VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Precizno iskažite Sylvestrovu formulu (formulu uključivanja-isključivanja) za događaje $A_1, A_2, \ldots, A_n$ iz $\mathcal{F}$.

(b) (3 boda) Pomoću aksioma vjerojatnosti dokažite formulu iz (a) za slučaj kada je $n = 2$.

(c) (2 boda) Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da će pasti isti brojevi na kockama ili da je produkt brojeva na kockama paran?

(d) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A_n, n \in \mathbb{N}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A_n) \leq 3^{-n}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n)$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

(b) Događaj $A_1 \cup A_2$ napišemo kao uniju tri po parovima disjunktna događaja: $A_1 \cup A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_1 \cap A_2)$. Koristeći činjenicu da za proizvoljne događaje A i B vrijedi $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$, te konačnu aditivnost, slijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) &= \mathbb{P}(A_1 \setminus A_2) + \mathbb{P}(A_2 \setminus A_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&= \big(\mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\big) + \big(\mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_1)\big) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2).
\end{aligned}$$

(c) Označimo događaje $A = \{\text{pali su isti brojevi}\}$ i $B = \{\text{produkt je paran}\}$. Tada tražimo $\mathbb{P}(A \cup B)$. Kako je $\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{3\cdot 3}{36} = \frac{27}{36}$ i $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{36}$, slijedi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6 + 27 - 3}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

(d) Označimo s $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz događaja i vrijedi $B_n \subseteq A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Koristeći neprekidnost vjerojatnosti na neopadajuće događaje i monotonost vjerojatnosti, imamo

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) \leq \lim_{n} \mathbb{P}(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0,$$

iz čega zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka 0.

Alternativno rješenje. Budući da je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, iz činjenice da je $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$, monotonosti vjerojatnosti i Borel-Cantellijeve leme dobivamo

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0,$$

odakle kao i prije slijedi zaključak.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Neka je Ω neprazan skup. Precizno definirajte pojam σ-algebre na Ω.

(b) (2 boda) Neka je Ω neprazan skup te neka je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ familija po parovima disjunktnih nepraznih podskupova od Ω takvih da $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži familiju $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

(c) Neka je Ω neprazan skup te neka je $\mathcal{F}$ konačna σ-algebra na Ω.

 (i) (1 bod) Pokažite da $\mathcal{F}$ nužno ima paran broj elemenata.

 (ii) (2 boda) Pokažite da je broj elemenata od $\mathcal{F}$ nužno potencija broja 2.

(d) Neka je Ω neprazan skup te neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ dvije σ-algebre na Ω.

 (i) (1 bod) Pokažite da je $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ također σ-algebra na Ω.

 (ii) (2 boda) Mora li i $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ biti σ-algebra na Ω?

Sve svoje tvrdnje dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.

Rješenje.

(a) Neprazna familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω je σ-algebra ako vrijedi sljedeće:

 (1) $\Omega \in \mathcal{F}$;

 (2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;

 (3) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

(b) Tražena σ-algebra sadrži $\emptyset$ i sve unije elemenata iz $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

(c) (i) Iz svojstva (2) definicije pojma σ-algebre slijedi da elementi od $\mathcal{F}$ dolaze u parovima, A i A^c, pa zaključujemo da broj elemenata od $\mathcal{F}$ mora biti paran.

 (ii) Jasno je da u ovoj situaciji $\mathcal{F}$ dopušta potfamiliju skupova koja zadovoljava svojstva iz (b) dijela zadatka. Dakle, elementi od $\mathcal{F}$ su upravo unije tih elemenata pa kako svaki element može ili ne mora biti uključen u uniju slijedi tvrdnja.

(d) (i) Budući da su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ σ-algebre, slijedi da je $\Omega \in \mathcal{F}_1$ i $\Omega \in \mathcal{F}_2$, pa je i $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

 Neka je $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Tada je $A^c \in \mathcal{F}_1$, budući da je $A \in \mathcal{F}_1$, a $\mathcal{F}_1$ je σ-algebra. Analogno zaključujemo da je i $A^c \in \mathcal{F}_2$, pa je $A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

 Neka je $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$. Tada je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1$, budući da je $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}_1$, a $\mathcal{F}_1$ je σ-algebra. Analogno zaključujemo da je i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_2$, pa je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

 (ii) Pokažimo da to ne mora biti slučaj. Stavimo $\Omega = \{1,2,3\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$ te $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \Omega\}$. Tada su očito $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ σ-algebre, ali $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ to nije (jer, primjerice, $\{3\} = \{2,3\} \cap \{1,3\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$).

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Precizno iskažite i dokažite formulu potpune vjerojatnosti.

(b) (3 boda) Pitanje na testu ima m, $m \geq 2$, ponuđenih odgovora (multiple-choice). Student zna točan odgovor na pitanje s vjerojatnosti $p \in (0, 1)$ (u kojem slučaju taj odgovor zaokružuje), a u suprotnom na slučajan način bira jedan od ponuđenih odgovora, svaki s vjerojatnosti $1/m$. Nađite uvjetnu vjerojatnost da je student znao odgovor na pitanje ako je zaokružio točan odgovor?

(c) (4 boda) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Dokažite da tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1\,.$$

Rješenje.

(a) Neka je $(H_i)_{i\in I}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)\,.$$

Dokaz: korištenjem činjenice da je $\cup_{i\in I} H_i = \Omega$ u prvoj jednakosti, σ-aditivnost u trećoj te definiciju uvjetne vjerojatnosti u četvrtoj, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(A \cap \left(\bigcup_{i\in I} H_i\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I}(A \cap H_i)\right) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)\,.\end{aligned}$$

(b) Uvedimo događaje

$$\begin{aligned}A &= \{\text{student je zaokružio točan odgovor}\},\\ H_1 &= \{\text{student je znao odgovor na pitanje}\},\\ H_2 &= \{\text{student pogađa odgovor}\}.\end{aligned}$$

Tada je $\{H_1, H_2\}$ potpun sustav događaja. Nadalje vrijedi $\mathbb{P}(H_1) = p$, $\mathbb{P}(H_2) = 1 - p$, $\mathbb{P}(A|H_1) = 1$, $\mathbb{P}(A|H_2) = 1/m$. Po Bayesovoj formuli imamo

$$\mathbb{P}(H_1|A) = \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{p}{p + (1-p)/m} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}.$$

(c) Prisjetimo se, $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Stavimo $B_n := \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Tada je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nerastući niz događaja i vrijedi $\limsup_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Ukoliko pokažemo da je $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za svaki $n \geq 1$, tada će tvrdnja leme slijediti iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastuće nizove događaja.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $m > n$ proizvoljan. Tada je zbog nezavisnosti familije $(A_j)_{j\geq 1}$ te činjenice da je $e^{-x} \geq 1 - x$ za sve $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right) = \prod_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{m} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{m} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)} . \tag{1}$$

Iz pretpostavke $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \infty$ i neprekidnosti eksponencijalne funkcije, slijedi da je

$$\lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} \mathbb{P}(A_k)} = 0 . \tag{2}$$

Iz (1) i (2) te neprekidnosti vjerojatnosti na neopadajuće nizove događaja slijedi

$$\mathbb{P}(B_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=n}^{m} A_k) = \lim_{m\to\infty} \left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k^c\right)\right) = 1 .$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 4. Za natjecanje su se prijavila četiri tima A, B, C, D, i to svaki s po 5 igrača.

(a) (4 boda) Ako na slučajan način odaberemo 8 natjecatelja, odredite vjerojatnost da će svaki tim biti zastupljen s barem jednim igračem.

(b) Odabrano je 8 natjecatelja, po dva iz svakog tima. Ako im je na slučajan način dodijeljen redoslijed kojim pristupaju natjecanju, odredite

(b1) (2 boda) vjerojatnost da svi igrači iz timova A i B nastupe prije prvih igrača iz timova C i D,

(b2) (4 boda) vjerojatnost da svi igrači iz timova A i B nastupe prije prvog igrača iz tima C.

Rješenje.

(a) Označimo timove A, B, C, D brojevima $1, \ldots, 4$, te događaje

$$A_i = \{\text{nije odabran niti jedan član tima } i\}, \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Tražena vjerojatnost je

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right)$$
$$= 1 - \frac{4\binom{15}{8}}{\binom{20}{8}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{10}{8}}{\binom{20}{8}},$$

budući da je nemoguće da iz tri ili sva četiri tima nije odabran niti jedan natjecatelj.

(b1) Označimo događaj $E = \{\text{igračima iz timova } A \text{ i } B \text{ dodijeljena su prva četiri nastupa}\}$. Tada se u prva četiri nastupa moraju pojaviti četiri natjecatelja iz timova A i B, a u druga četiri nastupa četiri natjecatelja iz timova C i D, pa je tražena vjerojatnost $\mathbb{P}(E) = \frac{4!4!}{8!} = \frac{1}{70}$.

(b2) Tražimo vjerojatnost događaja

$$F = \{\text{prvi igrač iz tima } C \text{ je nastupio nakon zadnjeg igrača iz timova } A \text{ i } B\}.$$

Označimo događaje

$$F_i = \{\text{zadnji igrač iz timova } A \text{ i } B \text{ je nastupio } i\text{-ti po redu}\}, \ i = 4, 5, 6.$$

Tražena vjerojatnost je

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=4}^{6}(F_i \cap F)\right) = \sum_{i=4}^{6} \mathbb{P}(F_i \cap F) = \frac{4!4!}{8!} + \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}4!3!}{8!} + \frac{\binom{4}{1}5!2!}{8!} = \frac{1}{15}.$$

(Ilustracija kako se dobiva, npr. $|F_5 \cap F|$: U ovom su slučaju u prvih pet nastupa nastupila sva četiri natjecatelja iz timova A i B, te je jedan od njih nastupio baš u petom nastupu. Također, u prvih pet nastupa (ali ne u petom) je nastupio i jedan natjecatelj iz tima D. Nastup u kojem je taj natjecatelj nastupio možemo odabrati na $\binom{4}{1}$ načina, a tog natjecatelja na $\binom{2}{1}$ načina. Poredak u kojem su nastupili natjecatelji iz timova A i B možemo odabrati na $4!$ načina. U posljednja tri nastupa nastupili su natjecatelji iz tima C te preostali natjecatelj iz tima D, pa poredak kojim su oni nastupali možemo odabrati na $3!$ načina.)

Alternativno rješenje. Broj redoslijeda kod kojih svi natjecatelji iz timova A i B nastupe prije prvog igrača iz tima C možemo odrediti i na drugačiji način. Na $8 \cdot 7$ načina možemo odabrati nastupe prvog i drugog igrača iz tima D. Kod preostalih šest nastupa, u prva četiri moraju nastupati natjecatelji iz timova A i B ($4!$ načina), a u preostala dva natjecatelji iz tima C (2 načina). Dakle,

$$\mathbb{P}(F) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 4! \cdot 2}{8!} = \frac{1}{15}.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

(b) (3 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Dokažite da ako $g(X)$ i $h(X)$ imaju matematičko očekivanje, za neke funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onda je

$$\mathbb{E}\left(g(X) + h(X)\right) = \mathbb{E}\left(g(X)\right) + \mathbb{E}\left(h(X)\right).$$

(c) (2 boda) Za pripremu jela *Hrenovke Stroganoff* potrebno je 10 hrenovki. Svaka hrenovka se s jednakim vjerojatnostima reže na 2, 4 ili 9 duguljastih komada. Odredite očekivani broj komada u jelu.

(d) (3 boda) *Hrenovke Stroganoff* preporučeno je konzumirati uz bijelo vino i dobro društvo. Na večeru dolazi X ljudi, pri čemu je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu prirodnih brojeva s razdiobom

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{3^n}, \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

za neku pozitivnu konstantu c. Odredite očekivani broj ljudi koji će prisustvovati večeri.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje ukoliko je $\sum_{j\geq 1} |a_j| p_j$ konačno, te je u tom slučaju matematičko očekivanje slučajne varijable X jednako

$$\mathbb{E}\, X = \sum_{j\geq 1} a_j p_j.$$

(b) Prvo uočimo da slučajna varijabla $g(X) + h(X)$ ima očekivanje. Naime,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{R}} |g(x) + h(x)| f(x) &\leq \sum_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| + |h(x)| f(x) \\
&\leq \sum_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| f(x) + \sum_{x\in\mathbb{R}} |h(x)| f(x) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(g(X) + h(X)\right) &= \mathbb{E}\left((g+h)(X)\right) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} (g+h)(x) f(x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} (g(x) + h(x)) f(x) \\
&= \sum_{x\in\mathbb{R}} g(x) f(x) + \sum_{x\in\mathbb{R}} h(x) f(x) \\
&= \mathbb{E}\left(g(X)\right) + \mathbb{E}\left(h(X)\right).
\end{aligned}$$

(c) Neka je N_i slučajna varijabla koja označava na koliko je komada izrezana i-ta hrenovka ($i = 1, \dots, 10$). Tada je

$$\mathbb{E}\, N_i = 2 \cdot \mathbb{P}(N_i = 2) + 4 \cdot \mathbb{P}(N_i = 4) + 9 \cdot \mathbb{P}(N_i = 9) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} = 5.$$

Neka je N ukupan broj komada u jelu. Tada je $N = N_1 + \cdots + N_{10}$, pa po linearnosti matematičkog očekivanja imamo

$$\mathbb{E}\, N = \mathbb{E}\,(N_1 + \cdots + N_{10}) = 10 \cdot 5 = 50.$$

(d) Odredimo najprije konstantu c. Uočimo da je

$$1 = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X = n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{3^n} = \frac{c}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{c}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}},$$

odakle slijedi da je $c = 2$.

Očekivani broj ljudi na večeri je sada

$$\mathbb{E}\, X = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{2}{3^n} = \frac{2}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{3^{n-1}}.$$

Deriviranjem geometrijskog reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

član po član dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

Uvrštavanjem $x = \frac{1}{3}$ sada slijedi

$$\mathbb{E}\, X = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} = \frac{3}{2}.$$

Alternativni način za zaključiti koje je očekivanje slučajne varijable X. Nakon što smo odredili konstantu c, uočimo da X slijedi geometrijsku distribuciju $G(\frac{2}{3})$, a za nju je poznato da ima očekivanje $1/\frac{2}{3} = \frac{3}{2}$.