1.4 Nizovi događaja

Za niz događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kažemo da je neopadajući (nerastući) ako vrijedi

$$A_n \subseteq A_{n+1} \quad (A_n \supseteq A_{n+1}), \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Uočimo, u tom slučaju je $\mathbb{P}(A_n) \le \mathbb{P}(A_{n+1})$ $(\mathbb{P}(A_n) \ge \mathbb{P}(A_{n+1}))$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pa iz $\mathbb{P}(A_n)\in[0,1]$ slijedi da sigurno postoji $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Tm. 1.15 (c) ("neprekidnost vjerojatnosti na neopadajuće (nerastuće) događaje")

(a) Za svaki neopadajući niz događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, vrijedi

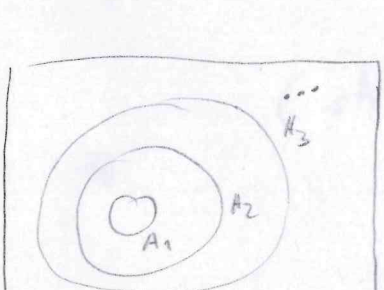
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(b)

Za svaki nerastući niz događaja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz $\mathcal{F}$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Dokaz. (a)



Ω Defin. $B_1 := A_1 \in \mathcal{F}$, te za $n \ge 2$

$B_n := A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{F}$

$A_n \subseteq A_{n+1}, \forall n$

$\Rightarrow$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su u parovima disjunktni te je $A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, \forall n$, i specijalno $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{(A3)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(B_j)}_{\overset{(A3)}{=} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \mathbb{P}(A_n)} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

(b) $(A_n)_n$ nerastući $\Rightarrow$ $(A_n^c)_n$ neopadajući niz

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)}\ = 1 - \mathbb{P}\left(\left(\quad\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)$$

$$\overset{(a)}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(A_n^c)}_{=1-\mathbb{P}(A_n)} = \cancel{1} - \cancel{1} + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n). \blacksquare$$

Primjer 1 (Murphyev zakon – "Ako nešto može poći po (dobru) zlu, onda i hoće")

Bacamo simetričan novčić.

(a) $\mathbb{P}(\underbrace{\{P \text{ je palo nekad}\}}_{A:=}) = ?$

(b) Ako je s bilo koji niz duljine $r \in \mathbb{N}$ iz $\{P, G\}$

(npr. za $r = 3$, $s = PPG$))

$\mathbb{P}(\underbrace{\{\text{niz } s \text{ je pao nekad}\}}_{B:=}) = ?$

> u oba slučaja, 2. BC lema
> $\mathbb{P}(\{\bullet \text{ će se dogoditi beskonačno mnogo puta}\}) = 1$!

Rj. (a) Ako je $A_n := \{P$ je palo barem jednom u prvih n bacanja$\}$, onda

$$\Rightarrow A_n \subseteq A_{n+1},\ \forall n \quad \text{te je} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

(Tm. 1.15.)

$$P(A_n) = 1 - P(A_n^c) = 1 - P(\{\underbrace{GG\cdots G}_{n \text{ puta}}\}) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

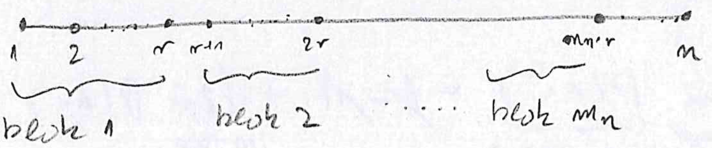
$$\Rightarrow P(A) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Specijalno,

$$P(\{P \text{ nikada nije palo}\}) = P(\{GG\cdots\})$$

$$= P(A^c) = 0.$$

(b) Neka je $B_n := \{D \text{ se pojavio barem jednom u prvih } n \text{ bacanja}\}$, $n \in \mathbb{N}$



$m_n := \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$

Uočimo,

$$B_n^c \subseteq \{D \text{ se nije pojavio u prvih } m_n \text{ blokova}\} =: C_n$$

$P(C_n) = [$ovisi o prvih $m_n \cdot r$ bacanja koja su sva jednako vjerojatna, i ima ih $2^{m_n \cdot r}]$

$$= \frac{(2^r-1)^{m_n} \cdot 1}{2^{m_n \cdot r}}$$

$2^r - 1 =$ # ishoda u svakom bloku $\neq D$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^r}\right)^{m_n}$$

kasnije ćemo ovo odmah zaključiti koristeći nezavisnost.

$$\Rightarrow 0 \le P(B_n^c) \le P(C_n) = \left(1-\frac{1}{2^r}\right)^{m_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

jer $m_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ i $\left|1-\frac{1}{2^r}\right| < 1$.

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c\Big) \overset{B_n^c \supseteq B_{n+1}^c,\ \forall n}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n^c) = 0$$

6 se nikada nije pojavio

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B) = 1. \qquad \blacksquare$$

Za niz događaja $(A_n)_n$ u $\mathcal{F}$, definiramo <u>događaje</u>

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

(Dz)

<u>Napomena</u> (a) Ovo zaista jesu elementi od $\mathcal{F}$.

(b) $\liminf_n A_n \subseteq \liminf_n A_n$

(c) Ako je $(A_n)_n$ monoton niz (dakle, nerastući ili neopadajući),

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{neopadajući} \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, & \text{nerastući} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

(!)

<u>Interpretacija</u>: Za ishod $\omega \in \Omega$ imamo,

ovisi o ω

$$\omega \in \liminf_n A_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } \omega \in A_k,\ \forall k \geq n.$$

$$\Rightarrow \quad \liminf_n A_n = \{\text{dogodili su se svi osim konačno mnogo } A_n\text{-ova}\}$$

Slično,

ovisi o ω

$$\omega \in \limsup_n A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \geq n \text{ t.d. } \omega \in A_k$$

$$\Rightarrow \quad \limsup_n A_n = \{\text{dogodilo se beskonačno mnogo } A_n\text{-ova}\} = \text{"}\{A_n \text{ b.m.p.}\}\text{"}.$$

Lema 1.19 (Borel - Cantellijeva lema)

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjer. prostor i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$. Ako je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < +\infty, \quad (*)$$

onda je

$$\mathbb{P}(\underbrace{\limsup_{n\to\infty} A_n}_{A_n \text{ b.m.p.}}) = 0.$$

Dokaz.

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}_{=: B_n \in \mathcal{F}}$$

Očito je $B_n \supseteq B_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)}_{\leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)} \leq \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)}_{\text{ostatak konvergentnog reda}} \overset{(*)}{=} 0$$

σ-subaditivnost

■

Primjer. Bacamo niz novčića t.d. je

$$p_n := \mathbb{P}(\underbrace{\{P \text{ u } n\text{-tom bacanju}\}}_{A_n :=}) = \frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Imamo $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < +\infty$, pa iz BC leme slijedi

$$\mathbb{P}(\{P \text{ b.m.p.}\}) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0 \quad \blacksquare$$

Nap. 1 U slučaju $p_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, vrijedit će

$$\mathbb{P}(\{P \text{ b.m.p}\}) = 1,$$

iako $p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$! To slijedi iz tzv. 2. BC leme jer je $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ te su $(A_n)_n$ nezavisni događaji (kasnije) $\blacksquare$

DZ (i) Pokažite da vrijedi

$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \le \liminf_n \mathbb{P}(A_n),$$

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \ge \limsup_n \mathbb{P}(A_n).$$

(ii) Ako je za $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ f-ja def. s

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \omega \in A \\ 0, & \text{ako } \omega \notin A \end{cases} \qquad (\text{"indikator događaja } A\text{"})$$

pokažite da je za sve $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{1}_{\limsup_n A_n}(\omega) = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega), \text{ te}$$

$$\mathbb{1}_{\liminf_n A_n}(\omega) = \liminf_n \mathbb{1}_{A_n}(\omega),$$

što opravdava imena ovih skupova. $\blacksquare$