

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.

Zadatak 1. (13 bodova)

- (a) (3 boda) Neka je (Ω, \mathcal{F}) izmjeriv prostor. Definirajte vjerojatnost na tom prostoru.
- (b) (3 boda) Neka su A, B i C događaji. Napišite i dokažite Formulu uključivanja-isključivanja za
- $$\mathbb{P}(A \cup B \cup C).$$
- (c) (3 boda) Neka su A i B događaji takvi da je $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ i $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. Pokažite da je $\frac{1}{6} \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \frac{1}{2}$.
- (d) (4 boda) U zdjeli je 20 višanja od kojih je 15 bez koštice, a 5 s košticom. Vesna slučajno odabere 4 cijele višnje i pojede ih bez da kaže jesu li ili nisu imale koštice. Ante nasumično odabere jednu od preostalih višanja.
- (d1) Koja je vjerojatnost da Antina višnja ima košticu?
- (d2) Ako Antina višnja ima košticu, koja je vjerojatnost da je Vesna pojela bar jednu košticu?

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 2. (12 bodova)

- (a) (2 boda) Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$, definirajte uvjetnu vjerojatnost događaja A uz dano B (oznaka $\mathbb{P}(A | B)$).
- (b) (3 boda) Bacamo dva simetrična novčića te neka je $B_i = \{i\text{-ti novčić je pokazao glavu}\}$, $i = 1, 2$ i $C = \{\text{pale su dvije glave ili dva pisma}\}$. Jesu li B_1 i C nezavisni? Jesu li B_1 i B_2 uvjetno nezavisni uz dano C ?
- (c) (3 boda) Pretpostavimo da je $4/5$ dobivenih mailova *spam*. Među *spam* mailovima njih $1/10$ sadrži frazu "besplatan novac", dok među mailovima koji nisu *spam* ta fraza se pojavljuje u $1/100$ slučajeva. Ako ste dobili novi mail u kojem se nalazi fraza "besplatan novac", kolika je vjerojatnost da je dobiveni mail *spam*?
- (d) (4 boda) Imamo kocku koja ima po dvije strane obojane u svaku od tri boje – plavu, crvenu i zelenu. Ako uzastopno bacamo kocku, kolika je vjerojatnost da će ona pasti na plavu stranu prije nego 2 puta zaredom padne na zelenu stranu?

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 3. (12 bodova)

- (a) (3 boda) Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako su A i B disjunktni događaji, koja je distribucija slučajne varijable $1_A + 1_B$?
- (b) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- (b1) (2 boda) Precizno definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X .
- (b2) (3 boda) Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Ako je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, onda X ima matematičko očekivanje.
- (c) (4 boda) Neka X označava potreban broj bacanja simetričnog novčića dok se glava ne pojavi po treći put. Odredite funkciju gustoće (tj. distribuciju) slučajne varijable X , te izračunajte $\mathbb{P}(10 \leq X < 12)$ i $\mathbb{E}[X]$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 4. (13 bodova)

- (a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Precizno definirajte pojam varijance slučajne varijable X .
- (b) Kolokvij iz jednog kolegija piše 120 studenata. U tu svrhu, oni trebaju biti raspoređeni u šest učionica: 001, 006, 101, 110, A001 i A002. Umorna od ispravljanja ranijih kolokvija, asistentica ih je odlučila rasporediti na sljedeći način: za svakog studenta nezavisno će baciti simetričnu kocku koja će odrediti u kojoj će učionici pisati kolokvij. Za $1 \leq i < j \leq 120$, neka $A_{i,j}$ označava događaj da su i -ti i j -ti student raspoređeni u istu učionicu.
- (b1) (3 boda) Koja je distribucija broja studenata u pojedinoj učionici? Odredite njegovo očekivanje i varijancu.
- (b2) (5 bodova) Odredite vjerojatnosti događaja $A_{i,j}$ te pokažite da su oni u parovima nezavisni. Jesu li oni nezavisni?
- (b3) (3 boda) Neki su parovi studenata prijatelji, pri čemu su prijateljstva uzajamna. Pretpostavimo da svaki student ima točno 20 prijatelja. Ako X označava broj (neuređenih) parova prijatelja koji su završili u istoj učionici, odredite $\mathbb{E}[X]$.