JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do četvrtka, 29. studenog u 22 sata na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 30. studenog u 11:30 u prostoriji 002.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Precizno iskažite Sylvestrovu formulu (formulu uključivanja-isključivanja) za događaje $A_1, A_2, \dots, A_n$ iz $\mathcal{F}$.

(b) (3 boda) Pomoću aksioma vjerojatnosti dokažite formulu iz (a) za slučaj kada je $n = 2$.

(c) (2 boda) Bacamo dvije simetrične kocke. Kolika je vjerojatnost da će pasti isti brojevi na kockama ili da je produkt brojeva na kockama paran?

(d) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i $A_n, n \in \mathbb{N}$ niz događaja iz $\mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A_n) \leq 3^{-n}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Neka je Ω neprazan skup. Precizno definirajte pojam σ-algebre na Ω.

(b) (2 boda) Neka je Ω neprazan skup te neka je $\{A_1, \ldots, A_n\}$ familija po parovima disjunktnih nepraznih podskupova od Ω takvih da $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Odredite najmanju σ-algebru na Ω koja sadrži familiju $\{A_1, \ldots, A_n\}$.

(c) Neka je Ω neprazan skup te neka je $\mathcal{F}$ konačna σ-algebra na Ω.

(i) (1 bod) Pokažite da $\mathcal{F}$ nužno ima paran broj elemenata.

(ii) (2 boda) Pokažite da je broj elemenata od $\mathcal{F}$ nužno potencija broja 2.

(d) Neka je Ω neprazan skup te neka su $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$ dvije σ-algebre na Ω.

(i) (1 bod) Pokažite da je $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ također σ-algebra na Ω.

(ii) (2 boda) Mora li i $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ biti σ-algebra na Ω?

Sve svoje tvrdnje dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 3.

(a) (3 boda) Precizno iskažite i dokažite formulu potpune vjerojatnosti.

(b) (3 boda) Pitanje na testu ima m, $m \geq 2$, ponuđenih odgovora (multiple-choice). Student zna točan odgovor na pitanje s vjerojatnosti $p \in (0, 1)$ (u kojem slučaju taj odgovor zaokružuje), a u suprotnom na slučajan način bira jedan od ponuđenih odgovora, svaki s vjerojatnosti $1/m$. Nađite uvjetnu vjerojatnost da je student znao odgovor na pitanje ako je zaokružio točan odgovor?

(c) (4 boda) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takav da je $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$. Dokažite da tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1\,.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 4. Za natjecanje su se prijavila četiri tima A, B, C, D, i to svaki s po 5 igrača.

(a) (4 boda) Ako na slučajan način odaberemo 8 natjecatelja, odredite vjerojatnost da će svaki tim biti zastupljen s barem jednim igračem.

(b) Odabrano je 8 natjecatelja, po dva iz svakog tima. Ako im je na slučajan način dodijeljen redoslijed kojim pristupaju natjecanju, odredite

(b1) (2 boda) vjerojatnost da svi igrači iz timova A i B nastupe prije prvih igrača iz timova C i D,

(b2) (4 boda) vjerojatnost da svi igrači iz timova A i B nastupe prije prvog igrača iz tima C.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 28. studenog 2018.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

(b) (3 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla. Dokažite da ako $g(X)$ i $h(X)$ imaju matematičko očekivanje, za neke funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onda je

$$\mathbb{E}\left(g(X) + h(X)\right) = \mathbb{E}\left(g(X)\right) + \mathbb{E}\left(h(X)\right).$$

(c) (2 boda) Za pripremu jela *Hrenovke Stroganoff* potrebno je 10 hrenovki. Svaka hrenovka se s jednakim vjerojatnostima reže na 2, 4 ili 9 duguljastih komada. Odredite očekivani broj komada u jelu.

(d) (3 boda) *Hrenovke Stroganoff* preporučeno je konzumirati uz bijelo vino i dobro društvo. Na večeru dolazi X ljudi, pri čemu je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti u skupu prirodnih brojeva s razdiobom

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{c}{3^n}, \quad \text{za } n = 1, 2, \dots$$

za neku pozitivnu konstantu c. Odredite očekivani broj ljudi koji će prisustvovati večeri.