VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka su A i B događaji za koje vrijedi $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$. Pokažite da vrijedi $\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$.

(b) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$. Precizno dokažite da vrijedi $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

(c) (3 boda) Neka su $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ događaji iz $\mathcal{F}$ za koje vrijedi $\mathbb{P}(A_n) = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ i $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k)$.

(d) (2 boda) U liftu zgrade sa 6 katova nalazi se 8 osoba. Izračunajte vjerojatnost da na svakom katu izađe barem 1 osoba.

Rješenje.

a) Iz $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\}$ slijedi desna nejednakost. Također, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$ iz čega dobijemo lijevu nejednakost.

b) Definiramo novi niz $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ događaja na sljedeći način. Stavimo $B_1 := A_1$, $B_j := A_j \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{j-1}), j \geq 2$. Očito je $B_j \in \mathcal{F}, B_j \subseteq A_j$, $\cup_{j=1}^{\infty} B_j = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ i B_j su po parovima disjunktni događaji. Slijedi

$$\mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mathbb{P}(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j),$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili σ-aditivnost vjerojatnosti, a za nejednakost svojstvo monotonosti vjerojatnosti.

c) Pokažimo prvo da je $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Uočimo da vrijedi $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Koristeći (b) dio dobivamo

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 1 - 0 = 1\,,$$

pa je zbog $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) \leq 1$ nužno $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$. Kako vrijedi $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$, zaključujemo da je i $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k) = 1$.

d) Uočimo da se događaj da je na svakom katu izašla barem jedna osoba može opisati kao disjunktna unija događaja da je na jednom od 6 katova izašlo 3 osobe, na preostalih 5 katova po točno jedna osoba i događaja da je na neka 2 kata izašlo po 2 osobe, a na preostala 4 kata po točno jedna osoba. Sada je vjerojatnost jednaka

$$\mathbb{P}(\{\text{ na svakom katu izašla barem 1 osoba}\}) = \frac{\binom{6}{1}\binom{8}{3}5!}{6^8} + \frac{\binom{6}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}4!}{6^8}.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 2.

(a) Na početku godine, studenti na jednom kolegiju oformili su nekoliko WhatsApp grupa. Poznato je da postoji ukupno 8 takvih grupa te da se svaka grupa sastoji od točno 5 studenata. Nakon toga, studenti su nasumično podijeljeni u dvije grupe za nastavu, pri čemu su sve podjele jednako vjerojatne (moguće je i da neka grupa ostane prazna). Označimo s A događaj da studenti niti jedne WhatsApp grupe nisu svi završili u istoj grupi za nastavu.

- (a1) (2 boda) Pokažite da je $\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2}$.
- (a2) (3 boda) Ako dodatno znamo da niti jedan student nije član više od jedne WhatsApp grupe, odredite točnu vrijednost $\mathbb{P}(A)$.

(b)
- (b1) (2 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na skupu $\mathbb{N}$. Ako $\mathcal{F}$ sadrži skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dokažite da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- (b2) (3 boda) Pokažite da je

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ ili } A^c \text{ je prebrojiv}\}$$

najmanja σ-algebra na skupu $\mathbb{R}$ koja sadrži familiju $\{\{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$. [*Uputa: prebrojiva unija prebrojivih skupova prebrojiv je skup. U ovom zadatku, pojam prebrojivog skupa obuhvaća sve konačne skupove.*]

Sve svoje tvrdnje precizno argumentirajte.

Rješenje.

(a) Neka je n ukupan broj studenata na kolegiju. Prostor elementarnih događaja je skup Ω koji se sastoji od svih (uređenih) particija skupa studenata na dva skupa. Tada je $|\Omega| = 2^n$, a budući da su sve particije jednako vjerojatne, imamo Laplaceov model. Alternativno, na ovaj vjerojatnosni prostor možemo gledati kao na vjerojatnosni prostor za n nezavisnih pokusa, pri čemu se j-ti pokus sastoji od smještanja j-tog studenta u neku od dvije nastavne grupe, gdje obje mogućnosti imaju vjerojatnost $\frac{1}{2}$. Za $1 \leq i \leq 8$ neka je A_i događaj da su svi studenti iz i-te WhatsApp grupe završili u istoj nastavnoj grupi. Tada je $A = \bigcap_{i=1}^{8} A_i^c$ te imamo

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{2 \cdot 2^{n-5}}{2^n} = \frac{1}{16}$$

jer za cijelu i-tu grupu imamo 2 mogućnosti odabira nastavne grupe, kao i za svakog od preostalih $n-5$ studenata.

(a1) Po subaditivnosti vjerojatnosti imamo

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{8} A_i\right)^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{8} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{8} \mathbb{P}(A_i) = 1 - 8 \cdot \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(a2) Budući da su WhatsApp grupe međusobno disjunktne, događaji $(A_i)_{1 \leq i \leq 8}$ nezavisni su. Dakle, nezavisni su i događaji $(A_i^c)_{1 \leq i \leq 8}$, odakle slijedi

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{8} \mathbb{P}(A_i^c) = \prod_{i=1}^{8} (1 - \mathbb{P}(A_i)) = \left(1 - \frac{1}{16}\right)^8 = \left(\frac{15}{16}\right)^8.$$

(b1) Kako je $\mathcal{F}$ zatvorena na razlike skupova, za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo $\{n\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \{1, \ldots, n-1\} \in \mathcal{F}$. Nadalje, kako je $\mathcal{F}$ zatvorena na prebrojive unije, za proizvoljan $A \subseteq \mathbb{N}$ slijedi $A = \bigcup_{n \in A} \{n\} \in \mathcal{F}$. Time smo dokazali da je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(b2) Provjerimo prvo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra. Jasno je da $\mathcal{F}$ sadrži skupove $\varnothing$ i $\mathbb{R}$ te da je zatvorena na komplemente. Nadalje, ako su $(A_n)_{n \geq 1}$ skupovi u $\mathcal{F}$, tada je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Zaista, ako su svi skupovi A_n prebrojivi, tada je i njihova unija prebrojiva. U suprotnom, postoji $m \geq 1$ takav da je A_m^c prebrojiv, no tada je i $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \subseteq A_m^c$ prebrojiv.

Dakle, dokazali smo da je $\mathcal{F}$ σ-algebra, a jasno je da ona sadrži sve jednočlane skupove jer su oni prebrojivi.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{F}'$ σ-algebra na $\mathbb{R}$ koja sadrži sve jednočlane podskupove. Tada analognim zaključivanjem kao u dijelu (b1) dobivamo da $\mathcal{F}'$ sadrži sve prebrojive podskupove od $\mathbb{R}$ pa time i sve komplemente takvih skupova. Dakle, vrijedi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, čime je dokaz završen.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ i $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B^c)$. Dokažite da su tada A i B nezavisni.

(b) (3 boda) Bacate novčić na kojemu je vjerojatnost da padne pismo jednaka $p \in (0,1)$. Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ proizvoljni, te neka je

$$A = \{\text{u prvom bacanju palo je pismo}\},\ A_k = \{\text{u } n \text{ bacanja ukupno je palo } k \text{ pisama}\}.$$

Odredite $\mathbb{P}(A \mid A_k)$. Postoji li $p \in (0,1)$ takav da su A i A_k nezavisni?

(c) Oko okruglog stola imamo $2n$ stolica redom označene brojevima $1, 2, \ldots, 2n$, za $n \geq 2$. Pretpostavimo da n bračnih parova na slučajan način sjedne na tih $2n$ stolica, pri čemu muškarci slučajno sjednu na neparna, a žene na parna mjesta.

(c1) (2 boda) Ako je $A_i = \{i\text{-ta žena sjedi do svog muža}\}$, odredite $\mathbb{P}(A_i)$, za sve $i = 1, \ldots, n$.

(c2) (3 boda) Ako je N ukupan broj žena koje sjede do svojih muževa, odredite $\mathbb{E}[N]$.

Rješenje.

(a) Po formuli potpune vjerojatnosti imamo

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = \mathbb{P}(A|B)(\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B^c)) = \mathbb{P}(A|B),$$

tj. A i B su nezavisni.

(b) Ako znamo da je na prvoj kocki palo pismo, imat ćemo ukupno k pisama akko je u preostalih $n-1$ bacanja palo točno $k-1$ pisama – dakle, $\mathbb{P}(A_k \mid A) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$. Budući da je $\mathbb{P}(A) = p$, po Bayesovoj formuli dobivamo

$$\mathbb{P}(A \mid A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A_k)} = \frac{\binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} \cdot p}{\binom{n}{k} p^k q^{n-k)}} = \frac{k}{n}.$$

Budući da zbog $p \in (0,1)$ vrijedi $\mathbb{P}(A_k) > 0$ za sve $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$, događaji A i A_k su nezavisni akko $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid A_k)$, a to vrijedi akko $p = k/n$. Dakle, za fiksne n i k, takav $p \in (0,1)$ postoji akko je $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

(c1) Ako je Ω prostor svih mogućih rasporeda, imamo $|\Omega| = (n!)^2$ te, ako fiksiramo mjesto gdje sjedi i-ta žena, njenog muža možemo staviti na jedno od dva susjedna mjesta, a ostale parove rasporediti na $((n-1)!)^2$ načina. Dakle,

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{|A_i|}{|\Omega|} = \frac{n \cdot 2 \cdot ((n-1)!)^2}{(n!)^2} = \frac{2}{n},$$

neovisno od $i = 1, \ldots, n$. Alternativno (i puno bolje), ako samo gledamo tko je sjeo s desne strane i-te žene, zbog simetrije jednaka je vjerojatnost da tamo sjedi bilo koji od n muškaraca, pa je specijalno vjerojatnost da je to baš njen muž jednaka $1/n$. Isto vrijedi ako gledamo tko sjedi zdesna. Dakle, $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$.

(c2) Ovo slijedi odmah jer je $N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ pa je zbog linearnosti očekivanja

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[1_{A_i}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = n\frac{2}{n} = 2.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Ako je X diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}$ te A proizvoljan događaj takav da je $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X \mid A]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[X \mid A^c]\mathbb{P}(A^c).$$

(b) Luka i Mateo naizmjence bacaju svaki svoj novčić. Lukin novčić pada na pismo s vjerojatnošću $p_L \in (0,1)$, a Mateov s vjerojatnošću $p_M \in (0,1)$. Neka je T broj bacanja dok netko od njih dvojice prvi puta ne dobije pismo, pri čemu Luka (kao kapetan) baca prvi.

(b1) (2 boda) Odredite distribuciju slučajne varijable T.

(b2) (2 boda) Odredite vjerojatnost da će Luka prvi dobiti pismo.

(b3) (4 boda) Koristeći formulu iz (a) dijela zadatka, pokažite da je $\mathbb{E}[T] = 1 + q_L\mathbb{E}[T']$, pri čemu je $q_L = 1 - p_L$, a T' broj bacanja do prvog pisma u slučaju da Mateo baca prvi. Pronađite sličan izraz za $\mathbb{E}[T']$ te izračunajte $\mathbb{E}[T]$.

Rješenje.

(a) Koristeći formulu potpune vjerojatnosti odmah dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left[\mathbb{P}(X = k \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X = k \mid A^c)\mathbb{P}(A^c)\right] \\
&= \mathbb{P}(A)\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k \mid A) + \mathbb{P}(A^c)\sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k \mid A^c) \\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{E}[X \mid A] + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{E}[X \mid A^c].
\end{aligned}$$

(b1) Očito T poprima vrijednosti u skupu $\mathbb{N}$, a $\mathbb{P}(T = n)$ ćemo računati ovisno o tome je li n neparan ili paran. Na primjer, ako je $n = 2k + 1$ za neki $k \geq 0$, imamo $T = n$ akko su i Luka i Mateo u svojih prvih k bacanja dobili sve glave te je Luka u svom sljedećem bacanju dobio pismo. Slično je i za slučaj kada je n neparan pa zaključujemo da vrijedi

$$\mathbb{P}(T = n) = \begin{cases} q_L^k q_M^k p_L\,, & \text{ako } n = 2k + 1 \text{ za neki } k \geq 0 \\ q_L^k q_M^{k-1} p_M\,, & \text{ako } n = 2k \text{ za neki } k \geq 1\,, \end{cases}$$

pri čemu je $q_L = 1 - p_L, q_M = 1 - p_M$.

(b2) Zapravo tražimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T \in \{1, 3, 5, \dots\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} q_L^k q_M^k p_L \\
&= p_L \sum_{k=0}^{\infty} (q_L q_M)^k = \frac{p_L}{1 - q_L q_M}\,.
\end{aligned}$$

(b3) Ako je $A = \{\text{Luka je u prvom bacanju dobio pismo}\}$,

- uvjetno na A, $T = 1$;
- uvjetno na A^c, T ima istu distribuciju kao $1 + T'$.

Dakle,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[T \mid A]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}[T \mid A^c]\mathbb{P}(A^c) = 1 \cdot p_L + \mathbb{E}[1 + T']q_L \\ &= p_L + q_L + q_L\mathbb{E}[T'] = 1 + q_L\mathbb{E}[T'] .\end{aligned}$$

Analogno se dobije $\mathbb{E}[T'] = 1 + q_M\mathbb{E}[T]$, pa uvrštavajući u gornji izraz dobijemo

$$\mathbb{E}[T] = \frac{1 + q_L}{1 - q_L q_M} .$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2022.

Zadatak 5. Igrač igra igru u kojoj istovremeno baca 3 simetrične kocke i pobjeđuje ukoliko se na barem 2 kocke pojavio isti broj.

(a) (1 bod) Odredite vjerojatnost pobjede u takvoj igri.

(b) (2 boda) Definirajte matematičko očekivanje i varijancu za diskretnu slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}$.

(c) (3 boda) Ukoliko promatramo n uzastopnih, nezavisnih ponavljanja opisane igre i s X označimo slučajnu varijablu koja predstavlja broj ostvarenih pobjeda, kako nazivamo takvu slučajnu varijablu (s obzirom na njenu razdiobu)? Izračunajte matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X. (Napomena: Potrebno je "izvesti" formulu za matematičko očekivanje i varijancu za slučajnu varijablu X, a ne koristiti gotovu formulu za takvu vrstu slučajnih varijabli.)

(d) (4 boda) Ukoliko igrač u svakoj igri uloži 1 kn, te dobije 3 kn ukoliko je pobijedio i 0 kn ukoliko je izgubio, kolika će mu biti očekivana zarada nakon odigranih 30 igri? Kolika je očekivana zarada nakon 30 odigranih igri ukoliko se igra promijeni na način da nakon prvog bacanja igrač ponovno mora, ukoliko postoji, baciti jednu (bilo koju) kocku na kojoj se pojavljuje broj isti kao na nekoj drugoj kocki, te se tek nakon toga odredi da li je pobijedio u toj igri (primjerice, ukoliko je u prvom bacanju igrač bacio $3, 6, 6$, mora ponovno baciti neku od kocki na kojoj je pao 6, i ako nakon tog bacanja više nema 2 kocke na kojima se pojavio jednak broj, izgubio je u toj igri)?

Rješenje.

a) Označimo s Ω skup svih mogućih ishoda bacanja 3 simetrične kocke, a s A sve događaje / bacanja u kojima se na barem 2 kocke pojavio isti broj. Tada je A^c skup svih događaja / bacanja u kojima se na svim kockama pojavio različit broj, pa vrijedi:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \tfrac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \tfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \tfrac{4}{9}$$

b) Za diskretnu slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}$, ako vrijedi da je $\sum_{a \in \mathbb{Z}} |a| \mathbb{P}(X = a) < \infty$, kažemo da ima matematičko očekivanje koje definiramo kao:

$$\mathbb{E}(X) := \textstyle\sum_{a \in \mathbb{Z}} a \mathbb{P}(X = a)$$

Varijancu diskretne slučajne varijable X s očekivanjem $\mathbb{E}(X)$ definiramo kao:

$$Var(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

c) Ukoliko za svaku pojedinu igru promatramo ishod da li se dogodila pobjeda, riječ je o Bernoullijevim slučajnim varijablama. Slučajna varijabla X je onda suma n Bernoullijevih slučajnih varijabli, pa je riječ o binomnoj slučajnoj varijabli, točnije $X \sim B(n,p)$, gdje je $p = \frac{4}{9}$. Za binomnu slučajnu varijablu, uz $q = 1 - p$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} np \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} np \frac{(n-1)!}{l!((n-1)-l)!} p^l q^{(n-1)-l} \\
&= np(p+q)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

Da bismo izračunali varijancu od X, koristimo: $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$. Slično kao i za očekivanje, za binomnu slučajnu varijablu vrijedi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)p^2 \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} p^{k-2} q^{(n-2)-(k-2)} \\
&= \sum_{l=0}^{n-2} n(n-1)p^2 \frac{(n-2)!}{l!((n-2)-l)!} p^l q^{(n-2)-l} \\
&= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u gornju formulu za varijancu dobijemo:

$$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$$

Za konkretnu varijablu X dobijemo: $\mathbb{E}(X) = \frac{4n}{9}$, $Var(X) = \frac{20n}{81}$.

d) Zarada koju igrač ostvari u 30 igri jednaka je $3X - 30$ i to je slučajna varijabla koja ovisi o broju pobjeda. Očekivana zarada je jednaka $\mathbb{E}(3X - 30) = 3\mathbb{E}(X) - 30 = 3 \cdot n \cdot \frac{4}{9} - 30 = 10$, dakle 10 kn.

U slučaju promijenjene igre, ponovno računamo vjerojatnost pobjede u pojedinoj igri. Označimo s B događaj da je igrač pobijedio u pojedinoj igri. Razlikujemo 3 disjunktna događaja:

1. $H_0 = \{$*u prvom bacanju su pala 3 različita broja*$\}$ - nema drugog bacanja i igrač je izgubio, pa je vjerojatnost pobjede 0, a vjerojatnost da se H_0 dogodi, u skladu s a) dijelom zadatka, je $\frac{5}{9}$
2. $H_1 = \{$*u prvom bacanju su pala 3 ista broja*$\}$ - koju god kocku igrač ponovno bacio, ostat će sigurno 2 ista broja, pa je vjerojatnost pobjede 1, a vjerojatnost da se H_1 dogodi je jednaka $\frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{36}$
3. $H_2 = \{$*u prvom bacanju su pala 2 ista broja*$\}$ - kad igrač ponovno baca jednu od kocki s istim brojem, pobijedit će u slučaju da dobije ili ponovno taj broj ili broj na trećoj kocki iz prvog bacanja, pa je vjerojatnost pobjede jednaka $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, a vjerojatnost da se H_2 dogodi je jednaka $\mathbb{P}(H_2) = 1 - \mathbb{P}(H_0) - \mathbb{P}(H_1) = \frac{15}{36}$

Prema formuli potpune vjerojatnosti vrijedi:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(B|H_i)\mathbb{P}(H_i) = 0 \cdot \frac{5}{9} + 1 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Dakle, vjerojatnost pobjede u jednoj igri je jednaka $\frac{1}{6}$. Ako sada uvrstimo $p = \frac{1}{6}$ u formulu za zaradu dobivenu za originalnu igru, dobijemo da je očekivana zarada jednaka: $3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 30 = -15$. Drugim riječima, u ovom slučaju imamo očekivani gubitak od 15 kn.