VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) (2 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a), dokažite da je $(A \cup B) \setminus C \in \mathcal{F}$.

(c) (3 boda) Neka je $\mathcal{A}$ algebra skupova na nepraznom skupu Ω sa svojstvom da je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ za sve nizove po parovima disjunktnih skupova $A_n \in \mathcal{A}$. Je li tada $\mathcal{A}$ σ-algebra? Svoj odgovor detaljno obrazložite.

(d) (i) (2 boda) Nađite najmanju σ-algebru na skupu $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ koja sadrži skupove $\{1\}$ i $\{3\}$.

(ii) (1 bod) Nađite najmanju σ-algebru na skupu $\mathbb{N}$ koja sadrži sve jednočlane skupove $\{2k - 1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Rješenje.

(a) Neprazna familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω je σ-algebra ako vrijedi sljedeće:

(A1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(A2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;

(A3) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

(b) Prvo, $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$ po (A2) i (A1). Nadalje, stavimo $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$, $n \geq 3$. Tada je po (A3), $A \cup B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, dakle $\mathcal{F}$ sadrži uniju dva skupa iz $\mathcal{F}$. Alternativno, uz $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = B$, $n \geq 3$, imamo $A \cup B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Ako je $D \in \mathcal{F}$, tada je $D \setminus C = D \cap C^c = (D^c \cup C)^c$. Vrijedi $D^c \in \mathcal{F}$ po (A2), $D^c \cup C \in \mathcal{F}$ po upravo dokazanom, te $(D^c \cup C)^c \in \mathcal{F}$ opet po (A2). Primjenimo na $D = A \cup B$. Slijedi $(A \cup B) \setminus C \in \mathcal{F}$.

(c) Algebra $\mathcal{A}$ zadovoljava aksiome (A1) i (A2) iz dijela (a) te (A3)': za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ vrijedi $\cup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$. Ispitujemo vrijedi li aksiom (A3) iz (a). Neka je $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Definiramo skupove $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})$, $n \geq 2$. Iz svojstava algebre skupova slijedi da je $B_n \in \mathcal{A}$ za sve $n \geq 1$. Nadalje, skupovi B_n su po parovima disjunktni. Po pretpostavci je stoga $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$. No, iz definicije skupova B_n također slijedi da je $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zato je $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, pa je $\mathcal{A}$ σ-algebra.

(d) (i) Najmanja σ-algebra mora sadržavati uniju $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$ te sve komplemente: $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$ i $\{2, 4\}$. Po definiciji sadržava i $\emptyset$ i Ω. Slijedi da je tražena najmanja σ-algebra jednaka

$$\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}.$$

(ii) Označimo s $\mathcal{F}$ traženu najmanju σ-algebru. Uvedimo oznaku $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ za skup svih neparnih brojeva te $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ za skup svih parnih brojeva. Budući da je svaka σ-algebra zatvorena na prebrojive unije i konačne razlike, slijedi da $\mathcal{F} \supset \mathcal{P}(A)$. Nadalje, $\mathcal{F}$ sadrži i komplemente (u $\mathbb{N}$) svih skupova iz $\mathcal{P}(A)$. Neka je $D \subset A$. Tada je $D^c = (A \setminus D) \cup B$. Budući da je $C := A \setminus D \in \mathcal{P}(A)$, slijedi da je

$$\mathcal{F} = \{D, C \cup B : C, D \subset A\}.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Precizno definirajte pojam vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (3 boda) Precizno iskažite i dokažite svojstvo σ-subaditivnosti vjerojatnosti.

(c) (2 boda) Izvlačimo kuglicu iz košare. Neke kuglice u košari su crvene boje. Također, neke su numerirane. Vjerojatnost da izvučemo crvenu kuglicu koja nije numerirana je 0.4, dok je vjerojatnost da je izvučena kuglica numerirana jednaka 0.3. Izračunajte vjerojatnost da izvučena kuglica neće biti niti crvene boje niti numerirana.

(d) (3 boda) Neka je $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ konačno aditivna na $\mathcal{F}$, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(A_j)$.
Precizno dokažite ili opovrgnite tvrdnju:
Ako je $\mathbb{P}$ neprekidna na neopadajuće nizove događaja, onda je $\mathbb{P}$ σ-aditivna na $\mathcal{F}$.

Rješenje.

(a) Vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:

- (A1) Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;
- (A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (A3) Za svaki niz $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(A_j)$.

(b) Neka je $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(A_j),$$

(gdje red na desnoj strani može divergirati u $+\infty$).
Dokaz: definiramo novi niz $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ događaja na sljedeći način. Stavimo $B_1 := A_1$, $B_j := A_j \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{j-1})$, $j \geq 2$. Očito je $B_j \in \mathcal{F}, B_j \subseteq A_j$, $\cup_{j=1}^\infty B_j = \cup_{j=1}^\infty A_j$ i B_j su po parovima disjunktni događaji. Slijedi

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\Big) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(A_j),$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili σ-aditivnost vjerojatnosti, a za nejednakost svojstvo monotonosti vjerojatnosti.

(c) Definirajmo događaje $A = \{\text{kuglica je crvene boje}\}$, $B = \{\text{kuglica je numerirana}\}$. U zadatku je dano $\mathbb{P}(A \backslash B) = 0.4$ i $\mathbb{P}(B) = 0.3$. Trebamo izračunati $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$. Kako je $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \backslash B) + \mathbb{P}(B) = 0.7$, to slijedi da je $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.3$.

(d) Tvrdnja vrijedi, pa ju dokažimo. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja. Definirajmo za $n \in \mathbb{N}$ događaje $C_n := A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Tada je $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz događaja takav da vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zbog konačne aditivnosti od $\mathbb{P}$ vrijedi $\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$. Sada je

$$\mathbb{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j),$$

gdje smo u drugoj jednakosti koristili pretpostavku o neprekidnosti funkcije $\mathbb{P}$ na neopadajući niz događaja. Dakle, funkcija $\mathbb{P}$ je σ-aditivna na $\mathcal{F}$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da vrijedi $\mathbb{P}(A) \in \langle 0, 1\rangle$ i $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B|A)$. Dokažite da vrijedi $\mathbb{P}(B^c) < \mathbb{P}(B^c|A^c)$.

(b) (2 boda) Precizno iskažite formulu potpune vjerojatnosti.

(c) (3 boda) Bacamo simetričnu kocku. Ako padne broj strogo manji od 3 onda na slučajan način biramo knjigu s police broj 1, u suprotnom biramo knjigu s police broj 2. Na polici broj 1 se nalazi 5 knjiga hrvatskih autora i 3 knjige stranih autora, a na polici broj 2 se nalazi 6 knjiga hrvatskih i 2 knjige stranih autora. Ako znamo da je izabrana knjiga hrvatkog autora, izračunajte vjerojatnost da je knjiga birana s police broj 2.

(d) (3 boda) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Ako je $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$, izračunajte $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c)$.

Rješenje.

(a) Ako vrijedi $\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B|A)$, to zapravo znači da vrijedi $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B \cap A)$. Trebamo pokazati da vrijedi $\mathbb{P}(B^c) < \mathbb{P}(B^c|A^c)$, tj. da je $\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A^c) < \mathbb{P}(B^c \cap A^c)$. Zaista,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A^c) &= (1-\mathbb{P}(B))(1-\mathbb{P}(A)) = 1-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) < \\ &< 1-\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\cap A) = 1-\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(B^c\cap A^c),\end{aligned}$$

gdje smo za nejednakost koristili pretpostavku zadatka.

(b) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja (tj. I konačan ili prebrojiv, $H_i \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(H_i) > 0$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ i $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$). Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i).$$

(c) Definirajmo događaje:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{knjiga je birana s police broj 1}\},\\ H_2 &= \{\text{knjiga je birana s police broj 2}\},\\ A &= \{\text{izabrana je knjiga hrvatkog autora}\}.\end{aligned}$$

Uočimo da je $\{H_1, H_2\}$ potpun sustav događaja. Iz teksta zadatka vidimo da je $\mathbb{P}(H_1) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(H_2) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(A|H_1) = \frac{5}{8}$ i $\mathbb{P}(A|H_2) = \frac{3}{4}$. Tražena vjerojatnost je onda po Bayesovoj formuli jednaka

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)}{\mathbb{P}(A|H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A|H_2)\mathbb{P}(H_2)} = \frac{12}{17}.$$

(d) Uočimo da je $\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k^c) = \mathbb{P}((\cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k)^c) = \mathbb{P}((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c) = 1 - \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$. Kako je $\sum_n \mathbb{P}(A_n) = \sum_n \frac{1}{n} = \infty$, zaključujemo po obratu Borel-Cantelijeve leme da je $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$, pa je tražena vjerojatnost jednaka 0.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Koje pretpostavke mora zadovoljavati vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ da bi se radilo o Laplaceovom modelu vjerojatnosti? Kako u tom slučaju računamo $\mathbb{P}(A)$, za $A \in \mathcal{F}$?

(b) Standardan špil se sastoji od 13 jačina po 4 karte, odnosno ukupno 52 karte. Na početku igre iz špila nasumično izvučemo 5 karata. Kaže se da smo dobili poker ukoliko su 4 od tih 5 karata iste jačine.

(i) (2 boda) Kolika je vjerojatnost da smo izvukli poker?

(ii) (5 bodova) Neka je svih 5 izvučenih karata različite jačine. Potom biramo želimo li odbaciti svih 5 karata i od preostalih karata u špilu izvući novih 5 ili želimo sačuvati 1 kartu, odbaciti ih 4 i od preostalih karata u špilu izvući novih 4. Što trebamo izabrati kako bismo imali veću vjerojatnost da nakon drugog izvlačenja dobijemo poker?

Rješenje.

(a) Pretpostavke Laplaceovog modela vjerojatnosti su da je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ konačan, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \ldots = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$. U tom slučaju za $A \in \mathcal{F}$ imamo $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

(b) Ukoliko izvlačimo k karata iz špila od n karata neka se Ω sastoji od svih kombinacija karata koje smo mogli izvući, iz čega slijedi da je $|\Omega| = \binom{n}{k}$. Neka je $A = \{\text{Izvukli smo poker}\}$.

(i) Poker smo mogli imati u svakoj od 13 jačina karata te za svaku od tih 13 mogućnosti imamo još $52 - 4 = 48$ mogućnosti za izbor pete karte. Odnosno

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 48 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{1}{17 \cdot 5 \cdot 49} = \frac{1}{4165}.$$

(ii) Odredimo prvo vjerojatnost dobivanja pokera u slučaju da smo odbacili svih 5 karata i izvukli novih 5. U tom slučaju 4 karte koje su iste jačine nisu mogle biti jedne od jačina kojih su bile originalnih 5 karata (jer je svake od tih jačina u špilu ostalo samo po 3 karte). Što znači da u ovom slučaju poker možemo imati u jednoj od $13 - 5 = 8$ jačina karata te za svaku od tih 8 mogućnosti imamo još $47 - 4 = 43$ mogućnosti za izbor pete karte. Odnosno

$$\mathbb{P}(A) = \frac{8 \cdot 43}{\binom{47}{5}} = \frac{8 \cdot 43 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43} = \frac{40 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}.$$

Pretpostavimo sada da smo jednu kartu odlučili zadržati. Ukoliko želimo da 4 karte iste jačine uključuju tu kartu koju smo zadržali to možemo izvući samo na jedan način te imamo još $47 - 3 = 44$ mogućnosti za izbor pete karte. Ukoliko želimo da 4 karte iste jačine ne uključuju kartu koju smo zadržali njih možemo izvuči na $13 - 5 = 8$ načina te nam je u tom slučaju peta karta ona koju smo odlučili zadržati. Odnosno imamo

$$\mathbb{P}(A) = \frac{44 + 8}{\binom{47}{4}} = \frac{52 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}.$$

Budući da je $52 > 40$ zaključujemo da je bolje sačuvati jednu kartu.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 27. studenog 2019.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Definirajte slučajnu varijablu X na tom vjerojatnosnom prostoru.

(b) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Definirajte varijancu slučajne varijable X. Ako varijanca diskretne slučajne varijable X postoji, pokažite da je tada

$$\mathrm{Var}\,(aX+b) = a^2\mathrm{Var}\,(X) \text{ za sve } a, b \in \mathbb{R}.$$

(c) (3 boda) Neka je X nenegativna diskretna slučajna varijabla za koju je

$$\mathbb{P}(X = \frac{m\pi}{4}) = \begin{cases} 8 \cdot 3^{-m-1}, & m \text{ neparan} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite distribuciju slučajne varijable $\sin(2X)$.

(d) (3 boda) Igrač igra igru u kojoj se iz skupa $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ izvlači 5 brojeva (koji se po završetku kruga vraćaju u skup), a igrač je pobjednik tog kruga ukoliko je zbroj izvučenih brojeva paran. Odredi očekivani broj krugova do prve pobjede igrača.

Rješenje.

(a) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkciju $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi da je

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

nazivamo slučajnom varijablom na tom vjerojatnosnom prostoru.

(b) Neka je X diskretna slučajna varijabla s očekivanjem $\mathbb{E}\,X$. Varijanca od X definira se kao

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}\,(X - \mathbb{E}\,X)^2.$$

Primjenivši definiciju za slučajnu varijablu $aX + b$ za proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ te koristeći svojstva linearnosti očekivanja, imamo:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,(aX+b) &= \mathbb{E}\,((aX+b) - \mathbb{E}\,(aX+b))^2 \\
&= \mathbb{E}\,(aX + b - a\mathbb{E}\,X - b)^2 \\
&= \mathbb{E}\,(aX - a\mathbb{E}\,X)^2 \\
&= \mathbb{E}\,(a(X - \mathbb{E}\,X))^2 \\
&= a^2\mathbb{E}\,(X - \mathbb{E}\,X)^2 \\
&= a^2\mathrm{Var}\,(X).
\end{aligned}$$

(c) Primijetimo da je $\sin(\frac{m\pi}{2})$ za m neparan iz skupa $M = \{-1, 1\}$ i to

$$\sin\Big(\frac{(4n+1)\pi}{2}\Big) = 1 \text{ i} \sin\Big(\frac{(4n+3)\pi}{2}\Big) = -1$$

za $n \in \mathbb{N}_0$ pa je skup M jednak slici slučajne varijable $\sin(2X)$. Sada nas zanimaju pripadne vjerojatnosti za odgovarajuće elemente slike. To dobijamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\sin(2X) = -1) &= \mathbb{P}\Big(X = \frac{(4k+3)\pi}{4} \text{ za neki } k \in \mathbb{N}_0\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\Big(X = \frac{(4k+3)\pi}{4}\Big) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} 8 \cdot 3^{-4k-4} \\
&= \frac{8}{81} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{81^k} \\
&= \frac{8}{81} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{81}} \\
&= \frac{8}{81} \cdot \frac{81}{80} = \frac{1}{10}
\end{aligned} \tag{1}$$

Sada je $\mathbb{P}(\sin(2X) = 1) = 1 - \mathbb{P}(\sin(2X) = -1) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$. Dakle, slučajnoj varijabli $\sin(2X)$ pripada sljedeća tablica distribucije:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

(d) Ako s X označimo slučajnu varijablu koja broji krugove do prve pobjede igrača, onda možemo primijetiti kako X ima geometrijsku distribuciju pri čemu je parametar te distribucije vjerojatnost uspjeha, odnosno vjerojatnost pobjede koju je potrebno izračunati. Definirajmo događaje:

$$P = \{\text{zbroj izvučenih brojeva je paran}\},\ N = \{\text{zbroj izvučenih brojeva je neparan}\}.$$

Onda vrijedi

$$\mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(P) = 1.$$

Izračunajmo $\mathbb{P}(N)$. Budući da se u skupu A nalazi 5 neparnih brojeva, a 3 parna broja, prilikom izvlačenja potrebno je izvući neparan broj neparnih brojeva kako bi se realizirao događaj N. Možemo pisati:

$$N = N_1 \cup N_3 \cup N_5$$

gdje je $N_i = \{\text{izvučeno je točno } i \text{ neparnih brojeva}\}$, $i = 1, 3, 5$. Stoga je prema svojstvu σ-aditivnosti (jer su N_i međusobno disjunktni):

$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}(N_3) + \mathbb{P}(N_5).$$

Računamo:

$$\mathbb{P}(N_1) = 0,\ \mathbb{P}(N_3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{2}}{\binom{8}{5}} = \frac{15}{28},\ \mathbb{P}(N_5) = \frac{1}{\binom{8}{5}} = \frac{1}{56}.$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(N) = \frac{31}{56} \ \Rightarrow \mathbb{P}(P) = \frac{25}{56}$.
(N_1 je prazan skup jer odabirom jednog neparnog broja potrebno je odabrati 4 parna, a to nije moguće za ovako zadani S. Prvi faktor kod računanja vjerojatnosti skupa N_3 označava načine na

koje možemo odabrati tri neparna broja od mogućih pet, a drugi faktor predstavlja broj načina na koji možemo odabrati dva parna broja od mogućih 3. Budući da na samo jedan način možemo birati svih pet neparnih brojeva, brojnih posljednjeg razlomka je 1.)
Budući da je očekivanje geometrijske slučajne varijable jednako recipročnoj vrijednosti parametra koji označava uspjeh, imamo da je $\mathbb{E}\, X = \frac{56}{25} = 2.24$.