Poissonova razdioba

Pr. 4.27 Slučajna varijabla ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\boxed{\lambda > 0}$ (oznaka $X \sim P(\lambda)$) ako je $\boxed{X \in \mathbb{N}_0}$ te

$$P(X = k) = \boxed{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \, . \qquad (4.17)$$

Tm. 4.28 (Zakon rijetkih događaja)

Neka je za sve $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_n \sim B(n, p_n)}$, pri čemu vrijedi

$$\lambda := \lim_{n \to \infty} \underbrace{n \cdot p_n}_{\mathbb{E}[X_n]} \in \langle 0, +\infty \rangle . \qquad (4.18)$$

Tada za sve $\boxed{k \in \mathbb{N}_0}$,

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n \to \infty]{} P(X = k), \qquad (4.19)$$

za $\boxed{X \sim P(\lambda)}$.

Nap. (4.18) $\Rightarrow$ $\boxed{p_n \xrightarrow{n \to \infty} 0}$ $\longrightarrow$ "rijetki događaji"

Dokaz

$q_n := 1 - p_n$

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k q_n^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p_n^k q_n^{n-k} \cdot \frac{n^k}{n^k}$$

$$= \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n}}_{=: a_n} \cdot \underbrace{\frac{(np_n)^k}{k!}}_{=: b_n} \cdot \underbrace{(1 - p_n)^{n-k}}_{=: c_n}$$

- $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{n\text{-puta}} = \boxed{1}$

- $b_n \xrightarrow[(4.18)]{n\to\infty} \boxed{\dfrac{\lambda^k}{k!}}$

- $c_n = \left(1 - \dfrac{np_n}{n}\right)^n \cdot (1-p_n)^{-k}$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lim\limits_{n\to\infty} np_n} \cdot 1^{-k} = \boxed{e^{-\lambda}}$$

$\forall a \in \mathbb{R} \quad \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-a}, \quad p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

[Može se pokazati da to zaista vrijedi.]

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = 1 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X = k) \quad \blacksquare$$

Tm. 4.28 $\Rightarrow$ za "velike" $n$ i "male" $p$, ako je

$X \sim B(n, p)$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\} \qquad (4.20)$$

[Vrijedi i tzv. Le Camov teorem koji daje točne ograde na ovu aproksimaciju!]

Pr. 4.29 Osiguravajuća kuća ima 400 osiguranika, a svaki će, nezavisno od ostalih, prijaviti štetu s vjerojatnosti 0.01. Ako je $X$ ukupan broj prijavljenih šteta, približno odredite $\mathbb{P}(X \geq 3)$.

Rj: $X \sim B(\overset{n}{400}, \overset{p}{0.01})$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=2)$$

$X \in \{0,1,\dots,n\}$

$$\underset{(4.20)}{\approx} 1 - e^{-4} \cdot \left( \frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} \right) \approx \boxed{0.7618.}$$

uz $np = 400 \cdot 0.01 = \boxed{4}$

Stvarna vrijednost je $\mathbb{P}(X \geq 3) = \boxed{0.7633681.}$ ∎

Primjer 4.29 Ako je $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, tada je

$$\boxed{\mathbb{E}[X] = \lambda}.$$

Dokaz:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=\cancel{0}\,1}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k} \cdot \frac{\lambda^k}{\cancel{k!}_{(k-1)!}} e^{-\lambda}$$

$X \geq 0$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{= e^{\lambda}} = \lambda \cdot \cancel{e^{-\lambda}} \cdot \cancel{e^{\lambda}} = \boxed{\lambda}$$ ∎

Pr. 4.30 $I_n := \{1, 2, \dots, n\}$

Pr. 3.2 $\rightarrow$ $\mathbb{P}(\overbrace{\{\text{slučajna perm. skupa } I_n \text{ nema fiksnu točku}\}}^{=: A_n})$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-1} \leftarrow \mathbb{P}(X=0) \text{ za}$$

$X \sim \mathcal{P}(1)$.

Uočimo, ako defin. događaje

$$A_i^{(n)} = \{ i \text{ je fix. točka odabrane permutacije od } I_n \}, \quad i=1,\dots,n$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{1}_{A_i^{(n)}} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i \text{ fiksna točka permutacije} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

te

$$\boxed{X_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i^{(n)}} = \text{ukupan broj fiksnih točaka odabrane permutacije}}$$

Uočimo, $\mathbb{P}(A_i^{(n)}) = \frac{1}{n} =: p_n, \ \forall i=1,\dots,n$, ali $X_n$ nema $B(n, p_n)$ razdiobu jer događaji $A_i^{(n)}$ nisu nezavisni.

Ipak, imamo

$$\mathbb{E}[X_n] \underset{(4.15)}{=} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i^{(n)}}]}_{=\mathbb{P}(A_i^{(n)}) = p_n, \forall i} = n \cdot p_n = \overset{\forall n \in \mathbb{N}}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 =: \lambda,$$

te

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \mathbb{P}(A_n) \xrightarrow[(*)]{n\to\infty} e^{-1} = e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X=0)$$

za $X \sim P(\lambda)$.

(usjedi zapravo i (4.105)!)

∎