JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do četvrtka, 30. studenog u 21 sat na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 1. prosinca u 11:30 u prostoriji 201.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Precizno definirajte pojam vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (3 boda) Iskažite teorem o neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na neopadajuće i nerastuće nizove događaja. Dokažite da je vjerojatnost neprekidna s obzirom na neopadajuće nizove događaja.

(c) (2 boda) Dva lovca gađaju metu. Vjerojatnost da prvi pogodi je 0.8, vjerojatnost da drugi pogodi je 0.7, a da barem jedan pogodi je 0.9. Kolika je vjerojatnost da prvi pogodi, a drugi ne?

(d) (3 boda) Neka je $\Omega = \mathbb{N}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definirajmo funkciju $\mathbb{P} : \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ sa $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$. Može li se funkcija $\mathbb{P}$ proširiti do vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$? Obrazložite Vaše tvrdnje.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Precizno definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) (3 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a), dokažite da je tada i $A \cap B^c \cap C \in \mathcal{F}$.

(c) (3 boda) Ako je $f\colon X \to Y$ funkcija, te $\mathcal{G}$ neka σ-algebra na Y, dokažite da je tada i

$$\mathcal{F} = \{f^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{G}\}$$

σ-algebra na X.

(d) (2 boda) Ako je $f\colon X \to Y$ funkcija, te $\mathcal{F}$ neka σ-algebra na X, pokažite da tada

$$\mathcal{G} = \{f(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$$

nije nužno σ-algebra na Y.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(B) > 0$. Precizno definirajte uvjetnu vjerojatnost uz dano B te pokažite da je tako definirana funkcija vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Definirajte nezavisnost događaja A i B. Nadalje, neka je $C \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(C) > 0$. Definirajte uvjetnu nezavisnost od A i B uz dano C. Uz koje je uvjete događaj $A \in \mathcal{F}$ nezavisan sam sa sobom? Uz koje je uvjete događaj $A \in \mathcal{F}$ nezavisan sam sa sobom uz dano C? Pokažite da ako je A nezavisan sam sa sobom, onda je nezavisan sam sa sobom uz dano C.

(c) (2 boda) Kuharica zna pripremiti 5 vrsta jela: grah, sarmu, pašticadu, maneštru i čobanac. Tjedan započinje bilo kojim jelom s jednakom vjerojatnošću. Zatim ponavlja jelo od prethodnog dana s vjerojatnošću 0.4 ili s jednakom vjerojatnošću odabire jedno od preostalih jela. Kolika je vjerojatnost da će izbor jela biti sarma, sarma, maneštra, čobanac i čobanac?

(d) (3 boda) Simetrična kocka ima četiri strane obojene crnom bojom te dvije bijelom. Kocka je bačena 5 puta. Odredite vjerojatnost da se crna boja nije pojavila dva puta zaredom u tih 5 bacanja.

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 4.

(a) U ćeliji je 10 zatvorenika, pri čemu su svaka dvojica različite visine. Policajac na slučajan način odabere četiri zatvorenika i poreda ih u red za prepoznavanje.

  (a1) (3 boda) Kolika je vjerojatnost da su zatvorenici poredani po visini, od višeg prema nižem?

  (a2) (3 boda) Policijski nadzornik nakon toga razmješta zatvorenike po visini tako da stoje poredani od višeg prema nižem. Kolika je vjerojatnost da je u tom razmještanju barem jedan zatvorenik ostao na istom mjestu u redu gdje je i bio?

(b) (4 boda) Nakon prepoznavanja zatvorenici idu na večeru. Ivica, Zdravko i još 8 zatvorenika sjedaju za okrugli stol na slučajan način. Kolika je vjerojatnost da Ivica i Zdravko ne sjede jedan do drugoga, ali da su najviše tri čovjeka između njih?

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s diskretnom vjerojatnosnom funkcijom gustoće f_X. Precizno definirajte pojam matematičkog očekivanja slučajne varijable X.

(b) (3 boda) Pretpostavite da je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ prebrojiv skup, te $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije slučajne varijable na Ω koje imaju matematičko očekivanje. Dokažite da tada i slučajna varijabla $X + Y$ ima matematičko očekivanje te da vrijedi $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

(c) (2 boda) Igrač se kladi na jedan od brojeva između 1 i 6. Bace se tri (simetrične) igraće kocke. Ako se broj na koji se igrač kladio pojavi i puta, $i = 1, 2, 3$, igrač dobiva i kuna. Ako se broj na koji se igrač kladio ne pojavi niti na jednoj kocki, igrač gubi 1 Kn. Neka je X slučajni dobitak (gubitak) igrača. Izračunajte $\mathbb{E}(X)$.

(d) (3 boda) Neka je X broj fiksnih točaka slučajne permutacije skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Nađite $\mathbb{E}(X)$. (Uputa: napišite X kao zbroj od n jednostavnijih slučajnih varijabli.)