3. Prebrojavanje

- proći samostalno Poglavlje 3 u skripti Sandrić, Vondraček (bez 3.5); po potrebi, pogledati skripte s predavanja i vježbi s kolegija Diskretna matematika.

Ukratko:

Ako su svi elem. dog. $\omega \in \Omega$ jednako vjerojatni (i $|\Omega| < \infty$),

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \leftarrow \text{prebrojavanje!}, \quad A \in \mathcal{F}$$

Osnovni principi su:

- \# nizova duljine r koristeći elemente iz skupa od n elemenata (s dopuštenim ponavljanjem) je

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r\text{-puta}} = n^r$$

[npr. bacamo 3 kocke $\Rightarrow |\Omega| = 6^3$]

- ______ || ______ (bez ponavljanja) je

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (r \leq n)$$

[npr. 3 kuglice iz kutije s 10 kuglica $\Rightarrow |\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$]

u slučaju $r = n$, takve nizove zovemo permutacije (tog skupa), a njih ukupno ima $n!$.

• # izbora r elemenata iz skupa od n elemenata (nije bitan poredak) je

$$\binom{n}{r} := \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (r \le n)$$

Uočimo,

$$\binom{n}{r}\cdot r! = \frac{n!}{(n-r)!}$$ = # nizova duljine r bez ponavljanja, tj. kada je <u>bitan poredak</u>

• # podskupova (bilo koje veličine) skupa od n elemenata je

[1. element je ili nije u podskupu]

$$\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n} = 2^n.$$

• npr. imamo 2B, 3C i 5Z kuglica (dakle, ukupno $n=10$ kuglica), # permutacija ovih kuglica (s tim da ne razlikujemo kuglice <u>iste</u> boje) je

$$\frac{10!}{2!\,3!\,5!} \quad \left(= M_{10}(2,3,5)\right)$$

Općenito, # permutacija skupa od n elemenata koji se sastoji od r različitih tipova uz

n_i = #elemenata tipa i, $i=1,\dots,r$ $\quad \left(\sum_{i=1}^{r} n_i = n\right)$

je

$$M_n(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{r} n_i!}.$$

(ako $r=n \Rightarrow n_i = 1, \forall i$ te $M_n(\underbrace{1,\dots,1}_{n}) = n!$)

Nap. 1

(i) Za korištenje metoda prebrojavanja, bitno je jasno definirati što je Ω, te provjeriti jesu li svi $\omega \in \Omega$ jednako vjerojatni.

(ii) Izbor Ω u (i) nije jedinstven!

Primjer 3.1 Imamo špil od 52 karte (4 boje × 13 jačina).

(a) Promiješamo špil, $\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{prva karta je jačine as}\}}_{A:=}) = ?$

Rj. (1°) $\Omega = \{$ svi poretci špila $\}$ = [označimo karte brojevima $1, 2, \ldots, 52$]

$= \{$ sve permutacije skupa $\{1, 2, \ldots, 52\}\}$

$\Rightarrow$ svi $\omega \in \Omega$ jednako vjerojatni te $|\Omega| = 52!$

$\Rightarrow A = \{$ permutacije t.d. je prvi element jedan od 4 asa $\}$

$\rightarrow |A| = 51! \cdot 4$ [kada biramo boju za as]

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4 \cdot 51!}{52!} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(2°) $\Omega = \{$ sve moguće jačine prve karte $\}$

$= \{1, 2, \ldots, 13\}$

Opet Laplaceov model [4 boje za svaku jačinu],

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|\{\overset{\text{as}}{1}\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{13}$$

(b) Podijelimo dečkima 13 karata svakom od 4 igrača.

$$\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{svaki igrač je dobio asa}\}}_{=:B}) = ?$$

Rj. 1° Vjerojatnost ostaje ista ako prvih 13 karata (promiješanog špila) ide 1. igraču, drugih 13 2. igraču, itd.

$\Rightarrow \quad \Omega = \{$ sve permutacije od $\{1,2,\dots,52\}\}$

redni broj karte $\rightarrow \underbrace{1.\ \dots\ 13.}_{1.}\ \underbrace{14.\ \dots\ 26.}_{2.}\ \underbrace{27.\ \dots\ 39.}_{3.}\ \underbrace{40.\ \dots\ 52.}_{4.}$

igrač $\rightarrow$

$B = \{$ permutacije t.d. u svakom od blokova po jedan as $\}$

ostale karte

$$\Rightarrow \quad |B| = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 4! \cdot 48!$$

pozicija za as u 1. bloku — -||- 2. bloku — itd.

raspored 4 asa na odabrane pozicije

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{13^4 \cdot 4! \cdot 48!}{52!}}$$

2° $\Omega = \{$ sve moguće kombinacije za 4 pozicije za aseve $\}$

$= \{$ svi 4-člani podskupovi od $\{1,2,\dots,52\}\}$

Zbog simetrije, svi $\omega \in \Omega$ su jednako vjerojatni te

$$|\Omega| = \binom{52}{4}.$$

$B = \{$ po jedna pozicija za as u svakom bloku $\}$

$$\Rightarrow \quad |B| = \binom{13}{1}^4 = 13^4 \quad \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(B) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}}}$$ (isto kao gore!)

Primjer 3.2 | Permutacija π skupa $\{1,2,\dots,n\}$ ima fiksnu točku u i ako je $\pi(i) = i$ ($\pi(i)$ je element koji se u permutaciji nalazi na mjestu i). Ako slučajno odaberemo permutaciju skupa $\{1,\dots,n\}$,

(i) odredite $p_n := \mathbb{P}(\underbrace{\{\text{permutacija nema fiksnu točku}\}}_{A_n})$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

(ii) odredite $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Rj: (FUI) $\Omega_n = \{\pi : \pi \text{ je permutacija skupa } \{1,2,\dots,n\}\}$ $\to \boxed{|\Omega_n| = n!}$

Za $i = 1,\dots,n$, stavimo

$$A_i^{(n)} = \{\pi \in \Omega_n : \pi(i) = i\}$$

$$\Rightarrow A_n^c = \{\text{permutacija ima fiksnu točku}\} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^{(n)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_n^c) \underset{\text{FUI}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^{(n)}) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}) + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{(n)}\Big).$$

Jednostavnije rješenje?

Imamo

$$\mathbb{P}(A_i^{(n)}) = \frac{(n-1)! \cdot 1}{n!} = \frac{1}{n}, \quad \forall i$$

$$\mathbb{P}(A_i^{(n)} \cap A_j^{(n)}) = \frac{(n-2)! \cdot 1 \cdot 1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall i<j$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}(A_{i_1}^{(n)} \cap \dots \cap A_{i_k}^{(n)}) = \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}, \quad \forall i_1 < \dots < i_k$$

$$\vdots$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^{(n)}\Big) = \frac{1}{n!}.$$

Gledamo samo mogućnosti za $\pi(i) \to \Omega_i^{(n)} = \{1,\dots,n\}$, opet Laplaceov model!

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_n^c) = \binom{n}{1} \cdot \mathbb{P}(A_1^{(n)}) - \binom{n}{2} \mathbb{P}(A_1^{(n)} \cap A_2^{(n)}) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1^{(n)} \cap \cdots \cap A_n^{(n)})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{P}(A_1^{(n)} \cap \cdots \cap A_k^{(n)}) \cdot (-1)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{= \frac{\cancel{n!}}{k!\,\cancel{(n-k)!}}} \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}} (-1)^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (-1)^{k-1} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$$

$$\Rightarrow p_n = \mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}(A_n^c) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)$ (Taylorov red)

(ii) Imamo

$$p_n \xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} \approx 0.3679 \quad \blacksquare$$

[Poissonova aproksimacija! za zavisne događaje!]

Ostali zadaci na vježbama!