# 1) Vjerojatnost [Formalna definicija vjerojatnosti]

## 1.1) Pokus i događaji

Neformalno, svaku dobro definiranu proceduru (npr. bacanje novčića) nazivamo (slučajni) pokus.

Ishode (ili rezultate) pokusa nazivamo elementarni događaji (obično oznaka $\omega$ ili $\omega_i$), a skup svih elem. događaja [dakle, svih mogućih ishoda] nazivamo prostor elementarnih događaja (obično oznaka $\Omega$)

Obično nas zanimaju vjerojatnosti vezane uz familije elementarnih događaja, tj. uz neki $A \subseteq \Omega$

$\longrightarrow$ podskupove od $\Omega$ nazivamo događajima.

Ako se dogodio ishod $\omega$, te je $\omega \in A$ za $A \subseteq \Omega$, kažemo da se $A$ dogodio.

Primjer 1.1

(a) Pokus je bacanje kocke $\rightarrow$ za $\Omega$ prirodno je uzeti

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

gdje elem. dog. $i \in \Omega$ označava ishod bacanja je na kocki pao broj (i). Primjeri događaja su:

- $A = \{$pao je paran broj$\}$
  $= \{2,4,6\} \subseteq \Omega$

  događaje često opisujemo riječima

- $B = \{$pao je broj $6\}$
  $= \{6\} \subseteq \Omega$
  → često pišemo samo $\underline{\underline{B = 6}}$.

Ako nas zanima samo $A$ gore, za $\Omega$ možemo uzeti

$$\Omega = \{P, N\}.$$

$P$ ↑ pao paran broj, $N$ ↑ pao neparan broj

U tom slučaju je

$$A = \{P\} = P.$$

U oba slučaju, zbog simetrije, imamo

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ tj.}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$$

Izbor $\Omega$ nije jedinstven, te u pravilu odabiremo onaj $\Omega$ s kojim lakše rješimo dani problem.

(b) Bacamo dvije kocke. Ako je bitan redoslijed za $\Omega$ možemo uzeti

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,\dots,6\}\} = \{1,2,\dots,6\}^2$$

npr. $(2,3) \in \Omega$

2 na 1. kocki — 3 na 2. kocki

- $A = \{$zbroj brojeva je $7\} = \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$
$= \{(i, 7-i) : i = 1,2,\dots,6\} \subseteq \Omega$

(c) U pokeru dobivate 5 karata od 52

$\rightarrow$ za $\Omega$ možemo uzeti

$\Omega = \{$svi 5-člani podskupovi skupa od 52 karte$\}$
$= \{$ ——————— $\|$ ——————— $\{1,2,\dots,52\}\}$

ako karte označimo $1,2,3,\dots,52$

Uočimo, događaji $A \subseteq \Omega$ (npr. $A = \{$full house$\}$)

su skupovi podskupova od $\{1,2,\dots,52\}$.

(d) ($\Omega$ prebrojivo beskonačan)

Bacamo novčić dok ne padne P.

$\rightarrow$ za $\Omega$ možemo uzeti (nije jedinstveno!) npr.

$$\Omega = \{P, GP, GGP, \dots\} \cup \{GGGG\dots\}$$

P pri padu u 3. bacanju

P nikada nije palo

$[\mathbb{P}(GGG\dots) = 0]$

ili

$$\Omega = \{1,2,3,\dots\} \cup \{\infty\}.$$

npr. $A := \{$potrebno barem 3 bacanja do P$\}$

$\rightarrow A = \{GGP, GGGP, \dots\} \cup \{GGG\dots\}$, ozn.

$A = \{3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$.

Alternativno, možemo zamisliti da se bacanje novčića nastavlja nakon pojave P, tj. uzeti

neprebrojiv, $\Omega$ je neprebrojivo beskonačan.

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \{P, G\}, \forall i \in \mathbb{N}\}$$
$$= \{P, G\}^{\mathbb{N}}$$

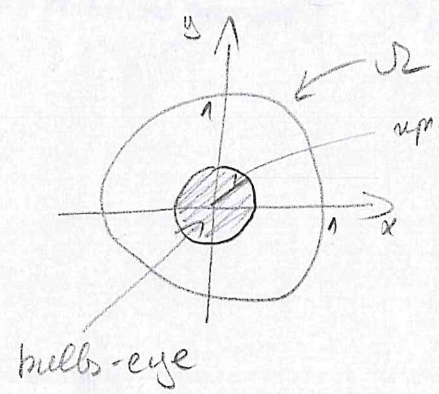
($x_{m+1}, x_{m+2}, \dots$ bilo što)

$$\rightarrow A = \left( \bigcup_{m=3}^{\infty} \{ (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \Omega : x_1, \dots, x_{m-1} = G, x_m = P \} \right)$$
$$\cup \{GGG\dots\}$$

(e) ($\Omega$ neprebrojiv beskonačan)

Na slučajan način bacamo strelicu na ploču za pikado (krug radijusa 1 npr.)

$$\rightarrow \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$




npr. $A = \{$bulls-eye$\}$
$$= \{(x,y) \in \Omega : \sqrt{x^2 + y^2} \leq \tfrac{1}{10}\}$$

↳ Intuitivno,

površina od A

$$\mathbb{P}(A) = \dots = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{(\frac{1}{10})^2 \pi}{1^2 \pi} = \frac{1}{100}.$$

("geometrijska vjerojatnost")

Uočimo,

- $\Omega \subseteq \Omega$ je također događaj → tzv. <u>siguran događaj</u> (uvijek će se dogoditi)

- $\emptyset \subseteq \Omega$ je tzv. <u>nemoguć događaj</u>

Nadalje, ako su $A, B \subseteq \Omega$ događaji, onda su događaji i:

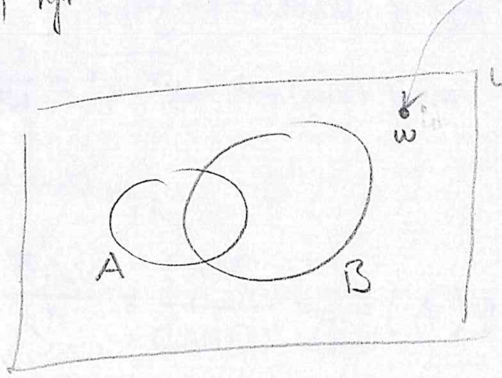
- $A^c = \Omega \setminus A$ → "A se nije dogodio"
- $A \cup B$ → dogodio se A ili B (ili oba)
- $A \cap B$ → —"— i A i B
- $A \setminus B = A \cap B^c$ → —"— A, ali ne i B
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ → —"— samo A ili samo B

Također, ako je $A \subseteq B$ imamo $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$, tj. ako se dogodio A, dogodio i B. Ako su A i B disjunktni, tj. $A \cap B = \emptyset$, ne mogu se istovremeno dogoditi i A i B.

Operacije među događajima često reprezentiramo putem Vennovih dijagrama, npr.

$\omega \in (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ [nalazim se iz A i B]

dijagram



## <u>$\sigma$-algebre</u> (tehnički dio) (npr. u primjeru … (c)), i zadnji slučaj u (a))

Iz tehničkih razloga, nećemo uvijek sve $A \subseteq \Omega$ zvati događajima. Tražit ćemo da familija svih događaja, oznaka npr. $\mathcal{F}$ (dakle, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$), zadovoljava svojstva <u>$\sigma$-algebre</u>.

skup svih podskupova od $\Omega$

<u>Def. 1.4</u> Neka je $\Omega \neq \emptyset$. Familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ zove se <u>$\sigma$-algebra</u> (događaja) na $\Omega$, ako vrijedi:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, (zatvorenost na komplementiranje)

(iii) $A_j \in \mathcal{F},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na <u>prebrojive</u> unije)

Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se izmjeriv prostor. ∎

Uočimo, ako je $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebra na $\Omega$, vrijedi

(a) $\emptyset = \Omega^c \underset{(i)\,(ii)}{\in} \mathcal{F}$ [nekad je (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$]

(b) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ (specijalno, $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$)

<u>dokaz.</u> $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \underset{(iii)+(a)}{\in} \mathcal{F}$ ∎

$A_j := \emptyset$, za $j \geq n+1$

(c) $A_j \in \mathcal{F},\ j \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$

<u>dokaz.</u> $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^c\right)^c \underset{(ii)+(iii)+(ii)}{\in} \mathcal{F}$ ∎

Specijalno, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$ (DZ).

(d) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow$ npr. $A \setminus B, A \Delta B \in \mathcal{F}$ (vježbe).

(e) ako je $A \subseteq \Omega$, familija $\{\phi, A, \Omega\}$ nije σ-algebra, ali familija $\{\phi, A, A^c, \Omega\}$ jest (to je zapravo najmanja σ-algebra koja sadrži $A$).

| |
|---|
| **Poanta** σ-algebra je zatvorena na (gotovo) sve prebrojive operacije nad događajima, tj. to će opet biti događaji (tj. elementi od $\mathcal{F}$). |

Napomena: Ako je $\Omega$ konačan ili prebrojiv, najčešće $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

## 1.2 Vjerojatnost i svojstva

U uvodu smo vidjeli da bi trebalo vrijediti

$$P(\Omega) = 1, \; P(\phi) = 0, \qquad (*)$$

te

$$P(A) \in [0, 1],$$

za sve događaje $A$, tj. $\forall A \in \mathcal{F}$.

Ispostavlja se da je za korisnu teoriju potrebno zahtijevati samo još jedno pravilo.

Prisjetimo se, ako je $\Omega$ t.d. je

$$|\Omega| := \text{broj elemenata u } \Omega < +\infty,$$

te su zbog simetrije svi elem. dog. u $\Omega$ jednako vjerojatni,