6.2 Očekivanje i varijanca

Def. 6.12 Neka je X neprekidna sluč. varijabla te $f = f_X$. Ako je (i) $\int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t)\,dt < \infty$, ili (ii) $X \geq 0$ (tj. $f(t)=0,\ \forall t<0$), kažemo da postoji (matematičko) očekivanje od X koje definiramo s

$$\boxed{\mathbb{E}[X] := \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\,dt} \qquad (6.14)$$

[(i) $\Rightarrow \mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, (ii) $\Rightarrow \mathbb{E}[X] \in [0,\infty]$] ■

Pr. 6.13 Ako je $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$,

$$\mathbb{E}[X] \underset{X\geq 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} t\, f(t)\,dt \underset{\substack{f=0,\ \text{za } t\notin[0,1] \\ f=1,\ \text{za } t\in[0,1]}}{=} \int_0^1 t\cdot 1\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

[Naravno!] ■

(!)
Tm. 6.14* Neka je X neprekidna slučajna varijabla te $f=f_X$, i neka je $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f-ja. Ako je (i) $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, f(t)\,dt < \infty$, ili (ii) $g(X)\geq 0$, tada $g(X)$ ima očekivanje te vrijedi

$$\boxed{\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, f(t)\,dt.} \qquad (6.15)$$

((6.15) vrijedi bez obzira je li $g(X)$ neprekidna ili ne!) ■

(bez dokaza!)

[⇒ Ako je X neprekidna, $\mathbb{E}[X]$ postoji ako je $X \geq 0$ ili

$\mathbb{E}[|X|] < \infty$.]

Prop. 6.15 | Neka je X neprekidna te $f = f_X$, i $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i) Ako je $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, tada je i $\mathbb{E}[|aX+b|] < \infty$ te vrijedi

$$\mathbb{E}[aX+b] = a\,\mathbb{E}[X] + b. \qquad (6.16)$$

(ii) Ako je $X \in [a,b]$, tj. $f(t) = 0$, za $t \notin [a,b]$,

tada je $\mathbb{E}[X] \in [a,b]$.

Dokaz | (i)

$$\mathbb{E}[\underbrace{|aX+b|}_{=g(X)\geq 0}] \underset{(6.15)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|at+b|}_{\leq |a|\cdot|t|+|b|} f(t)\,dt$$

$$\leq |a| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t)\,dt}_{=\underline{\mathbb{E}[|X|]}<\infty} + |b| \overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt}^{1} < \infty$$

te se slično dokaže (6.16) (DZ).

(ii)

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt \underset{f(t)=0 \text{ za } t\notin[a,b]}{=} \int_a^b \overset{\leq b}{t}\, f(t)\,dt \leq b \cdot \overbrace{\int_a^b f(t)\,dt}^{\overset{f\geq 0}{\leq} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1}$$

$$\leq b,$$

te slično $\mathbb{E}[X] \geq a$ (DZ)

Pr. 6.16 | Ako je $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, znamo da je

$$Y := (b-a)X + a \sim \mathrm{Unif}[a,b].$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[Y] \underset{(6.16)}{=} (b-a)\underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=\frac{1}{2}} + a = \boxed{\frac{a+b}{2}}.$$

[Pažnja!] ■

Tm. 6.17 | (!) Teoremi 5.11 (linearnost oček.) i 5.14 (monotonost oček.) vrijede i za neprekidne sluč. var. [bez dokaza] ■

(i) Ako su X i Y slučajne varijable (neprek. ili diskr.) t.d. $0 \le X \le Y$, tada je

$$(0 \le)\ \mathbb{E}[X] \le \mathbb{E}[Y]$$

(ii) Ako su $X_1, \dots, X_n$ slučajne varijable (nepr. ili diskretne), t.d. (i) $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$, $\forall i$, ili (ii) $X_i \ge 0$, $\forall i$, tada je

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{E}[X_i],$$

(i) $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tj. (ii) $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \ge 0$ ■.

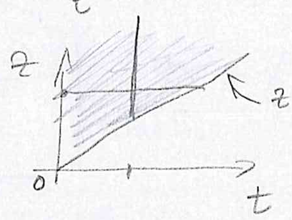
Prop. 6.18 | Ako je $X \ge 0$ neprekidna sluč. varijabla, vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \ge t)\, dt \qquad (6.17)$$ ■

Dokaz.

$$\int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(X \geq t)}_{= \int_t^\infty f_X(z)\,dz} dt = \int_0^\infty \int_t^\infty f_X(z)\,dz\,dt$$

$$= \Big[$$



$$\Big]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^z f_X(z)\,dt\,dz = \int_0^\infty f_X(z) \underbrace{\left(t\Big|_0^z\right)}_{= z} dz$$

$$= \int_0^\infty f_X(z)\cdot z\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ f_X(z)=0,\ \text{za } z<0}}{=} \int_{-\infty}^\infty f_X(z)\,dz = \mathbb{E}[X] \quad \blacksquare$$

Pr. 6.19 Ako je $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, tj.

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t},\ t \geq 0,$$

imamo

$$\mathbb{E}[X] \underset{\substack{\uparrow \\ X \geq 0}}{\overset{(6.17)}{=}} \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq t)\,dt$$

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F_X(t)$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = -0 + \frac{1}{\lambda}\cdot 1$$

$$= \boxed{\frac{1}{\lambda}} \qquad [\lambda = \text{"intenzitet"}] \quad \blacksquare$$

Nap. Ako je X diskretna te $X \in \mathbb{N}_0$,

$$\int_0^\infty \underbrace{\mathbb{P}(X \geq t)}_{= \mathbb{P}(X \geq n) \text{ ako je } t \in \langle n-1, n],\ n \geq 1} dt = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq n) \overset{\text{znamo}}{=} \mathbb{E}[X] \quad \blacksquare$$

Ako je X neprekidna sluč. var. t.d. $\mathbb{E}[|X|]<\infty$, varijanca se definira kao i prije:

$$Var(X) := \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$$

$$\left(= \int_{-\infty}^{\infty} (t-\mathbb{E}[X])^2 f_X(t)\,dt \in [0,+\infty] \right).$$

Isti dokaz kao u Prop. 4.33 pokazuje da je opet

(i) $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$,

(ii) $Var(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

Pr. 6.20 | Ako je $X \sim Unif[0,1]$, znamo $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{2}$, te

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\cdot t^2\,dt \overset{DZ}{=} \dots = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow Var(X) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{12}}$$

Ako je $Y \sim Unif[a,b]$, znamo $\mathbb{E}[Y] = \frac{a+b}{2}$, te

$$Var(Y) = Var((b-a)X+b) = (b-a)^2 Var(X) = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Tm. 6.21 | Ako je X neprekidna sluč. var. i $h:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ f-ja, $\forall a>0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(h(X)\geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{a}.$$

Specijalno, vrijede Markovljeva i Čebiševljeva nejednakost kao i u diskretnom slučaju (vidi Prop. 4.38).

$\boxtimes$

Dokaz | Za $a>0$, [Dokaz prolazi i u diskretnom slučaju!]

$$h(X) \geq \underbrace{h(X)\mathbb{1}_{\{h(X)\geq a\}}}_{=\begin{cases} h(x), & \text{ako } h(x)\geq a \\ 0, & \text{inače}\end{cases}} \geq a\cdot\mathbb{1}_{\{h(X)\geq a\}}$$

$h\geq 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[h(X)] \geq \mathbb{E}[a\mathbb{1}_{\{h(X)\geq a\}}]$$

$$= a\cdot\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{\{h(X)\geq a\}}}_{\in\{0,1\}}]$$

$$= a\cdot\mathbb{P}(h(X)\geq a) \quad \blacksquare$$

Def. 6.22 | Za neprekidne sluč. varijable $X_1,\dots,X_n$ kažemo da su nezavisne ako je

$$\mathbb{P}(X_1\in B_1,\dots,X_n\in B_n) = \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i\in B_i),$$

$\forall B_1,\dots,B_n \subseteq \mathbb{R}$. [ne baš za sve] $\blacksquare$

u ovom slučaju opet vrijedi

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i).$$

(bez dokaza)