7 Granični teoremi [!]

7.1 Zakon velikih brojeva (ZVB)

Za niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$, kažemo da su nezavisne i jednako distribuirane ("njd") ako su $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne te je $X_i \overset{d}{=} X_j$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$.

[Specijalno, $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_j]$, $Var(X_i) = Var(X_j)$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$]

Def. 7.1 Za niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$, kažemo da konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli X (oznaka $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$), ako $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon \right) = 0 . \qquad (7.1)$$

∎

Tm. 7.2 (Slabi ZVB)

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ njd slučajne varijable t.d. $\sigma^2 := Var(X_1) < \infty$, te neka je $\mu := \mathbb{E}[X_1]$ $(\in \mathbb{R})$ zajedničko očekivanje.

Definiramo

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (7.2)$$

Tada

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu} . \qquad (7.3)$$

∎

Dokaz. (Čebišev!) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan.

Uočimo,
$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overset{=\mu,\ \forall i}{\mathbb{E}[X_i]} = \mu$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \underset{\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]}{\mu}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overset{=\sigma^2,\ \forall i}{\mathrm{Var}(X_i)}}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2\varepsilon^2}$$

$X_1, X_2, \ldots$ nezavisne

$$= \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ ■

Nap. 7.3 Dovoljno je znati da je $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. ■

Nap. 7.4 Nezavisnost je bitna! Npr. ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ te } X_i := X,\ \forall i \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{S_n}{n} = \frac{nX}{n} = X, \text{ ali kada je } \varepsilon \in \langle 0, \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \underset{\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mathbb{E}[X_1]}{\frac{1}{2}}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\left|X - \frac{1}{2}\right|}_{=\frac{1}{2}} > \varepsilon\right) = 1,\ \forall n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0.$$ ■

Pr. 7.5 Bacamo novčić na kojem je vjerojatnost za P jednaka $p \in [0,1]$.

Neka je $A_i := \{$u i-tom bacanju palo P$\}$, $i \in \mathbb{N}$, te

$X_i := \mathbb{1}_{A_i}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{S_n}{n} = \frac{\text{ukupan } \# \text{ P u } n \text{ bacanja}}{n}.$$

$X_1, X_2, \ldots$ je niz njd slučajnih varijabli, sa $\boxed{\mu := \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{P}(A_1) = p}$

$$\underset{\text{SZVB}}{\Rightarrow} \quad \boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} p}$$

[intuitivna definicija vjerojatnosti iz uvoda!]

<u>Def. 7.6</u> Ako je $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih varijabli, kažemo da <u>konvergira gotovo sigurno</u> (g.s.) prema sl. var. X ako

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty} X_n = X}_{\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}}\Big) = 1 \qquad (7.4)$$

oznaka $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{g.s.} X$

<u>Nap. 7.7.</u> općenito, $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{g.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$, a obrat ne mora vrijediti.

<u>Tm. 7.8</u> (Jaki ZVB)

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ njd. i.i.d. $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$, te $\mu := \mathbb{E}[X_1]$.

Tedy

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.n.}} \mu .} \qquad (7.5)$$

∎

(bez dowodu)