JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te tablicu funkcije distribucije jedinične normalne razdiobe koja je studentima dana zajedno s kolokvijem.
- Rezultati i rješenja će biti objavljeni do četvrtka, 8. veljače u 22 sata na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 9. veljače u 11 sati u prostoriji 201.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Precizno iskažite Markovljevu i Čebiševljevu nejednakost u slučaju diskretnih slučajnih varijabli.

(b) (3 boda) Dokažite Čebiševljevu nejednakost za diskretnu slučajnu varijablu.

(c) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(|X|) = 0$. Pokažite da onda nužno vrijedi $\mathbb{P}(X = 0) = 1$.

(d) (3 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s očekivanjem 50 i varijancom 25. Pokažite da je $\mathbb{P}(40 < X < 70) \geq 7/9$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable. Definirajte koeficijent korelacije od X i Y.

(b) (3 boda) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable takve da vrijedi $\mathbb{E}\left(X^2\right) < \infty$ i $\mathbb{E}\left(Y^2\right) < \infty$. Dokažite da tada vrijedi $|\rho(X,Y)| \leq 1$.

(c) Neka je X Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{2}$, Y Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $\frac{1}{3}$ te neka su X i Y nezavisne. Neka je $Z = 1_{\{X+Y=0\}}$, $W = X - Y$.

(c1) (2 boda) Odredite funkciju gustoće slučajnog vektora (Z, W).

(c2) (2 boda) Izračunajte $\operatorname{Cov}(Z, W)$.

(c3) (1 bod) Izračunajte $\mathbb{E}\left[Z|W = 0\right]$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Precizno definirajte pojam apsolutno neprekidne slučajne varijable.

(b) (3 boda) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s derivabilnom funkcijom distribucije F_X te neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strogo padajuća i derivabilna funkcija. Pokažite da je i $g(X)$ apsolutno neprekidna slučajna varijabla te odredite njenu funkciju gustoće.

(c) (2 boda) Neka je funkcija distribucije F apsolutno neprekidne slučajne varijable X dana sa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ c - x^{-2}, & x > 1. \end{cases}$$

Odredite konstantu c, odredite pripadnu funkciju gustoće te izračunajte $\mathbb{E}\,(X)$. Što možete reći o varijanci od X?

(d) (3 boda) Iz segmenta duljine $l > 0$ na slučajan način biramo točku. Odredite vjerojatnost da je omjer kraćeg i dužeg segmenta (određenih slučajno odabranom točkom i rubovima segmenta) manji od 1/3.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neke je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (2 boda) Neka je X geometrijska slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $p \in (0, 1)$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X.

(c) (3 boda) Neka je $(X_j)_{j\geq 1}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$, te neka je N slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ nezavisna od niza $(X_j)_{j\geq 1}$. Označimo sa G_{X_1} i G_N funkcije izvodnice slučajnih varijabli X_1 i N. Definiramo $S := \sum_{j=1}^{N} X_j$. Dokažite da je funkcija izvodnica vjerojatnosti slučajne varijable S jednaka kompoziciji $G_N \circ G_{X_1}$. Obrazložite svaki korak dokaza.

(d) (3 boda) Imamo dva simetrična novčića - zlatni i srebrni. Naizmjenično bacamo novčiće počevši sa zlatnim sve dok na zlatnom novčiću ne padne pismo (sva bacanja su međusobno nezavisna). Neka je S broj do tada palih pisama na srebrnom novčiću. Izračunajte vjerojatnosti $\mathbb{P}(S = 0)$ i $\mathbb{P}(S = 1)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 7. veljače 2018.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Definirajte konvergenciju po distribuciji niza slučajnih varijabli.

(b) (2 boda) Precizno iskažite centralni granični teorem.

(c) (3 boda) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom $\frac{1}{2}$, te neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ za svaki $n \geq 1$. Odredite distribuciju slučajne varijable prema kojoj niz $\left(\frac{2S_n - 5n}{10n}\right)_{n\geq 1}$ konvergira po vjerojatnosti.

(d) (3 boda) Ivica je osmislio inventivan način da uskrati školske kolege za dio njihovog džeparca. Svaki zainteresirani kolega koji mu da 1 kunu zauzvrat dobiva k kuna ukoliko pogodi ishod bacanja Ivičinog simetričnog novčića. Kako bi privukao što više kolega na svoju primamljivu ponudu, Ivica želi odabrati najveći mogući k koji će mu u isto vrijeme pružati sigurnost od barem 95% da će nakon 100 klađenja biti u dobitku od barem 20 kuna. Koju vrijednost za k Ivica treba odabrati?