t| < \delta$, takvima da $M_X(t) = M_Y(t)$ za sve $|t| < \delta$, onda su X i Y jednako distribuirane.*

Primjer 7.15 Neka su $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Rješenje: Po Primjeru 7.11 i Teoremu 7.13 imamo

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = e^{t(\mu_1+\mu_2)+\frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

što zajedno s Teoremom 7.14 pokazuje tvrdnju.

Teorem 7.16 *Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcijama izvodnicama momenata $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koje su definirane za $|t| < \delta$. Nadalje, neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F i funkcijom izvodnicom momenata M koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada, ako $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji prema X, tj. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za sve $x \in C_F$, onda $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ za $|t| < \delta$. Obratno, ako $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ za $|t| < \delta$, onda $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka X.*

Poglavlje 8

Centralni granični teorem i zakoni velikih brojeva

8.1 Centralni granični teorem

Lema 8.1 *Za* $-1/2 \leq x \leq 1$ *vrijedi*

$$|\log(1+x) - x| \leq 2x^2.$$

Dokaz: Stavimo

$$f(x) := \log(1+x) - x, \qquad x \in [-1/2, 1].$$

Očito $f(0) = 0$. Nadalje, po teoremu srednje vrijednosti za svaki $x \in [0,1]$ (svaki $x \in [-1/2, 0]$) postoji $\theta \in [0, x]$ ($\theta \in [x, 0]$) takav da

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta)x.$$

Kako je

$$f'(\theta) = -\frac{\theta}{\theta+1}, \qquad \theta \in [-1/2, 1],$$

zaključujemo da je f nepozitivna te $|f'|$ neopadajuća na $[0,1]$ i nerastuća na $[-1/2, 0]$. Sada za $x \in [0,1]$ imamo

$$|f(x)| = |f'(\theta)|x \leq \max_{\theta \in [0,x]} |f'(\theta)|x = \frac{x^2}{x+1} \leq x^2,$$

dok je za $x \in [-1/2, 0]$,

$$|f(x)| = |f'(\theta)||x| \leq \max_{\theta \in [x,0]]} |f'(\theta)||x| = \frac{x^2}{x+1} \leq 2x^2.$$

$\square$

Lema 8.2 *Neka je $a \in \mathbb{R}$ te neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz realnih brojeva takav da $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Tada vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right)^n = e^a.$$

Dokaz: Pokazujemo da

$$\lim_{n\to\infty} n \log \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) = a.$$

Budući je $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $-1/4 < a_n < 1/4$ i $-1/4 < a/n < 1/4$ za sve $n \geq n_0$. Slijedi da je $-1/2 < a/n + a_n < 1/2$ za sve $n \geq n_0$. Po Lemi 8.1, uz $x = a/n + a_n$, za sve $n \geq n_0$ imamo

$$\left|\log \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - \left(\frac{a}{n} + a_n\right)\right| \leq 2 \left(\frac{a}{n} + a_n\right)^2,$$

tj.

$$\left|n \log \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - (a + na_n)\right| \leq 2n \left(\frac{a}{n} + a_n\right)^2.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
0 &\leq \limsup_{n\to\infty} \left|n \log \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - a\right| \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \left|n \log \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) - (a + na_n)\right| + \limsup_{n\to\infty} n|a_n| \\
&\leq 2 \limsup_{n\to\infty} n \left(\frac{a}{n} + a_n\right)^2 \\
&= 2 \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a^2}{n} + 2aa_n + na_n^2\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to\infty} n \log \left(1 + \frac{a}{n} + a_n\right) = a.$$

$\square$

Teorem 8.3 *(Centralni granični teorem) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem μ i zajedničkom varijancom σ^2. Za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x).$$

Drugim riječima, niz $((S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka $N(0,1)$.

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $Y_n := X_n - \mu$. Dakle,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Dokaz teorema ćemo provesti uz pretpostavku da je funkcija izvodnica momenata $M(t) = \mathbb{E}(e^{tY_1})$ dobro definirana (tj. konačna) za $|t| < \delta$, za neki $\delta > 0$. Uočite da je ta pretpostavka ekvivalentna pretpostavci da je na $(-\delta, \delta)$ dobro definirana funkcija izvodnica momenata slučajne varijable X_1. Budući da su slučajne varijable $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednako distribuirane, vrijedi da je $M(t) = \mathbb{E}(e^{tY_n})$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, neka su $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ funkcije izvodnice momenata od $((S_n - n\mu)/\sigma\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Sada, po Teoremu 7.13, za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ imamo

$$M_n(t) = \mathbb{E}\left(e^{t\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y_i}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}} Y_i}\right) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

Budući da je

$$\mathbb{E}(Y_1) = 0 \qquad \text{i} \qquad \mathbb{E}(Y_1^2) = \mathrm{Var}(Y_1) = \sigma^2,$$

za $|t| < \delta\sigma\sqrt{n}$ vrijedi

$$M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^k \mathbb{E}(Y_1^k) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2}}.$$

Stavimo sada

$$a_n(t) := \sum_{k=3}^{\infty} \frac{t^k \mathbb{E}(Y_1^k)}{k!\sigma^k n^{k/2-3/2}}, \qquad |t| < \delta\sigma\sqrt{n}.$$

Dakle,

$$M_n(t) = M\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{a_n(t)}{n^{3/2}}\right)^n.$$

Budući da je

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{a_n(t)}{n^{3/2}} = 0, \qquad |t| < \delta,$$

po Lemi 8.2 zaključujemo

$$\lim_{n\to\infty} M_n(t) = e^{\frac{t^2}{2}}, \qquad |t| < \delta,$$

što po Teoremu 7.16 dokazuje tvrdnju. □

Kao izravnu posljedicu Teorema 8.3 imamo tzv. *de Moivre-Laplaceov teorem* (aproksimacija binomne slučajne varijable normalnom). Za $n \in \mathbb{N}$ neka je $X_n \sim B(n,p)$, $0 < p < 1$. Vrijedi $\mathbb{E}(X_n) = np$, $\mathrm{Var}(X_n) = npq$ i $\sigma(X_n) = \sqrt{npq}$. Nadalje, definirajmo

$$Y_n := \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Teorem 8.4 *(de Moivre-Laplaceov teorem) Za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \le x) = \Phi(x).$$

Dokaz: Neka je $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom $p \in (0,1)$. Tada po Propoziciji 5.27 X_n ima jednaku distribuciju kao $Z_1 + \cdots + Z_n$ pa tvrdnja slijedi izravno iz Teorema 8.3. □

Primjer 8.5 Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Želimo približno odrediti $\mathbb{P}(a < X_n \le b)$, gdje je $X_n \sim B(n,p)$ za $n \in \mathbb{N}$ velik i $0 < p < 1$. Znamo da je točna vrijednost

$$\mathbb{P}(a < X_n \le b) = \sum_{a<k\le b} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Odredimo približnu vrijednost primjenom de Moivre-Laplaceovog teorema. Imamo,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a < X_n \le b) &= \mathbb{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} < Y_n \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(Y_n \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \mathbb{P}\left(Y_n \le \frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)\\ &\approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right).\end{aligned}$$

8.2 Zakoni velikih brojeva

Definicija 8.6 *Za niz slučajnih vrijabli* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *kažemo da* konvergira po vjerojatnosti *slučajnoj varijabli* X *ako za svako* $\varepsilon > 0$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. *Niz slučajnih vrijabli* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira gotovo sigurno *slučajnoj varijabli* X *ako*

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1.$$

Oznaka je $X_n \xrightarrow{g.s.} X$.

Teorem 8.7 *(Slabi zakon velikih brojeva) Neka je* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je* $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ *i* $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

Dokaz: Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Vrijedi $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ i, zbog nezavisnosti, $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Sada, primjenom Čebiševljeve nejednakosti, imamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

što teži u 0 kada n teži u ∞. □

Napomena 8.8 Tvrdnja gornjeg teorema vrijedi i uz sljedeću pretpostavku: neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa (konačnim) zajedničkim očekivanjem $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. Tada $S_n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$. Taj rezultat poznat je pod imenom *Hinčinov slabi zakon velikih brojeva.*

Lema 8.9 *Neka je X slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(|X|^m) < \infty$ za neki $m \in \mathbb{N}$. Tada je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ za sve $n \leq m$, $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz: Uočimo prvo da je $\mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) \leq \mathbb{E}(|X|^m) < \infty$. Slijedi da je za $n \leq m$,

$$\mathbb{E}(|X|^n) = \mathbb{E}(1_{\{|X|\leq 1\}}|X|^n) + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^n) \leq 1 + \mathbb{E}(1_{\{|X|>1\}}|X|^m) < \infty\,.$$

□

Teorem 8.10 *(Jaki zakon velikih brojeva) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih vrijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$. Tada*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu.$$

Dokaz: Dokaz provodimo samo za slučaj kada je $\mathbb{E}(X_1^4) = K < \infty$. Pretpostavimo prvo da je $\mu = 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Računamo

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \mathbb{E}((X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)).$$

Kada razvjemo desnu stranu dobit ćemo članove sljedećeg tipa: X_i^4, $X_i^3X_j$, $X_i^2X_j^2$, $X_i^2X_jX_k$ i $X_iX_jX_kX_l$. Zbog nezavisnosti imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i^3X_j) &= \mathbb{E}(X_i^3)\mathbb{E}(X_j) = 0\\
\mathbb{E}(X_i^2X_jX_k) &= \mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k) = 0\\
\mathbb{E}(X_iX_jX_kX_l) &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(X_l) = 0.
\end{aligned}$$

Nadalje, za dani i imat ćemo $\binom{4}{4} = 1$ članova oblika X_i^4 te za dani par $i \neq j$ imat ćemo $\binom{4}{2} = 6$ članova oblika $X_i^2X_j^2$. Dakle,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n^4) &= n\mathbb{E}(X_i^4) + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2X_j^2) = nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_i^2)\mathbb{E}(X_j^2)\\
&= nK + 6\binom{n}{2}\mathbb{E}(X_1^2)^2.
\end{aligned}$$

Iz
$$0 \leq \mathrm{Var}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_1^4) - \mathbb{E}(X_1^2)^2$$
zaključujemo da je
$$\mathbb{E}(X_1^2)^2 \leq K.$$
Dakle,
$$\mathbb{E}(S_n^4) \leq nK + 3n(n-1)K,$$
tj.
$$\mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$
Sada zaključujemo
$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{S_n^4}{n^4}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{K}{n^3} + \frac{3K}{n^2}\right) < \infty.$$
Specijalno, imamo
$$\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^4}{n^4} < \infty\right) = 1$$
(vidjeti Primjer 4.37), iz čega zaključujemo da je
$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^4}{n^4} = 0\right) = \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0\right) = 1.$$

Neka je sada $\mu \in \mathbb{R}$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $Y_n := X_n - \mu$. Tada je $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli takav da $\mathbb{E}(Y_n) = 0$. Primjenom gornjeg dokaza zaključujemo
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \mu\right) &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{(X_1-\mu) + \cdots + (X_n-\mu)}{n} = 0\right)\\ &= \mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} = 0\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

8.3 Konvergencije u vjerojatnosti

U ovom odjeljku diskutiramo vrste konvergencija slučajnih varijabli i njihov odnos. U sljedećem teoremu opravdavamo nazive "jaki" i "slabi" zakon velikih brojeva.

Teorem 8.11 *Konvergencija gotovo sigurno povlači konvergenciju po vjerojatnosti.*

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli X, koje su definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i, za $n \in \mathbb{N}$, definirajmo $A_n(\varepsilon) := \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Očito, $A_n(\varepsilon) \in \mathcal{F}$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $B_n(\varepsilon) := \cup_{k\geq n} A_k(\varepsilon)$ i $B(\varepsilon) := \limsup_{n\to\infty} B_n(\varepsilon) = \cap_{n\in\mathbb{N}} B_n(\varepsilon)$. Sada, budući da $X_n \xrightarrow{\text{g.s.}} X$, zaključujemo da $\mathbb{P}(B(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Specijalno, zbog neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na nerastuće nizove događaja, imamo $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Međutim, kako je $A_n(\varepsilon) \subseteq B_n(\varepsilon)$ za $n \in \mathbb{N}$, imamo $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$, tj. $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$. □

Napomenimo da općenito konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti nisu ekvivalentne. Naime, neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pretpostavimo, nadalje, da je

$$X_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 1/n & 1/n \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Imamo,

$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n > \varepsilon,\, X_n = 1) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \varepsilon \leq 1 \\ 0, & \varepsilon > 1, \end{cases}$$

što pokazuje da $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Kada bi niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergirao gotovo sigurno, onda bi zbog Teorema 8.11 konvergirao g.s prema nuli. Pokažimo da je to nemoguće. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $A_n := \{X_n > 1/2\}$. Tada imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Sada Lema 2.17 implicira da

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1,$$

tj. $X_n > 1/2$ za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$ na događaju vjerojatnosti 1. To pokazuje da $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira prema 0 gotovo sigurno,

Također, napomenimo da je konvergencija po distribuciji najslabija od tri konvergencije koje smo spomenuli u ovom kolegiju.

Teorem 8.12 *Konvergencija po vjerojatnosti povlači konvergenciju po distribuciji.*

Dokaz: Neka niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X, koje su definirane na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i X. Neka je $x \in C_F$. Tada, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} F_n(x) = \mathbb{P}(X_n \le x) &= \mathbb{P}(X_n \le x,\, X \le x+\varepsilon) + \mathbb{P}(X_n \le x,\, X > x+\varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) + \mathbb{P}(X - X_n > \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X \le x+\varepsilon) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Dakle,

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x+\varepsilon).$$

S druge strane,

$$\begin{aligned} F(x-\varepsilon) &= \mathbb{P}(X \le x-\varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X \le x-\varepsilon,\, X_n \le x) + \mathbb{P}(X \le x-\varepsilon,\, X_n > x) \\ &\le \mathbb{P}(X_n \le x) + \mathbb{P}(X_n - X > \varepsilon) \\ &\le \mathbb{P}(X_n \le x) + \mathbb{P}(|X - X_n| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Sada imamo,

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x).$$

Konačno, kako je

$$F(x-\varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \le F(x+\varepsilon),$$

puštajući ε u 0 i uzimajući u obzir da je F neprekidna u x slijedi tvrdnja. □

Kao i u slučaju konvergencija gotovo sigurno i po vjerojatnosti, konvergencije po vjerojatnosti i po distribuciji nisu ekvivalentne. Neka je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

te neka je $X_n = X$ za $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, stavimo $Y = 1 - X$. Očito $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka Y. S druge strane za $n \in \mathbb{N}$ i $0 < \varepsilon < 1$ imamo

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|2X - 1| > \varepsilon) = 1.$$

Teorem 8.13 *Neka niz slučajnih varijabli* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, definiranih na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*, konvergira po distribuciji ka* $c \in \mathbb{R}$*. Tada,* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} c$*.*

Dokaz: Označimo s $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i F, redom, funkcije distribucije od $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i c. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n - c| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(X_n > c + \varepsilon) + \mathbb{P}(X_n < c - \varepsilon) \\
&\leq 1 - \mathbb{P}\left(X_n \leq c + \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(X_n \leq c - \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&= 1 - F_n(c + \varepsilon) + F_n\left(c - \frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned}$$

Sada, kako su $c + \varepsilon$ i $c - \varepsilon/2$ točke neprekidnosti od F i $\lim_{n\to\infty} F_n(c + \varepsilon) = F(c + \varepsilon) = 1$ te $\lim_{n\to\infty} F_n(c - \varepsilon/2) = F(c - \varepsilon/2) = 0$ slijedi tvrdnja. □

Konačno, komentirajmo vezu zakona velikih brojeva i centralnog graničnog teorema. Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednako distribuiraih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu \in \mathbb{R}$ i varijacom $\sigma^2 > 0$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada, po Teoremu 8.10, imamo

$$\frac{S_n - n\mu}{n} \xrightarrow{\text{g.s.}} 0.$$

Želimo bolje razumijeti asimptotsko ponašanje niza $(S_n - n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$, tj. želimo odrediti niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ za koji niz $((S_n - n\mu)/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira ka nečemu što nije 0 ili $\pm\infty$. Takozvani *Marcinkiewicz–Zygmundov jaki zakon velikih brojeva* kaže da u danoj situaciji za svaki $\alpha \in (0,2)$ vrijedi

$$\frac{S_n - n\mu}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{\text{g.s.}} 0.$$

Također, takozvani *zakon ponovljenog logaritma* kaže da

$$\mathbb{P}\left(-\sqrt{2}\sigma = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sqrt{\log\log n}} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sqrt{\log\log n}} = \sqrt{2}\sigma\right) = 1.$$

Iz gornjih rezultata zaključujemo dvije stvari:

(i) ako uzmemo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n}\sqrt{\log\log n} = \infty$, onda $(S_n - n\mu)/a_n \xrightarrow{\text{g.s.}} 0$. S druge strane, ako je $\lim_{n\to\infty} a_n/\sqrt{n}\sqrt{\log\log n} = 0$, onda

$$\mathbb{P}\left(-\infty = \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - n\mu}{a_n} = \infty\right) = 1.$$

To sugerira da konvergencija gotovo sigurno nije prikladna za karakteriziranje asimptotskog ponašanja niza $(S_n - n\mu)_{n\in\mathbb{N}}$. Također, takozvani *Lévyev teorem o konvergenciji redova slučajnih varijabli* (koji kaže da red nezavisnih slučajnih varijabli konvergira gotovo sigurno ako i samo ako konvergira po vjerojatnosti) sugerira da niti konvergencija po vjerojatnosti nije prikladan tip kovergencije u promatranom problemu.

(ii) dobar izbor niza bi mogao biti $a_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Intuitivno, $\mathrm{Var}(S_n - n\mu) = n\sigma^2$, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, dijeljenjem $S_n - n\mu$ s $\sqrt{n}$ imamo $\mathrm{Var}((S_n - n\mu)/\sqrt{n}) = \sigma^2$, $n \in \mathbb{N}$, što znači da dijeljenjem s $\sqrt{n}$ možemo očekivati neku relevantnu informaciju.

Na osnovu gornje diskusije kao prikladna konvergencija nameće se konvergencija po distribuciji (najslabija od spomenute tri konvergencije) i kao prikladan niz nameće se $a_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, što i potvrđuje centralni granični teorem (Teorem 8.3).