Nezavisnost

Ako je $\mathbb{P}(B) > 0$ i

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A), \qquad (2.12)$$

tj. to što se B dogodio ne mijenja vjerojatnost od A, kažemo da su događaji A i B nezavisni. To je ekvivalentno sa sljedećom defin.

$\boxed{\text{Def. } 2.10}$

(i) $A, B \in \mathcal{F}$ su nezavisni ako je

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B). \qquad (2.13)$$

(ii) $A, B \in \mathcal{F}$ su uvjetno nezavisni uz dano $C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$, ako vrijedi

$$\mathbb{P}(A \cap B | C) = \mathbb{P}(A|C)\,\mathbb{P}(B|C), \qquad (2.14)$$

tj. ako su nezavisni s obzirom na $\mathbb{P}_C$. ∎

DZ (i) Ako je $\mathbb{P}(B) > 0$, (2.12) i (2.13) su ekvivalentni.

(ii) Ako je $\mathbb{P}(B) = 0$ ili 1, A i B su nezavisni $\forall A \in \mathcal{F}$.

(iii) Ako je $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$ (tj. $\mathbb{P}_C(B) > 0$), (2.14) je ekvivalentno s

$$\mathbb{P}(A | B \cap C) = \mathbb{P}(A|C) \qquad (2.15).$$

(iv) Ako je $\mathbb{P}(B \cap C) = 0$ ($= \mathbb{P}_C(B)$), vrijedi (2.14) $\forall A \in \mathcal{F}$.

(Uputa: (iii) i (iv) slijede direktno iz (i) i (ii) kada se primjene na $\mathbb{P}_C$!) ∎

Primjer 2.11 | Bacamo dvije kocke te neka je

$$A = \{\text{na prvoj kocki } 3\}$$

$$B = \{\text{na drugoj kocki } 4\}$$

$$C = \{\text{zbroj je } 7\}$$

(a) A i B su nezavisni. [inače naša definicija nije dobra]

Dokaz. | $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Napomena | U nastavku, u ovom i sličnim slučajevima, koristimo "činjenicu" da su ovi događaji nezavisni te to koristimo kao alat za računanje $\mathbb{P}(A \cap B)$ i slično. ∎

(b) A i C nezavisni, B i C nezavisni. (Intuicija?)

$$C = \{(i, 7-i) : i = 1, \dots, 6\}, \quad A \cap C = \{(3,4)\}$$

Laplaceov model $\Rightarrow$ $\mathbb{P}(A \mid C) = \dfrac{|A \cap C|}{|C|} = \dfrac{1}{6} = \mathbb{P}(A)$

Analogno za B i C.

npr. ako $\mathbb{P}(A) \in (0,1)$, A i A^c su zavisni jer $\mathbb{P}(A^c \mid A) = 0 \neq \mathbb{P}$ tj. ako se A dogodi A^c se sigurno nije dog.

Napomena | Ne smije se miješati disjunktnost i nezavisnost: $A, B \in \mathcal{F}$ t.d. $A \cap B = \emptyset$ su nezavisni akko $\mathbb{P}(A) = 0$ ili $\mathbb{P}(B) = 0$ (DZ). ∎

(c) Uz dano C, A i B nisu nezavisni (kažemo da su "zavisni").

Dokaz. | Intuitivno, ako je zbroj 7, ishod na jednoj kocki ipak nešto govori o ishodu na drugoj kocki. Formalno,

$$\mathbb{P}(A \mid B \cap C) = [\text{zbroj } 7 \text{ i } 4 \text{ na 2. kocki} \Rightarrow 3 \text{ na 1. kocki}] = 1 \left(= \frac{|A \cap B \cap C|}{|B \cap C|} = \frac{|\{(3,4)\}|}{|\{(3,4)\}|} = 1 \right),$$

$$\mathbb{P}(A \mid C) \underset{(b)}{=} \frac{1}{6} \neq 1. \ ∎$$

Primjer 2.12 | Imamo 2 kutije: u prvoj je 9 bijelih i 1 crna, a u drugoj 3 B i 7 C kuglica. Slučajno izaberemo jednu od kutija te iz nje izvučemo dvije kuglice, jednu za drugom, s vraćanjem.

$B_i = \{ i\text{-ta izvučena kuglica je B} \}, \ i = 1,2$

$A = \{ \text{u početku je izabrana 1. kutija} \}$

(a) B_1 i B_2 su uvjetno nezavisni uz dano A. (Jasno!)

Dokaz | $P(B_1 \cap B_2 \mid A) = [\text{izvlačimo 2 kuglice iz 1. kutije}]$

$$= \frac{9 \cdot 9}{10 \cdot 10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = P(B_1|A) P(B_2|A)$$ ∎

(b) B_1 i B_2 su zavisni.

Dokaz | Intuicija? $\longrightarrow \underset{\text{u 1. kutiji je više B kuglica}}{P(A \mid B_1) > P(A)} \Rightarrow P(B_2|B_1) > P(B_2)$

Zaista, $\cdot \ P(A|B_1) = \frac{P(B_1|A)P(A)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A)\cancel{P(A)}^{=\frac{1}{2}}}{P(B_1|A)\cancel{P(A)}_{=\frac{1}{2}} + P(B_1|A^c)\cancel{P(A^c)}_{=\frac{1}{2}}}$

$$= \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \left(> \frac{1}{2} = P(A) \right)$$

$\cdot \ P(B_2) = P(B_2|A)P(A) + P(B_2|A^c)P(A^c)$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

$\cdot \ P(B_2|B_1) \overset{FPV}{=} \underbrace{P(B_2|B_1 \cap A)}_{\substack{= P(B_2|A) = \frac{9}{10} \\ (a) + (2.15)}} \underbrace{P(A|B_1)}_{\frac{3}{4}} + \underbrace{P(B_2|B_1 \cap A^c)}_{\substack{= P(B_2|A^c) = \frac{3}{10} \\ DZ}} \underbrace{P(A^c|B_1)}_{1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}}$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} > P(B_2)$$

$\Rightarrow B_1$ i B_2 zavisni ∎

Dakle, nezavisnost općenito ne povlači uvjetnu nezavisnost, i obratno!

Napomena 2.13 | Ako su $A, B \in \mathcal{F}$ nezavisni, nezavisni su: A^c i B, A i B^c, A^c i B^c.

Dokaz |
$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A))$$
$$= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^c) \checkmark$$

ili

$$\mathbb{P}(A^c | B) = 1 - \mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A^c), \checkmark$$

ako $\mathbb{P}(B) > 0$ (inače je trivijalno).

itd. ■

Definicija 2.14 | Familija događaja $(A_i)_{i \in I}$ iz $\mathcal{F}$ (I je proizvoljan skup) je: (i) nezavisna ako vrijedi

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in F} A_i\Big) = \prod_{i \in F} \mathbb{P}(A_i), \qquad (2.15)$$

za sve konačne podskupove $F \subseteq I$;

(ii) uvjetno nezavisna uz dano $C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) > 0$, ako je nezavisna u odnosu na $\mathbb{P}_C$;

(iii) u parovima nezavisna ako su A_i i A_j nezavisni za sve $i, j \in I$, $i \neq j$. ■

Napomena 2.15 | Ako je $(A_i)_{i \in I}$ nezavisna familija događaja, vrijedi

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in F_1} A_i \,\Big|\, \bigcap_{i \in F_2} A_i\Big) = \prod_{i \in F_1} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in F_1} A_i\Big), \qquad (2.16)$$

za sve konačne $F_1, F_2 \subseteq I$ t.d. $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ i $\mathbb{P}(\bigcap_{i \in F_2} A_i) > 0$.

DZ ■

Primjer 2.16) Ako su A, B, C kao u Primjeru 2.11,

[Dvije kocke, $A=\{$na prvoj $3\}$, $B=\{$na drugoj $4\}$, $C=\{$zbroj je $7\}$]

pokazali smo da su oni u parovima nezavisni. Ipak, nisu nezavisni jer

$$\mathbb{P}(A \mid B\cap C) = 1 \neq \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \qquad (\lightning \text{ s } (2.16))$$

ili iz

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(\{(3,4)\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\underbrace{\frac{6}{36}}_{=\frac{1}{6}} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \qquad \blacksquare$$

Nap. 2.17) Ako je familija događaja $(A_i)_{i\in I}$ nezavisna, nezavisna je i familija $(B_i)_{i\in I}$ pri čemu je za sve $i\in I$, $B_i = A_i$ ili A_i^c.

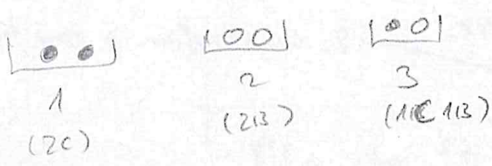
(bez dokaza) $\blacksquare$

$\longrightarrow$ Primjer 2.18 – iza Pr. 2.20

"Paradoksi"

Primjer 2.19) (Bertrand's box paradox)

Imamo 3 kutije s kuglicama:



Na slučajan način prvo izaberemo kutiju, a zatim jednu kuglicu iz te kutije. Ako je izvučena kuglica C, kolika je vjerojatnost da je i druga kuglica iz te kutije C?

Rj: Neka je

$$C_i := \{i\text{-ta izvučena kuglica je } C\},\ i=1,2$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(C_2 \mid C_1) = ?$

Uočimo, $\mathbb{P}(C_2 \mid C_1) = \mathbb{P}(\underbrace{C_2 \cap C_1}_{=\{\text{izabrana 1. kutija na početku}\} =: H_1} \mid C_1) = \mathbb{P}(H_1 \mid C_1)$

1° Ako vrijedi C_1, u startu smo izabrali 1. ili 3. kutiju, pa je $\mathbb{P}(H_1 \mid C_1) = \frac{1}{2}$. $\longrightarrow$ NE!

2° $$\mathbb{P}(H_1 \mid C_1) \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}(C_1 \mid H_1)\,\mathbb{P}(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(C_1 \mid H_i)\,\mathbb{P}(H_i)} \overset{\mathbb{P}(H_i)=\frac{1}{3},\ \forall i}{=} \frac{\mathbb{P}(C_1 \mid H_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(C_1 \mid H_i)}$$

$$= \frac{1}{1 + 0 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Slično, $\mathbb{P}(H_2 \mid C_1) = 0$, $\mathbb{P}(H_3 \mid C_1) = \frac{1}{3}$

Uočimo, $\mathbb{P}(H_1 \mid C_1) = 2 \cdot \mathbb{P}(H_3 \mid C_1)$ [jer sve kutije imaju jednako kuglica, a 1. ima 2 puta više C od 3.]

jer boje

3° Za svaku od 6 kuglica, vjerojatnost da bude izvučena (u prvom izvlačenju) je

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

ta kutija

jedna od dvije kuglice

2. crna kuglica iz prve kutije

$\Rightarrow$ Uz $\Omega = \{C^1_1, C^1_2, C^3_1, B^2_1, B^2_2, B^3_1\}$

imamo Laplaceov model, te

$\Rightarrow H_1 = \{C^1_1, C^1_2\}$, $C_1 = \{C^1_1, C^1_2, C^3_1\}$, $H_1 \cap C_1 = H_1$

"brže - brojanje"

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_1 \mid C_1) = \frac{|H_1 \cap C_1|}{|C_1|} = \frac{|H_1|}{|C_1|} = \frac{2}{3}$$

Također $$\mathbb{P}(H_3 \mid C_1) = \frac{|\{C^3_1\}|}{|C_1|} = \frac{1}{3}$$

jer 1. kutija ima 2 puta više C od 3.

Primjer 2.20 (Monty Hall)

Imate izbor od 3 vrata — iza jednih je auto, iza drugih 2 su koze. Izabrali ste prva vrata, nakon toga je voditelj otvorio treća vrata i iza njih je bila koza. Voditelj vam nudi da umjesto 1. izaberete 2. vrata. Trebate li promijeniti vrata?

Rj. Kao što je često slučaj sa "paradoksima", problem je što problem nije jednoznačno zadan, tj. postoji više rješenja.

→ Neka je

$$H_i := \{\text{izabrali ste } i\text{-ta vrata}\}, \quad i=1,2,3$$

$$K := \{\text{voditelj otvara 3. vrata, iza njih je nalazi koza}\}$$

$$= \{ \text{———} \ '' \ \text{———} \} \cap A_3^c =: V_3 \cap A_3^c$$

$$A_i := \{\text{auto se nalazi iza } i\text{-tih vrata}\}, \quad i=1,2,3$$

Tražimo

$$p_i := \mathbb{P}(A_i \mid H_1 \cap K) = \mathbb{P}_{H_1}(A_i \mid K) =: \mathbb{P}_1(A_i \mid K), \quad i=1,2,3,$$

tj. zanima nas je li $p_2 > p_1$. (Očito je $p_3 = 0$).

Bayes ⇒ (za $\mathbb{P}_{H_1}$)

$$p_2 = \frac{\mathbb{P}_1(K \mid A_2)\cancel{\mathbb{P}_1(A_2)}}{\sum_{j=1}^{3} \mathbb{P}_1(K \mid A_j)\cancel{\mathbb{P}_1(A_j)}} = \Big[\text{trebali bi uzeti } \mathbb{P}_1(A_j) = \tfrac{1}{3}, \ \forall j=1,2,3, \text{ tj. nemate nikakvu info. o tome gdje je auto.}$$

$$= \frac{\mathbb{P}_1(K \mid A_2)}{\mathbb{P}_1(K \mid A_1) + \mathbb{P}_1(K \mid A_2)} = \frac{\mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2)}{\mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) + \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2)}.$$

$\mathbb{P}_1(K \mid A_3) = 0$

$K = V_3 \cap A_3^c$ te $A_1 \subseteq A_3^c$, $A_2 \subseteq A_3^c$

$\Rightarrow$ rješenje ovisi o $\mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1)$ i $\mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2)$, tj. o "protokolu" (ili proceduri)

na temelju kojeg voditelj odlučuje koja će vrata otvoriti

(te hoće li ih uopće otvoriti !). Drugim riječima,

mi ne znamo sve postavke ovog sluč. pokusa, već samo

vidimo jedan njegov ishod!

(1°) Ako će voditelj (i) uvijek otvoriti jedna od preostala dvoja vrata iza kojih je koza, te (ii) ako ima izbor između 2 koze, izabrat će jednu slučajno,

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} > \frac{1}{3} = \mathbb{P}_1 .$$

[Dakle, u tom slučaju treba promijeniti vrata.]

(2°) Voditelj slučajno otvara jedna od preostala dvoja vrata

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_2 = \frac{1}{2} = \mathbb{P}_1$$

[Ništa ne dobivate ako promijenite vrata.]

(3°) Ako je auto iza vrata koja ste odabrali, voditelj ne otvara nijedna vrata, a ako nije, otvara ona iza kojih je koza.

$$\Rightarrow \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = 0, \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_2 = 1 > 0 = \mathbb{P}_1$$

[Dakle, pobijedili ste voditelja :)]

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap P_n)$$

$$= [\text{nezavisnost igara}] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(D_1) \cdots \mathbb{P}(D_{n-1}) \mathbb{P}(P_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} \cdot p \underset{r<1}{=} p \cdot \frac{1}{\underbrace{1-r}_{=p+q}} = \frac{p}{p+q}.$$

(2°) Uvjetovanjem na rezultat prve igre (FPV)

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(A) = p + r \cdot \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{p}{1-r}.$$

DZ (vidi Primjer. 2.4)

(3°) Neka je

$H_n = \{$prva pobjeda (bilo kojeg igrača) dogodila se u n-toj igri$\}$, $n \in \mathbb{N}$

Imamo $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ te $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$

$$\underset{FPV}{\Rightarrow} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \mid H_n) \mathbb{P}(H_n)$$

Vrijedi,

$$\mathbb{P}(A \mid H_n) = \mathbb{P}(\overbrace{A \cap H_n}^{=A_n = P_n \cap H_n} \mid H_n) = \mathbb{P}(P_n \cap H_n \mid H_n) = \boxed{\mathbb{P}(P_n \mid H_n)}$$

Nadalje,

$$\mathbb{P}(P_n \mid H_n) = \mathbb{P}(P_n \mid D_1 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap D_n^c) \overset{(*)}{=} \mathbb{P}(P_n \mid D_n^c) \quad (!)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(P_n \cap D_n^c)}{\mathbb{P}(D_n^c)} = \frac{\mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(D_n^c)} = \frac{p}{1-r}, \quad \forall n \, !$$

$P_n \subseteq D_n^c = \{$netko je pobijedio u n-toj igri$\}$

(*)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(P_n \mid D_1 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap D_n^c) = \frac{\mathbb{P}(P_n \cap D_1 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap D_n^c)}{\mathbb{P}(D_1 \cap \cdots \cap D_{n-1} \cap D_n^c)}$$

$$= [\underline{P_n \cap D_n^c = P_n} + \text{nezavisnost igara}]$$

$$= \frac{\mathbb{P}(P_n) \cdot \cancel{\mathbb{P}(D_1) \cdots \mathbb{P}(D_{n-1})}}{\cancel{\mathbb{P}(D_1) \cdots \mathbb{P}(D_{n-1})} \mathbb{P}(D_n^c)} = \frac{\mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(D_n^c)} = \frac{\mathbb{P}(P_n \cap D_n^c)}{\mathbb{P}(D_n^c)}$$

$$= \mathbb{P}(P_n \mid D_n^c).$$

(4°) Ako ste odabrali vrata iza kojih je koza, voditelj otvara ta vrata. U suprotnom, otvara slučajno jedna od preostalih vrata.

$\Rightarrow \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}_1(V_3 \mid A_2) = 0$

$\Rightarrow \quad p_2 = \dfrac{0}{\frac{1}{2}+0} = 0 < 1 = p_1.$

$\longrightarrow$ Postoji $+\infty$ različitih protokola. ∎

prije "Paradoksa"

Primjer 2.18 |
Dva igrača, A i B, igraju niz nezavisnih igara, pri čemu svaka igru završava:

- pobjedom igrača A s vjer. p
- — " — B — " — q
- neriješeno s vjer. r,

za neke $0 < p, q, r < 1$ t.d. $p+q+r=1$.

$\longrightarrow \mathbb{P}(\underbrace{\{A \text{ će prvi pobijediti}\}}_{=:A}) = ?$

R. (1°) Pretp. da se igre nastavljaju i nakon prve pobjede nekog od igrača, te neka je za $n \in \mathbb{N}$,

$A_n = \{A$ je prvi pobijedio i to u n-toj igri$\}$,

$P_n = \{A$ je pobijedio u n-toj igri$\}$

$D_n = \{$u n-toj igri je bilo neriješeno$\}$

$\Rightarrow \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ← u parovima disj.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A \mid H_n)}_{= \frac{p}{1-r}\ (\forall n)} \mathbb{P}(H_n) = \frac{p}{1-r} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(H_n)$$

$$= \frac{p}{1-r} \cdot \underbrace{\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\Big)}_{=\{\text{netko će prije pobijediti}\}} = \frac{p}{1-r}.$$

$$= 1 \quad (\text{vidi Murphyjev zakon})$$

DZ ili lemu 2.17 kasnije

2. Borel - Cantellijeva lema

Lema 2.17 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjer. prostor te $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz **nezavisnih** događaja iz $\mathcal{F}$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = +\infty, \qquad (*)$$

tada je

$$\mathbb{P}(A_n \text{ b.m.p.}) = \mathbb{P}\big(\limsup_n A_n\big) = 1.$$

Dokaz.

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{=: B_n}, \leftarrow \text{ nerastući niz!}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1 \iff \mathbb{P}(B_n) = 1, \ \forall n$$

$1 \geq \mathbb{P}(B_n) \geq \mathbb{P}(B_{n+1}), \forall n$

$$\iff \mathbb{P}(B_n^c) = 0, \ \forall n$$

$$B_n^c = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c = \bigcap_{m=n}^{\infty} \underbrace{\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big)}_{=: C_m} \to$$

$(C_m)_{m\geq n}$ je nerastući niz događaja

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B_n^c) = \downarrow\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(C_m) = \downarrow\lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big)$$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\Big) = \Big[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Nap. 2.17.}}}{\underline{\underline{\text{nezavisnost}}}}\Big] = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k^c)$$

$$= \prod_{k=n}^{m} (1-\mathbb{P}(A_k)) \leq \Big[\forall x\geq 0,\ 1-x\leq e^{-x}\Big]$$

$$\leq \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k)}$$

Iz

$$\lim_{m\to+\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k)} = \Big[\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n}^{m}\mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(A_k) \overset{(*)}{=} +\infty\Big]$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_n^c) = 0,\ \forall n \qquad \blacksquare$$

<u>Primjer</u> U Primjeru 2.18, imali smo

$$D_n^c = \{\text{netko je pobijedio u } n\text{-toj igri}\},\ n\in\mathbb{N},$$

te da su $(D_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>nezavisni</u> i t.d. je $\mathbb{P}(D_n^c) = 1-r > 0\ (\forall n)$.

$$\uparrow \; r<1$$

Iz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(D_n^c) = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{(1-r)}_{>0,\forall n} = +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(\{\text{b.m.p. će netko pobijediti}\}) = \mathbb{P}(D_n^c \text{ b.m.p.}) = 1.$$

2. BC lema

Specijalno,

$$\mathbb{P}(\{\text{barem 1 put će netko pobijediti}\})$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^c\right) \geq \mathbb{P}(D_n^c \text{ b.m.p.}) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_n D_n^c\right) = 1},$$

iz $\mathbb{P}\left(\bigcup_n D_n^c\right) \leq 1$

i to bez obzira koliko mali je $1-r = \mathbb{P}(D_n^c)$ (ali mora biti $1-r > 0$). Ipak, ako je $1-r \approx 0$ (ali $1-r > 0$), s velikom vjerojatnosti trebat ćemo odigrati jako veliki broj igara do barem jedne pobjede. $\longrightarrow$ vidi "Infinite monkey thm."