5.2 Očekivanje

Tm. 5.10 (!) Neka su $X_1, \dots, X_n$ diskretne sluč. varijable t.d. $X_i \in D_i$, $i = 1, \dots, n$, defin. na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ f-ja.

Tada vrijedi

$$\boxed{\mathbb{E}[\underbrace{g(X_1, \dots, X_n)}_{\text{slučajna varijabla}}] = \sum_{\substack{x_i \in D_i \\ i=1,\dots,n}} g(x_1, \dots, x_n)\, \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n),} \quad (5.6)$$

ukoliko je (i) $g(X_1, \dots, X_n) \geq 0$, ili (ii) red na desnoj strani u (5.6) apsolutno konvergentan.

Dokaz (DZ) [Isto kao dokaz Tm.-a 4.21] Neka je $n = 2$, $D_1 = \{a_1, a_2, \dots\}$, $D_2 = \{b_1, b_2, \dots\}$, te $(X_1, X_2) \in D := D_1 \times D_2$.

Pretp. da je $g(X_1, X_2) \geq 0$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[g(X_1, X_2)] = \sum_{c \in g(D)} c \cdot \mathbb{P}(g(X_1, X_2) = c)$$

$$\overset{(5.13)}{=} \sum_{c \in g(D)} c \cdot \sum_{\substack{(a_i, b_j) \in D: \\ g(a_i, b_j) = c}} \mathbb{P}(X_1 = a_i, X_2 = b_j)$$

$$= \sum_{c \in g(D)} \sum_{g(a_i, b_j) = c} \mathbb{P}(X_1 = a_i, X_2 = b_j) \cdot g(a_i, b_j)$$

$= [\ \forall (a_i, b_j) \in D$, $\exists$ točno jedan $c \in g(D)$ t.d. $g(a_i, b_j) = c\ ]$

$$= \sum_{(a_i, b_j) \in D} g(a_i, b_j)\, \mathbb{P}(X_1 = a_i, X_2 = b_j) \in [0, +\infty].$$

(5.7)

$\Rightarrow$ vrijedi (5.6) u slučaju (i).

Općenito,

$$\mathbb{E}[|g(X_1,X_2)|] \underset{(5.7)}{=} \sum_{(a_i,b_j)\in D} |g(a_i,b_j)|\,\mathbb{P}(X_1=a_i, X_2=b_j) \underset{\text{uz (ii)}}{<} \infty$$

$\Rightarrow$ postoji $\mathbb{E}[g(X_1,X_2)]$ te

$$\mathbb{E}[g(X_1,X_2)] = \sum_{c\in D} c\cdot \mathbb{P}(g(X_1,X_2)=c)$$

$$\underset{\text{analogno kao u (5.7)}}{=\dots} = \sum_{(a_i,b_j)\in D} g(a_i,b_j)\,\mathbb{P}(X_1=a_i, X_2=b_j) \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{Slučaj } n\in\mathbb{N} \text{ za DZ.}}$

$\blacksquare$

<u>Tm. 5.11</u> (i) Ako su $X_1,\dots,X_n$ diskretne sluč. varijable t.d. (i) $X_i\geq 0$, $\forall i=1,\dots,n$, ili (ii) $\mathbb{E}[|X_i|]<\infty$, $\forall i=1,\dots,n$, tada je

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^n \alpha_i X_i\Big] = \sum_{i=1}^n \alpha_i\,\mathbb{E}[X_i], \qquad (5.8)$$

$\forall \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ (tj. $\alpha_i\geq 0$, $\forall i$, u slučaju (i)).

<u>Dokaz.</u> Neka je $n=2$, te $X_1,X_2\geq 0$ i $\alpha_1,\alpha_2\geq 0$.

$$\mathbb{E}[\underbrace{\alpha_1X_1+\alpha_2X_2}_{g(X_1,X_2)\geq 0}] \underset{(5.6)}{=} \sum_{(a_i,b_j)\in D} (\alpha_1 a_i+\alpha_2 b_j)\cdot \overbrace{\mathbb{P}(X_1=a_i, X_2=b_j)}^{=:p_{ij}}$$

$$= \alpha_1\cdot \sum_{(a_i,b_j)\in D} a_i\cdot p_{ij} + \alpha_2 \sum_{(a_i,b_j)\in D} b_j\cdot p_{ij}$$

$$= \alpha_1\cdot \sum_{a_i\in D_1} a_i \underbrace{\sum_{b_j\in D_2} p_{ij}}_{=\mathbb{P}(X_1=a_1, X_2\in D_2)=\mathbb{P}(X_1=a_1)} + \alpha_2 \sum_{b_j\in D_2} b_j \overbrace{\sum_{a_i\in D_1} p_{ij}}^{=\mathbb{P}(X_2=b_j)}$$

$$= \alpha_1\cdot \sum_{a_i\in D_1} a_i\cdot \mathbb{P}(X_1=a_i) + \alpha_2 \sum_{b_j\in D_2} b_j\,\mathbb{P}(X_2=b_j)$$

$$= \alpha_1 \cdot \mathbb{E}[X_1] + \alpha_2 \cdot \mathbb{E}[X_2] \in [0, +\infty) \quad (5.9)$$

Ako je $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$, te $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\,|\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2|\,] \leq \Big[\, |\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2| \leq |\alpha_1|\,|X_1| + |\alpha_2|\,|X_2| \,\Big]$$

$$\leq \mathbb{E}[\,|\alpha_1|\,|X_1| + |\alpha_2|\,|X_2|\,] \quad (5.10)$$

vidi (5.11) dalje

$$\underset{(5.10)}{=} |\alpha_1| \cdot \mathbb{E}[\,|X_1|\,] + |\alpha_2|\, \mathbb{E}[\,|X_2|\,] \overset{\text{uz iii)}}{<} +\infty$$

$\Rightarrow$ postoji $\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2]$, te

$$\mathbb{E}[\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2] \underset{(5.10)}{=} \overset{\text{kao u (5.10)}}{\cdots} = \alpha_1 \mathbb{E}[X_1] + \alpha_2 \mathbb{E}[X_2] \in \mathbb{R}$$

Slučaj $n \in \mathbb{N}$ za DZ (indukcija)

<u>Nap 5.12</u> U (5.8) <u>dopuštamo</u> zavisnost između X_i-eva

<u>Pr. 5.13</u> ("Coupon collector's problem") (!)

Postoji n različitih kupona, te izvlačimo kupone na slučajan način (s vraćanjem) sve dok ne izvučemo sve kupone barem po jedan put. Ako je T ukupan broj izvlačenja, odredite $\boxed{\mathbb{E}[T]}$.

Rj: Neka je

$T_1 := 1$,

$T_2 :=$ dodatni broj izvlačenja do kupona koji je različit od onog u T_1-om izvlačenju,

$T_3 :=$ ——— " ——— od onih u T_1-om i

i T_2-om izvlačenju, itd.

npr. $\underline{k_1}$ $\underline{k_1}$ $\underline{k_2}$ $\underline{k_1}$ $\underline{k_1}$ $\underline{k_2}$ $\underline{k_3}$ itd.

izvuč. $\underset{T_1}{1.}$ $\underbrace{2.\ 3.}_{T_2=2}$ $\underbrace{4.\ 5.\ 6.\ 7.}_{T_3=4}$

$\Rightarrow$ Imamo da je $T = T_1 + \cdots + T_n$, te

$$\boxed{T_i \sim G(p_i)}, \text{ pri čemu je} \qquad (5.10)$$

$$\boxed{p_i = \frac{n-(i-1)}{n} = \frac{n-i+1}{n}}, \; i = 1, \ldots, n$$

jer smo već izvukli $(i-1)$ različitih kupona!

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[T]} = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{n} T_i\Big] \underset{T_i \geq 0,\ \forall i}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[T_i]}_{=\frac{1}{p_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = \boxed{n \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}}$$

$$\Big[= O\big(n \log(n)\big) \Big]$$

$$\Big[\text{za } n=50,\ \mathbb{E}[T] = 225 \Big]$$ ∎

[Nap.] (5.10) se može formalno pokazati, te još dodatno da su $T_1, \ldots, T_n$ nezavisne!

Tm. 5.14 (!) Ako su X i Y diskretne slučajne varijable t.d. $0 \leq X \leq Y$, tada vrijedi

$$(0 \leq)\ \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y] \qquad (5.11) \qquad [\text{"monotonost"}]$$

(obje strane mogu biti $+\infty$)

Dokaz. Pretp. $X \in \{a_i : i \in I\}$, $Y \in \{b_j : j \in J\}$, te

$$p_{ij} := \mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j), \quad i \in I, j \in J.$$

$$\mathbb{E}[X] \underset{X \geq 0}{=} \sum_{i \in I} a_i \underbrace{\mathbb{P}(X = i)}_{= \sum_{j \in J} \underbrace{\mathbb{P}(X = a_i, Y = b_j)}_{p_{ij}}}$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i p_{ij} \leq \Big[p_{ij} > 0 \overset{X \leq Y}{\Rightarrow} b_j \geq a_i, \text{ jer inače}$$

$$\mathbb{P}(Y < X) \geq p_{ij} > 0 \Big]$$

$$\leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} b_j p_{ij} \underset{[\text{sve} \geq 0]}{=} \sum_{j \in J} b_j \underbrace{\sum_{i \in I} p_{ij}}_{= \mathbb{P}(Y = b_j)} = \mathbb{E}[Y]$$

∎

Prop. 5.15 Neka su X i Y diskretne sluč. varijable, i $m \in \mathbb{N}$.

(a) Ako je $\mathbb{E}[|X|^m] < \infty$, tada je i

$$\mathbb{E}[|X|^n] < \infty, \quad \forall n \leq m.$$

tzv. n-ti moment od X

(b) Ako je $\mathbb{E}[|X|^m] < \infty$ i $\mathbb{E}[|Y|^m] < \infty$, tada je i

$$\mathbb{E}[|X + Y|^m] < \infty.$$

Dokaz.

(a) Neka je $n \leq m$. Za sve $z \in \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ |z| \geq 1 \Rightarrow |z|^n \leq |z|^m \\ \bullet\ |z| \leq 1 \Rightarrow |z|^n \leq 1 \end{array}\right\} \forall z \in \mathbb{R}, \quad |z|^n \leq |z|^m + 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|X|^n] \overset{(5.11)}{\underset{|x|^n \leq |x|^m + 1}{\leq}} \mathbb{E}[|X|^m + 1] = \underbrace{\mathbb{E}[|X|^m]}_{< \infty} + 1 < \infty.$$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y|^m \le (|x| + |y|)^m \le (2\max\{|x|, |y|\})^m$

$$= 2^m \max\{|x|^m, |y|^m\}$$

$$\le 2^m (|x|^m + |y|^m)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[|X+Y|^m] \overset{(5.11)}{\le} \mathbb{E}[2^m(|X|^m + |Y|^m)]$$

$$= 2^m \underbrace{\mathbb{E}[|X|^m]}_{<\infty} + 2^m \underbrace{\mathbb{E}[|Y|^m]}_{<\infty} < \infty$$