(d) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$ npr. $A \setminus B, A \Delta B \in \mathcal{F}$ (vježbe).

(e) ako je $A \subseteq \Omega$, familija $\{\emptyset, A, \Omega\}$ nije σ-algebra, ali familija $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ jest (to je zapravo najmanja σ-algebra koja sadrži A).

Poanta: σ-algebra je zatvorena na (gotove) sve prebrojive operacije nad događajima, tj. to će opet biti događaji (tj. elementi od $\mathcal{F}$).

Napomena: Ako je Ω konačan ili prebrojiv, najčešće $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1.2 Vjerojatnost i svojstva

U uvodu smo vidjeli da bi trebalo vrijediti

$$P(\Omega) = 1, \; P(\emptyset) = 0, \qquad (*)$$

te

$$P(A) \in [0, 1],$$

za sve događaje A, tj. $\forall A \in \mathcal{F}$.

Ispostavlja se da je za korisnu teoriju potrebno zahtijevati samo još jedno pravilo.

Prisjetimo se, ako je Ω t.d. je

$$|\Omega| := \text{broj elemenata u } \Omega < +\infty,$$

te su zbog simetrije svi elem. dog. u Ω jednako vjerojatni, prirodno je definirati

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \forall A \in \mathcal{F}.$$

Uočimo, uz (*) vrijedi sljedeće: ako su $A, B \in \mathcal{F}$ disjunktni,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|\Omega|} = \frac{|A| + |B|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} + \frac{|B|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

svojstvo aditivnosti

Aditivnost povlači tzv. konačnu aditivnost: $\forall n \in \mathbb{N}$ i

$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ koji su po parovima disjunktni

(tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$), vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) \quad \text{(DZ – indukcija)}$$

U slučaju $|\Omega| < +\infty$, aditivnost (odn. konačna aditivnost) se ispostavlja dovoljna). Ipak, u općenitom slučaju trebat ćemo jače svojstvo, tzv. σ-aditivnost.

Def. 1.7 Neka je $\Omega \neq \emptyset$, te $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja na Ω.

Funkciju $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako vrijedi:

(A1) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$ (nenegativnost)

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ ("normiranost")

(A3) za sve prebrojive familije $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ u parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}, j \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j). \qquad (\text{"}\sigma\text{-aditivnost"})$$

Trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazivamo vjerojatnosni prostor. ■

Nap. (i) Gornje aksiome uveo je A. N. Kolmogorov, 1933.
Iz (A1)–(A3) lako slijedi da je uvijek $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$,
te $\mathbb{P}(A) \leq 1$ (tj. $\mathbb{P}(A) \in [0,1]$), $\forall A \in \mathcal{F}$.

(ii) Ne tvrdimo da je Def. 1.7. odgovor na pitanje "što je vjerojatnost?"! Ipak, teorija izvedena iz ovih aksioma omogućuje jako dobar opis fenomena u stvarnom svijetu. [npr. JZVB i CGT] ■

Nap. (Svojstva vjerojatnosti)
[Iz (A1)–(A3) lako se izvode i sljedeća svojstva:]

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

Dokaz. $A_j := \emptyset, \forall j$ ← u parovima disjunktni

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \overset{(A3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$$

Ako $\mathbb{P}(\emptyset) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = +\infty$ ↯ $(\mathbb{P}(\emptyset) \in \mathbb{R})$

$\underset{\mathbb{P}(\emptyset) \geq 0}{\Rightarrow} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ■

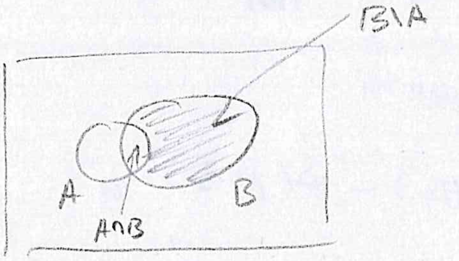
(b) $\mathbb{P}$ je konačno aditivna.

Dokaz | Neka je $n \in \mathbb{N}$, te $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ u parovima disjunktni.

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ A_j := \emptyset,\ \text{za } j \geq n+1}}{=} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) \underset{(A3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \underset{\substack{\uparrow \\ \mathbb{P}(A_j)=0,\ \text{za} \\ j \geq n+1}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) \quad \blacksquare$$

(c) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Dokaz |



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\big(\underbrace{(A \cap B) \cup (B \setminus A)}_{\text{disjunktni}}\big) \underset{(b)}{=} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \quad \blacksquare$$

Specijalno, za $A \subseteq B$,

$$\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\underbrace{A \cap B}_{=A}) = \underline{\underline{\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)}}.$$

(d) Iz (c) slijedi

- $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\Omega \setminus A) \underset{\substack{\uparrow \\ A \subseteq \Omega}}{=} \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) \underset{(A2)}{=} 1 - \mathbb{P}(A)$.

- $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (monotonost)

Dokaz | $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \setminus A) \underset{(A1)}{\geq} 0$ $\blacksquare$

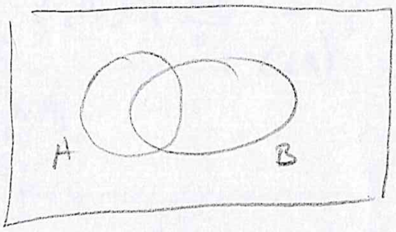
Specijalno, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(\Omega) \underset{(A2)}{=} 1$, $\forall A \in \mathcal{F}$.

$\rightarrow \mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$.

(e) $\forall A, B \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \qquad \text{(FUI)}$$

Dokaz:



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(\underbrace{A \cup (B \setminus A)}_{\text{disjunktni}}) \underset{(B)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

$$\underset{(C)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \blacksquare$$

(f) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$,

svi 2-člani presjeci

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) - \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2})$$

(FUI ili Sylvesterova formula)

$$+ \sum_{1 \le j_1 < j_2 < j_3 \le n} \mathbb{P}(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap A_{j_3}) - \dots$$

$$+ (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Dokaz (DZ): indukcija – vidi skriptu s predavanja (str. 20-21)

(g) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, ← bitno!

(i) $\boxed{\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}$ (subaditivnost)

(ii) $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$

Dokaz. (i) slijedi iz FUI i $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$.

(ii) Slično,

$$\mathbb{P}(A \cap B) \underset{\text{FUI}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \underbrace{\mathbb{P}(A \cup B)}_{\leq 1} \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \blacksquare$$

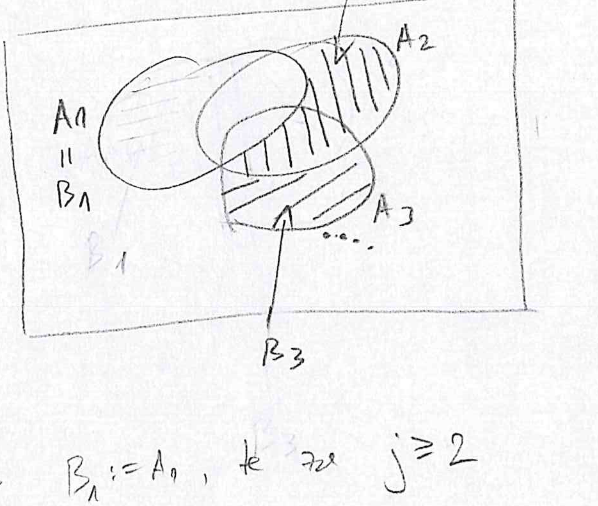
(h) $\forall$ prebrojive familije događaja $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)}$$

tzv. σ-subaditivnost ili Booleova nejednakost

(desna strana može biti $+\infty$)

Dokaz.



Definirat ćemo niz $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ u parovima disjunktnih događaja t.d. $\bigcup_j B_j = \bigcup_j A_j$, (*) i $B_j \subseteq A_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

→ $B_1 := A_1$, te za $j \geq 2$

$B_j := A_j \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{j-1})$

⇒ $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ očito zadovoljava tražena svojstva (DZ), te

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\Big) \underset{\substack{\uparrow \\ (B_j)_j \text{ u} \\ \text{par. disjunktni}}}{\overset{(A3)}{=}} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_j) \underset{\substack{\uparrow \\ B_j \subseteq A_j \text{, pa} \\ \mathbb{P}(B_j) \leq \mathbb{P}(A_j),\ \forall j}}{\leq} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_j) \quad \blacksquare$$

$\blacksquare$

(DZ) Pokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ vrijedi

(i) $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$

(ii) $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) - (n-1)$ $\blacksquare$

(DZ) Neka su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$.

(i) Ako je $\mathbb{P}(A_j) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$, tada je

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = 0.$$

(ii) — " — $\mathbb{P}(A_j) = 1$, ——— " ———

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = 1.$$

Uputa: koristite σ-subaditivnost $\blacksquare$