VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 1. (*12 bodova*)

Obitelj planira na koja će turistička putovanja ići u narednoj godini. Razmatraju više destinacija i na kraju su listu sveli na njih 6. Za svaku destinaciju su označili da li je smještaj skup ili ne, te da li je destinacija daleko ili nije. Destinacije sa svojim karakteristikama su prikazane u donjoj tablici:

Destinacija	New York	Singapur	Pariz	Tajland	Kuba	Prag
Smještaj skup	DA	DA	DA	NE	NE	NE
Daleka destinacija	DA	DA	NE	DA	DA	NE

Iz predloženih destinacija trebaju izabrati 2, a budući da se ne mogu usuglasiti, odlučili su da će ih odabrati na slučajan način (izbor svakog para je jednako vjerojatan). Označimo s X slučajnu varijablu koja označava broj destinacija (među te dvije odabrane) koje imaju **skup** smještaj, a s Y slučajnu varijablu koja označava broj **dalekih** destinacija.

(a) (*4 boda*) Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y), te marginalne razdiobe slučajnih varijabli X i Y. Jesu li X i Y nezavisne?

(b) (*2 boda*) Uz uvjet da među 2 slučajno odabrane destinacije točno jedna ima skup smještaj, odredite očekivani broj dalekih destinacija među njima.

(c) (*2 boda*) Pretpostavimo da za destinacije koje imaju skup smještaj trošak smještaja za obitelj iznosi 3000 EUR, a za ostale 1500 EUR. Također, pretpostavimo da troškovi puta na daleku destinaciju iznose 3000 EUR, a na destinaciju koja je blizu 1500 EUR. Odredite vjerojatnost da obitelj na ta 2 putovanja ukupno ne potroši više od 9000 EUR (računajući ukupno troškove puta i smještaja).

(d) (*4 boda*) Precizno definirajte kovarijancu i korelaciju za 2 općenite diskretne slučajne varijable. Izračunajte $\mathrm{Cov}(X, Y)$ za slučajne varijable X i Y iz zadatka.

Rješenje.

(a) Broj načina na koji se može izabrati 2 destinacije od njih 6 jednak je $\binom{6}{2} = 15$. Kako X i Y mogu poprimiti vrijednosti 0, 1 ili 2, za svaku kombinaciju mogućih vrijednosti X i Y brojimo koliko ima parova destinacija koje zadovoljavaju navedene uvjete. Na temelju toga dobijemo sljedeću razdiobu s marginalnim razdiobama:

X\Y	0	1	2	$\mathbb{P}(X = .)$
0	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$
1	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{9}{15}$
2	0	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$
$\mathbb{P}(Y = .)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{6}{15}$	1

Budući da je npr. $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0 \neq \frac{3}{15} \cdot \frac{1}{15} = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$, zaključujemo da slučajne varijable nisu nezavisne.

(b) Računamo $\mathbb{E}\left[Y|X = 1\right] = \sum_{k=0}^{2} k \cdot \mathbb{P}(Y = k|X = 1) = \frac{\sum_{k=0}^{2} k \cdot \mathbb{P}(Y=k, X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{0 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{4}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{4}{3}$.

(c) Uz prethodno definirane slučajne varijable X i Y, trošak smještaja iznosi $S = X \cdot 3000 + (2 - X) \cdot 1500 = X \cdot 1500 + 3000$, a trošak puta $P = Y \cdot 3000 + (2 - Y) \cdot 1500 = Y \cdot 1500 + 3000$. Ukupni trošak putovanja je onda $U = (X + Y) \cdot 1500 + 6000$, pa je $\mathbb{P}(U \leq 9000) = \mathbb{P}(X + Y \leq 2)$. Iz tablice razdiobe slučajnog vektora (X, Y) vidimo da je ta vjerojatnost jednaka sumi vjerojatnosti iznad sporedne dijagonale, što je jednako $\frac{8}{15}$.

(d) Za definicije pogledati skriptu s predavanja, Definicija 5.15. i 5.21.
Računamo prvo očekivanje od X i Y: $\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{9}{15} + 2 \cdot \frac{3}{15} = 1$, $\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{6}{15} = \frac{4}{3}$.
Razdiobu slučajne varijable $X \cdot Y$ možemo odrediti iz razdiobe vektora (X, Y) i ona je jednaka $X \cdot Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \frac{4}{15} & \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$. Slijedi onda da je: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = 1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{6}{15} + 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{3}$, pa je $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 2. (*13 bodova*)

(a) (*3 boda*) Definirajte funkciju distribucije F proizvoljne slučajne varijable X. Pokažite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $F(x^-) = \mathbb{P}(X < x)$ pri čemu je $F(x^-) := \lim_{y \to x^-} F(y)$.

(b) Pretpostavimo da slučajna varijabla X ima funkciju distribucije

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1\,. \end{cases}$$

(b1) (*2 boda*) Izračunajte $\mathbb{P}(0 \leq X \leq \frac{2}{3})$.

(b2) (*2 boda*) Je li X aspolutno neprekidna slučajna varijabla? Detaljno obrazložite.

(c) Pretpostavimo da slučajna varijabla R ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\sqrt{\pi}$, te neka je $Y = R^2\pi$ površina kruga s radijusom R.

(c1) (*3 boda*) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable Y.

(c2) (*3 boda*) Odredite $\mathbb{E}[Y]$.

Uputa: Slučajna varijabla ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako joj je funkcija distribucije dana s $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, za $x \geq 0$. Možete pretpostaviti da je Y apsolutno neprekidna slučajna varijabla.

Rješenje.

(a) Definiramo $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$. Budući da je F neopadajuća funkcija, $F(x^-)$ postoji za sve x, te je

$$\begin{aligned} P(X < x) &= \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty}\{X \leq x - \tfrac{1}{n}\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X \leq x - \tfrac{1}{n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(x - \tfrac{1}{n}) = F(x^-)\,, \end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti iskoristili neprekidnost vjerojatnosti u odnosu na neopadajući niz događaja.

(b1) Uočimo da je $\mathbb{P}(X < 0) = F(0^-) = 0$ pa je

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq \tfrac{2}{3}) = \mathbb{P}(X \leq \tfrac{2}{3}) = F(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{5}{6}\,.$$

(b2) Nije, jer bi u suprotnom imali $\mathbb{P}(X = x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, a vrijedi $\mathbb{P}(X = 0) = F(0) - F(0^-) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} > 0$.

(c1) Prvo izračunajmo funkciju distribucije slučajne varijable Y: za $y \geq 0$, imamo

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(R \leq \sqrt{\tfrac{y}{\pi}}\right) \\ &= F_R\left(\sqrt{\tfrac{y}{\pi}}\right) = 1 - e^{-\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\frac{y}{\pi}}} = 1 - e^{-\sqrt{y}}\,. \end{aligned}$$

Za $y < 0$, očito je $F_Y(y) = 0$. Budući da je Y aspolutno neprekidna, znamo da njena gustoća zadovoljava $f_Y(y) = F_Y'(y)$ za sve $y \in \mathbb{R}$ gdje je F_Y diferencijabilna; za ostale y možemo staviti $f_Y(y) := 0$. Sada slijedi da je

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0\,. \end{cases}$$

(c2) Očekivanje $\mathbb{E}\left[Y\right]$ možemo računati barem na tri različita načina. Npr. budući da je Y nenegativna neprekidna slučajna varijabla, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y\right] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(Y > y)dy = \int_0^\infty \mathbb{P}(R > \sqrt{y/\pi})dy \\ &= \int_0^\infty e^{-\sqrt{y}}dy = 2\int_0^\infty z e^{-z}dz\,, \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjem koraku koristili zamjenu varijabli $z = \sqrt{y}$. Sada možemo prepoznati da je zadnji integral zapravo očekivanje eksponencijalne slučajne varijable s parametrom 1 te zaključiti da je onda $\mathbb{E}\left[Y\right] = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2$. Druga dva načina su računati $\mathbb{E}\left[Y\right]$ po definiciji budući da znamo gustoću f_Y ili iskoristiti formulu za računanje $\mathbb{E}\left[g(R)\right]$ gdje je $g(r) = r^2\pi$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 3. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (*3 boda*) Neka je X diskretna slučajna varijabla čija je funkcija izvodnica vjerojatnosti $G_X(s) = \frac{s}{5}(2 + 3s^2)$. Odredite razdiobu slučajne varijable X.

(c) (*3 boda*) Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ s funkcijama izvodnicama, redom G_X i G_Y. Neka je $Z := 5X + Y$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable Z u ovisnosti od G_X i G_Y. Svaki korak detaljno obrazložite.

(d) (*4 boda*) U toku jednog dana u skladište namještaja u Zagrebu dolaze kamioni na način da je broj dolazaka kamiona slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu s parametrom 25. Kamioni koji dolaze imaju 54 stolice s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$, 42 stolice s vjerojatnošću $\frac{1}{6}$ i 30 stolica s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Izračunajte očekivani ukupan broj stolica koje dolaze u toku jednog dana u skladište namještaja u Zagrebu, te vjerojatnost da je ukupan broj stolica koje dođu u skladište veće ili jednako 1.

Rješenje.

(a) Skripta s predavanja, Definicija 7.1.

(b) Kako vrijedi $G_X(0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$, $G'_X(0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}G''_X(0) = \mathbb{P}(X = 2) = 0$, $\frac{1}{6}G'''_X(0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{3}{5}$ i $\frac{1}{k!}G_X^{(k)}(0) = \mathbb{P}(X = k) = 0, \forall k \geq 4$, zaključujemo da slučajna varijabla X poprima dvije vrijednosti 1 i 3, s vjerojatnostima, redom, $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$.

(c) Neka je G_Z funkcija izvodnica vjerojatnosti od slučajne varijable Z. Tada vrijedi

$$G_Z(s) = \mathbb{E}[s^Z] = \mathbb{E}[s^{5X+Y}] = \mathbb{E}[s^{5X}s^Y] = \mathbb{E}[(s^5)^X]\mathbb{E}[s^Y] = G_X(s^5)G_Y(s), \quad |s| \leq 1,$$

gdje četvrta jednakost slijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli X i Y.

(d) Neka je $N \sim P(25)$ i neka su $X_n, n \in \mathbb{N}$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s razdiobom $X_n \sim \begin{pmatrix} 54 & 42 & 30 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Tada je ukupan broj stolica koje dođu u toku jednog dana u skladište namještaja u Zagrebu jednak slučajnoj sumi $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$. S predavanja znamo da je $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]$, pa je očekivani ukupan broj stolica koje dolaze u skladište u toku jednog dana jednak $\mathbb{E}[S] = 25 \cdot 40 = 1000$. Kako je $\mathbb{P}(S = 0) = G_S(0) = G_N(G_{X_1}(0)) = G_N(0) = e^{25(0-1)} = e^{-25}$, to onda vrijedi $\mathbb{P}(S \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) = 1 - e^{-25}$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2023.

Zadatak 4. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno iskažite slabi zakon velikih brojeva.

(b) (*3 boda*) Simetričan novčić bacamo 100 puta, pri čemu su bacanja nezavisna. Koristeći Čebiševljevu nejednakost, pokažite da ćemo s vjerojatnošću barem 0.75 dobiti više od 40 pisama.

(c) (*3 boda*) Konstruirajte niz slučajnih varijabli $X, X_1, X_2, \ldots$ takvih da X ima $\mathrm{N}(0,1)$ razdiobu te da niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji prema X, ali ne i po vjerojatnosti. (*Uputa:* Za $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ vrijedi $-Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.)

(d) (*5 bodova*) Igramo sljedeću igru. Bacamo simetričnu kocku te ako padne šestica, dobivamo 2 eura, a ako padne neparan broj, gubimo 1 euro; u ostalim slučajevima ništa ne dobivamo niti gubimo. Koliko najviše puta smijemo igrati tu igru ako želimo da vjerojatnost da ćemo ukupno izgubiti barem 10 eura bude strogo manja od 90%?

Sve svoje tvrdnje precizno argumentirajte.

Rješenje.

(a) Skripta s predavanja, Teorem 8.7.

(b) Neka je X ukupan broj pisama koja su pala. Tada je $X \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ pa imamo $\mathbb{E}[X] = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$ i $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 25$. Primjenom Čebiševljeve nejednakosti dobivamo

$$\mathbb{P}(X \leq 40) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{10^2} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4},$$

odakle slijedi

$$\mathbb{P}(X > 40) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 40) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

(c) Neka je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, te definiramo $X_n := Z$, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $X := -Z$. Budući da vrijedi $X \sim \mathrm{N}(0,1)$, tj. $X_n \sim X$, za sve $n \in \mathbb{N}$, niz $(X_n)_{n\geq 1}$ očito konvergira po distribuciji prema X. S druge strane, za proizvoljan $\epsilon > 0$, za sve $n \geq 1$ imamo

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) = \mathbb{P}(|Z| > \epsilon/2) > 0\,,$$

pa specijalno ne vrijedi $\mathbb{P}(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ kada $n \to \infty$. Dakle, niz $(X_n)_{n\geq 1}$ ne konvergira po vjerojatnosti prema X.

(d) Neka je n broj igara. Za $1 \leq i \leq n$ neka je X_i dobit u i-toj igri u eurima. Dakle, $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ su nezavisne slučajne varijable s distribucijom $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. One imaju očekivanje

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 = -\frac{1}{6}$$

i varijancu

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{41}{36}.$$

Označimo li sa $S = X_1 + \ldots + X_n$ ukupnu dobit, po centralnom graničnom teoremu slijedi

$$\mathbb{P}(S \leq -10) = \mathbb{P}\left(\frac{S - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{-10 + \frac{1}{6}n}{\sqrt{\frac{41}{36}n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n - 60}{\sqrt{41n}}\right).$$

Budući da je $\Phi(1.28) \approx 0.9$, tražimo najveći n takav da je $\frac{n-60}{\sqrt{41n}} < 1.28$. Rješavanjem ove kvadratne nejednadžbe po $\sqrt{n}$ dobivamo $\sqrt{n} < 12.8612$, odnosno $n < 165.41$. Dakle, traženi je broj igara $n = 165$.