6.1 Funkcije distribucije

Def. 6.3 Ako je X slučajna varijabla (neprekidna ili diskretna), njena funkcija distribucije je f-ja $F:\mathbb{R}\to[0,1]$, def. s

$$\boxed{F(x) := \mathbb{P}(X \le x), \quad \forall x\in\mathbb{R}.} \qquad (6.6)$$

nekad pišemo F_X

Uočimo, ako je $F = F_X$, za sve $a<b$ vrijedi

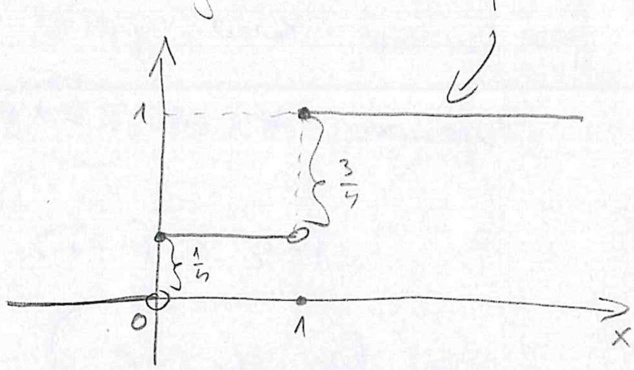
$$\boxed{\mathbb{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)} \qquad (6.7)$$

vidi (6.2)

Pr. 6.4 Ako je $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, vrijedi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x<0 \\ \frac{1}{4}, & \text{za } x\in[0,1\rangle \\ 1, & \text{za } x \ge 1 \end{cases}$$

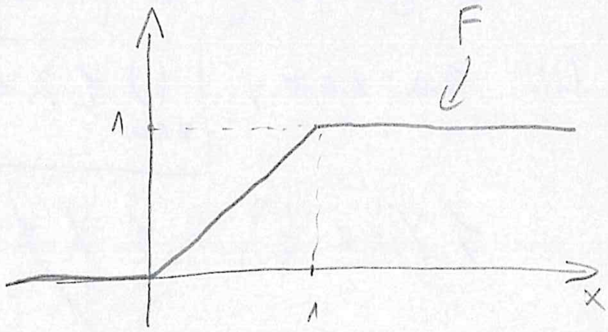
DZ



Pr. 6.5 Ako je $X \sim \mathrm{Unif}[0,1]$, vrijedi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x<0 \\ x, & \text{za } x\in[0,1] \\ 1, & \text{za } x > 1 \end{cases}$$

DZ



Tm. 6.6 [Svojstva f-je distribucije]

Neka je X sluč. var. [neprek. ili diskretna] i $F = F_X$. Tada vrijedi

(i) F je neopadajuća;

(ii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$;

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, F je neprekidna zdesna u x, te postoji $\lim_{y\to x-} F(y) =: F(x-)$.

Dokaz.

(i) Ako je $x \le y$, $\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\}$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) \le \mathbb{P}(X \le y) = F(y).$$

(ii) Zbog $\{X \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \le n\}$ te $\{X \le n\} \subseteq \{X \le n+1\}, \forall n$,

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \le n) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1.$$

$\Rightarrow$ Za svaki $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, t.d. $1-\varepsilon \le F(n_0) \le 1$. $F(y) \le 1, \forall y \in \mathbb{R}$

Specijalno, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \ge n_0$,

$$1-\varepsilon \le F(n_0) \underset{(i)}{\le} F(x) \le 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Druga tvrdnja se pokazuje analogno (DZ).

(iii) Za $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \le x - \frac{1}{n}\} = \{X < x\}}$ te

$$\{X \le x - \tfrac{1}{n}\} \subseteq \{X \le x - \tfrac{1}{n+1}\}, \forall n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x - \tfrac{1}{n}) = \mathbb{P}(X < x)$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{F(x-) := \lim_{y \to x-} F(y) = \mathbb{P}(X < x)} \qquad (6.8)$$

kao u (ii)

Neprekidnost zdesna $(F(x+) = F(x))$ za DZ ■

$\rightarrow$ vidi S.,V., Tm. 4.14.

Iz (6.8) slijedi da za sluč. var. X i $F = F_X$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X < x)$$

$$= \underbrace{F(x) - F(x-)}_{[=\text{veličina skoka od } F \text{ u } x]}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (6.9)$$

Specijalno,

$\rightarrow$ $$\boxed{F \text{ je neprekidna u } x \in \mathbb{R} \iff \mathbb{P}(X = x) = 0 \quad (\text{tj. } F(x+) = F(x-))}$$

Dakle, ako je X neprekidna slučajna varijabla, (6.4) povlači da je $\boxed{F_X \text{ neprekidna na } \mathbb{R}}$.

[Od tuda ime!]

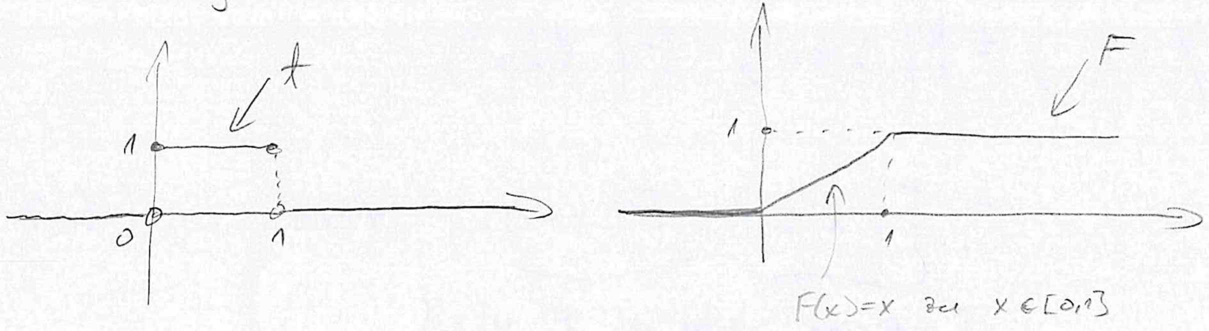
Nap. 6.7 F-ja distribucije jedinstveno određuje razdiobu slučajne varijable, tj. ako je $F_X = F_Y$, tada X i Y imaju istu distribuciju [$f_X = f_Y$ u slučaju da su X i Y neprekidne] ■ [bez dokaza]

Nap. 6.8 | Ako je X neprekidna te $F = F_X$, $f = f_X$, za "većinu" točaka $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\boxed{F'(t) = f(t).}$$

[npr. ako je f neprekidna, $F'(t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$]

npr. | ako je $X \sim \text{Unif}[0,1]$,



$\Rightarrow$ $F'(t)$ postoji za $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ te je

$$F'(t) = \begin{cases} 1, & t \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases} = f(t)$$ ■

Pr. 6.9 | X ima uniformnu razdiobu na $[a,b]$, za $a < b$,

ako je (i) neprekidna s gustoćom

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad (6.10)$$

ili ekvivalentno, (ii) ako je

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{t-a}{b-a}, & t \in [a,b] \\ 1, & t > b \end{cases} \qquad (6.11)$$

Oznaka je $X \sim \text{Unif}[a,b]$ ■

$(i) \Rightarrow (ii)$: $F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) \overset{\text{}}{=} \int_{-\infty}^{t} f_X(z)\,dz \overset{\text{DZ}}{=} (6.1$

$(ii) \Rightarrow (i)$: za $f = (6.10)$, vrijedi

$\mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t) = (6.11) = \int^{t} f(z)\,dz$

Pr. 6.10 | X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ (oznaka $X \sim Exp(\lambda)$), ako je

(i) neprekidna s gustoćom

$$\boxed{f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0} \qquad (6.12)$$

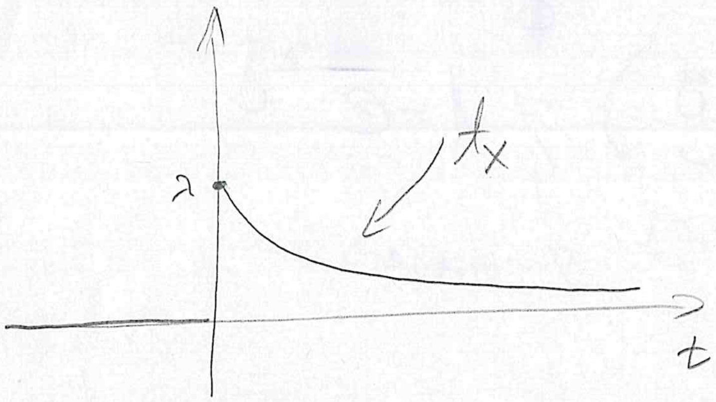
te $f_X(t) = 0$, $t < 0$;

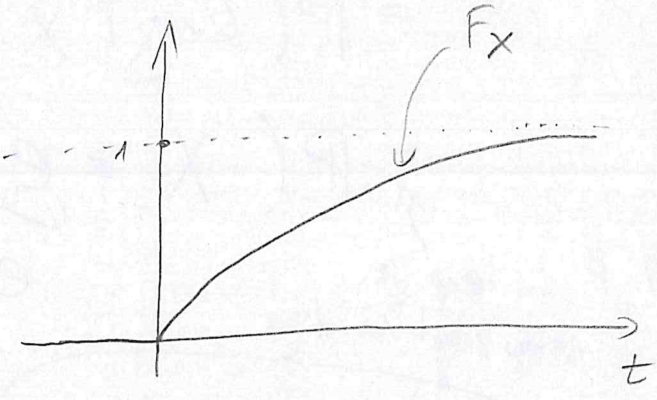
ili ekvivalentno,

(ii) ako je

$$F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \qquad (6.13)$$

te $F_X(t) = 0$, za $t < 0$. [Dz]





Specijalno, $X \geq 0$ ... ["nemora čekanja"] ⊠

Pr. 6.11 | Neka je $X \sim Unif[0,1]$ te $Y = g(X)$ za $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(i) Ako je $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 0, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Y = g(X) = \mathbb{1}_{\{X \geq \frac{1}{2}\}}$$

$\Rightarrow Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ za

$$p = \mathbb{P}\left(X \geq \tfrac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(X \in [\tfrac{1}{2}, 1]\right) \overset{\text{Pr. 6.2}}{=} 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

(ii) Ako je $g(t) = -\dfrac{\log(t)}{\lambda}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $\lambda > 0$

imamo $Y = g(X) \in \langle 0, +\infty\rangle$ te za $y > 0$,

$\mathbb{P}(X \in \langle 0, 1\rangle) = 1$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y)$$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{\log(X)}{\lambda} \leq y\right)$$

$$= \mathbb{P}(\log(X) \geq -\lambda y)$$

$$= \mathbb{P}(X \geq \underbrace{e^{-\lambda y}}_{\in [0,1]}) = 1 - e^{-\lambda y}$$

exp je strogo rastuća f-ja

$X \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$

$$\Rightarrow \boxed{Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)}.$$

Dakle, ako je X neprekidna, $g(X)$ ne mora nužno biti neprekidna sluč. varijabla (Primjer (ii)) ⊠

DZ Ako je $X \sim \mathrm{Unif}\,[0,1]$, tada za sve $a<b$ vrijedi

$$Y := (b-a)X + a \sim \mathrm{Unif}\,[a,b]$$ ⊠