VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Precizno iskažite Markovljevu i Čebiševljevu nejednakost u slučaju diskretnih slučajnih varijabli.

(b) (3 boda) Dokažite Čebiševljevu nejednakost za diskretnu slučajnu varijablu.

(c) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}\,(|X|) = 0$. Pokažite da onda nužno vrijedi $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

(d) (3 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s očekivanjem 50 i varijancom 25. Pokažite da je $\mathbb{P}(40 < X < 70) \geq 7/9$.

Rješenje.

(a) Neka je X diskretna slučajna varijabla koja ima očekivanje. Tada vrijedi Markovljeva nejednakost:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\,(|X|)}{a}, \qquad a > 0.$$

Ako X ima varijancu, onda vrijedi Čebiševljeva nejednakost:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}\,(X)| \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{a^2}, \qquad a > 0.$$

(b) Za $a > 0$ imamo

$$(X - \mathbb{E}\,(X))^2 \geq a^2 1_{\{(X-\mathbb{E}\,(X))^2 \geq a^2\}}.$$

Sada, koristeći monotonost očekivanja, imamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,(X) &= \mathbb{E}\,((X - \mathbb{E}\,(X))^2) \geq \mathbb{E}\,(a^2 1_{\{(X-\mathbb{E}\,(X))^2 \geq a^2\}}) = a^2\mathbb{P}((X - \mathbb{E}\,(X))^2 \geq a^2) \\ &= a^2\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}\,(X)| \geq a).\end{aligned}$$

(c) Za svaki $n \in \mathbb{N}$, iz Markovljeve nejednakosti, imamo

$$\mathbb{P}(|X| \geq 1/n) = 0.$$

Stavimo $B_n := \{|X| \geq 1/n\}$ i $B := \{X \neq 0\} = \{|X| > 0\}$. Očito $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Dakle,

$$\mathbb{P}(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

(d) Imamo,

$$\mathbb{P}(40 < X < 70) = \mathbb{P}(|X - 55| < 15) = 1 - \mathbb{P}(|X - 55| \geq 15) = 1 - \mathbb{P}((X - 55)^2 \geq 15^2).$$

Primjenom Markovljeve nejednakosti dobivamo

$$\mathbb{P}(40 < X < 70) \geq 1 - \frac{\mathbb{E}\,((X - 55)^2)}{15^2} = 1 - \frac{\mathrm{Var}\,(X) + (\mathbb{E}\,(X) - 55)^2}{15^2} = \frac{7}{9}.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable. Definirajte koeficijent korelacije od X i Y.

(b) (3 boda) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable takve da vrijedi $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Dokažite da tada vrijedi $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

(c) Neka je X Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{2}$, Y Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{3}$ te neka su X i Y nezavisne. Neka je $Z = 1_{\{X+Y=0\}}$, $W = X - Y$.

(c1) (2 boda) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (Z,W).

(c2) (2 boda) Izračunajte $\mathrm{Cov}(Z,W)$.

(c3) (1 bod) Izračunajte $\mathbb{E}[Z|W=0]$.

Rješenje.

(a) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable takve da vrijedi $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Korelacija ili koeficijent korelacije od X i Y definira se kao

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}},$$

pri čemu je $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$.

(b) Označimo $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$, $\sigma_Y = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) &= \frac{\mathrm{Var}(X)}{\sigma_X^2} + \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\sigma_Y^2} + 2\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \\ &= 2 + 2\rho(X,Y) = 2(1+\rho(X,Y)), \end{aligned}$$

iz čega slijedi $\rho(X,Y) \geq -1$. Analogno, iz

$$\mathrm{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \geq 0$$

slijedi $\rho(X,Y) \leq 1$, iz čega slijedi zaključak.

(c) (c1) Uočimo da Z poprima vrijednosti u skupu $\{0,1\}$, W poprima vrijednosti u skupu $\{-1,0,1\}$ te vrijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=0, W=-1) = \mathbb{P}(X=0, Y=1) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \\ \mathbb{P}(Z=0, W=0) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \\ \mathbb{P}(Z=0, W=1) = \mathbb{P}(X=1, Y=0) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(Z=1, W=0) = \mathbb{P}(X=0, Y=0) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{P}(Z=1, W=-1) = \mathbb{P}(Z=1, W=1) &= 0. \end{aligned}$$

Distribucija slučajnog vektora (Z,W) dana je tablicom

$Z\|W$	-1	0	1	f_Z
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
f_W	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

Slijedi da je funkcija gustoće slučajnog vektora (Z,W) dana sa:

$$f_{Z,W}(z,w) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{za } (z,w) = (0,-1), (z,w) = (0,0), \\ \frac{1}{3}, & \text{za } (z,w) = (0,1), (z,w) = (1,0), \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(c2)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(ZW) &= 0 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} = 0, \\ \mathbb{E}\,(Z) &= 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}\,(W) &= (-1) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \\ \operatorname{Cov}(Z,W) &= \mathbb{E}\,(ZW) - \mathbb{E}\,(Z)\mathbb{E}\,(W) = 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{18}. \end{aligned}$$

(c3)

$$\mathbb{E}\,[Z|W=0] = 0 \cdot \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} + 1 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Precizno definirajte pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable.

(b) (3 boda) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s derivabilnom funkcijom distribucije F_X te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća i derivabilna funkcija. Pokažite da je i $g(X)$ apsolutno neprekidna slučajna varijabla te odredite njenu funkciju gustoće.

(c) (2 boda) Neka je funkcija distribucije F apsolutno neprekidne slučajne varijable X dana sa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ c - x^{-2}, & x > 1. \end{cases}$$

Odredite konstantu c, odredite pripadnu funkciju gustoće te izračunajte $\mathbb{E}(X)$. Što možete reći o varijanci od X?

(d) (3 boda) Iz segmenta duljine $l > 0$ na slučajan način biramo točku. Odredite vjerojatnost da je omjer kraćeg i dužeg segmenta (određenih slučajno odabranom točkom i rubovima segmenta) manji od $1/3$.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla X definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je apsolutno neprekidna ako postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ takva da $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Budući je F_X derivabilna imamo $F'_X = f_X$, gdje je f_X pripadna funkcija gustoće. Nadalje, neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pripadni vjerojatnosni prostor. Sada imamo

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(g(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \geq g^{-1}(x)) = 1 - \mathbb{P}(X \leq g^{-1}(x)) = 1 - F_X(g^{-1}(x)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Vidimo da je F_Y derivabilna kao kompozicija dvije derivabilne funkcije. Dakle, gustoća od Y je dana sa

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = -F'_X(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = -f_X(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Zbog neprekidnosti očito vrijedi da je $c = 1$ (ili iz činjenice da mora biti $F(\infty) = 1$). Nadalje, pripadna gustoća je

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 2x^{-3}, & x > 1. \end{cases}$$

Sada imamo

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{x^2} = 2.$$

S druge strane, varijanca ne postoji jer

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{2}{x} = \infty.$$

(d) Neka X označava slučajno odabranu točku u segmentu $[0, l]$. Očito $X \sim U(0, l)$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \text{tražena vjerojatnost} &= \mathbb{P}(X \leq l - X,\ X/(l - X) < 1/3) + \mathbb{P}(l - X \leq X,\ (l - X)/X < 1/3) \\ &= \mathbb{P}(X \leq l/2,\ X < l/4) + \mathbb{P}(X \geq l/2,\ X > 3l/4) \\ &= \mathbb{P}(X < l/4) + \mathbb{P}(X > 3l/4) = 1/2. \end{aligned}$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neke je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (2 boda) Neka je X geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $p \in (0, 1)$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X.

(c) (3 boda) Neka je $(X_j)_{j\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$, te neka je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ nezavisna od niza $(X_j)_{j\geq 1}$. Označimo sa G_{X_1} i G_N funkcije izvodnice slučajnih varijabli X_1 i N. Definiramo $S := \sum_{j=1}^{N} X_j$. Dokažite da je funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable S jednaka kompoziciji $G_N \circ G_{X_1}$. Obrazložite svaki korak dokaza.

(d) (3 boda) Imamo dva simetrična novčića - zlatni i srebrni. Naizmjenično bacamo novčiće počevši sa zlatnim sve dok na zlatnom novčiću ne padne pismo (sva bacanja su međusobno nezavisna). Neka je S broj do tada palih pisama na srebrnom novčiću. Izračunajte vjerojatnosti $\mathbb{P}(S = 0)$ i $\mathbb{P}(S = 1)$.

Rješenje.

(a) Funkcija izvodnica vjerojatnosti definirana je kao

$$G(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)s^n$$

za sve $s \in \mathbb{R}$ za koje je $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)|s|^n < \infty$.

(b) Vrijedi $\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Zato je

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1 - p)^n s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - p)s]^n = \frac{p}{1 - (1 - p)s}$$

gdje red konvergira za $|s| < 1/(1 - p)$.

(c) Za svaki $k \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = k, N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k, N = n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N = n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \mathbb{P}(N = n),
\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili formulu potpune vjerojatnost, a u četvrtoj jednakosti nezavisnost slučajnih varijabli $(X_j)_{j\geq 1}$ i N. Budući da su slučajne varijable $X_1, \dots, X_n$ nezavisne i jednako distribuirane, po Teoremu 7.7 (b) vrijedi $G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s) = G_{X_1}(s)^n$, $|s| \leq 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) \mathbb{P}(N = n) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(S_n = k\right) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{S_n}(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{X_1}(s)^n \\ &= G_N(G_{X_1}(s)), \qquad |s| \leq 1. \end{aligned}$$

(d) Neka je N broj glava na zlatnom novčiću prije nego što padne prvo pismo. Tada je $N \sim G(1/2)$ geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $1/2$, te je stoga njena funkcija izvodnica vjerojatnosti jednaka

$$G_N(s) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{s}{2}} = \frac{1}{2 - s}, \quad |s| < 2.$$

Za svaki $j \geq 1$ neka je $X_j = 1$ ako je u j-tom bacanju srebrnog novčića palo pismo, te $X_j = 0$ ako je j-tom bacanju srebrnog novčića pala glava. Tada je $(X_j)_{j\geq 1}$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom $p = 1/2$. Funkcija izvodnica vjerojatnosti od X_j jednaka je

$$G_{X_j}(s) = G_{X_1}(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} s \, .$$

Nadalje, $\sum_{j=1}^{N} X_j$ jednako je broju pisama na srebrnom novćiću prije prvog pisma na zlatnom novčiću, tj., $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$. Po dijelu (c) vrijedi

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = \frac{1}{2 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} s)} = \frac{2}{3 - s} \, .$$

Vrijedi: $\mathbb{P}(S = 0) = G_S(0)$ i $\mathbb{P}(S = 1) = G'_S(0)$. Budući da je $G'_S(s) = 2(3 - s)^{-2}$, slijedi

$$\mathbb{P}(S = 0) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(S = 1) = \frac{2}{9} \, .$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Definirajte konvergenciju po distribuciji niza slučajnih varijabli.

(b) (2 boda) Precizno iskažite centralni granični teorem.

(c) (3 boda) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom $\frac{1}{2}$, te neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ za svaki $n \geq 1$. Odredite distribuciju slučajne varijable prema kojoj niz $\left(\frac{2S_n - 5n}{10n}\right)_{n\geq 1}$ konvergira po vjerojatnosti.

(d) (3 boda) Ivica je osmislio inventivan način da uskrati školske kolege za dio njihovog džeparca. Svaki zainteresirani kolega koji mu da 1 kunu zauzvrat dobiva k kuna ukoliko pogodi ishod bacanja Ivičinog simetričnog novčića. Kako bi privukao što više kolega na svoju primamljivu ponudu, Ivica želi odabrati najveći mogući k koji će mu u isto vrijeme pružati sigurnost od barem 95% da će nakon 100 klađenja biti u dobitku od barem 20 kuna. Koju vrijednost za k Ivica treba odabrati?

Rješenje.

(a) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli s pripadnim funkcijama distribucije $(F_n)_{n\geq 1}$, te neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F. Niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji slučajnoj varijabli X, ako za svaku točku x u kojoj je F neprekidna vrijedi

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

(b) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom σ^2, te neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ za sve $n \geq 1$. Tada niz $\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli s distribucijom $N(0,1)$.

(c) Pokazat ćemo da promatrani niz konvergira po vjerojatnosti prema slučajnoj varijabli koja je uvijek jednaka $-\frac{2}{5}$. Doista, za proizvoljni $\epsilon > 0$ imamo

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{2S_n - 5n}{10n} - \left(-\frac{2}{5}\right)\right| > \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{5n} - \frac{1}{10}\right| > \epsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 5\epsilon\right) = 0,$$

pri čemu posljednja jednakost slijedi iz slabog zakona velikih brojeva (Teorem 8.7).

(d) Za svaki $i = 1, \dots, 100$ neka je X_i Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{2}$ koja označava je li pri i-toj okladi Ivičin kolega pogodio ishod bacanja simetričnog novčića. Tada je $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{2}$ i $\mathrm{Var}X_i = \frac{1}{4}$. Uočimo da i-ta oklada mijenja Ivičin dobitak za $1 - kX_i$, pa je ukupni Ivičin dobitak nakon 100 oklada jednak $100 - kS$, pri čemu je $S = X_1 + \cdots + X_{100}$. Koristeći centralni granični teorem imamo

$$\Phi(1.65) = 0.95 \leq \mathbb{P}\left(100 - kS \geq 20\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{100}} \leq \frac{16}{k} - 10\right) \approx \Phi\left(\frac{16}{k} - 10\right).$$

Budući da je Φ rastuća, zaključujemo da je $\frac{16}{k} - 10 \geq 1.65$, odnosno $k \leq 1.37$. Dakle, Ivica za svaku izgubljenu okladu treba isplatiti 1 kunu i 37 lipa.