VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 1. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Neka su X_1, X_2, X_3 slučajne varijable s vrijednostima u skupu $\mathbb{N}_0$. Precizno definirajte što znači da su X_1, X_2, X_3 nezavisne.

(b) Tijekom radnog tjedna (koji traje 5 dana), Marko svaki dan naručuje jedno od triju jela: pizzu margheritu, špagete bolognese ili varivo od mahuna. Pritom svaki dan nezavisno na slučajan način bira koje će jelo naručiti, s vjerojatnostima redom $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$ za navedena jela. Neka su X, Y, Z slučajne varijable koje redom označavaju koliko je puta Marko naručio pojedino jelo.

(b1) (*3 boda*) Koja je distribucija slučajnog vektora (X, Y, Z)? Izračunajte vjerojatnost da je Marko dva puta naručio pizzu, dva puta špagete i jednom varivo.

(b2) (*5 bodova*) Odredite $\operatorname{Cov}(Y, Z)$. Jesu li Y i Z nezavisne?

(b3) (*3 boda*) Odredite $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Rješenje.

(a) Kažemo da su X_1, X_2, X_3 nezavisne ako za sve $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)\mathbb{P}(X_3 = x_3).$$

(b1) Slučajni vektor (X, Y, Z) ima polinomijalnu distribuciju s parametrima $(5, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Dakle, tražena vjerojatnost iznosi

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 2, Z = 1) = \frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{15}{128}.$$

(b2) Neka su A_i, B_i redom događaji da je Marko i-ti dan naručio špagete, odnosno varivo, za $1 \leq i \leq 5$. Tada je $Y = \sum_{i=1}^5 1_{A_i}$, $Z = \sum_{i=1}^5 1_{B_i}$ pa iz bilinearnosti kovarijance slijedi

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(Y, Z) &= \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^5 1_{A_i}, \sum_{j=1}^5 1_{B_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \operatorname{Cov}(1_{A_i}, 1_{B_j}) \\
&= \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 [\mathbb{P}(A_i \cap B_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)] \\
&= \sum_{i=1}^5 [\mathbb{P}(A_i \cap B_i) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_i)] \\
&= 5 \cdot \left(0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) \\
&= -\frac{5}{16},
\end{aligned}$$

pri čemu smo u četvrtoj jednakosti koristili da su događaji A_i, B_j nezavisni za $i \neq j$. Kako nezavisnost povlači nekoreliranost, zaključujemo da Y i Z nisu nezavisne.

Napomena. Kovarijancu je bilo moguće izračunati i koristeći formulu $\mathrm{Cov}\,(Y, Z) = \mathbb{E}\,[YZ] - \mathbb{E}\,[Y]\mathbb{E}\,[Z]$. Zbog $Y, Z \sim B(5, \frac{1}{4})$ imamo $\mathbb{E}\,[Y] = \mathbb{E}\,[Z] = \frac{5}{4}$, dok za $\mathbb{E}\,[YZ]$ vrijedi

$$\mathbb{E}\,[YZ] = \sum_{y,z \in \mathbb{N}_0} yz f_{Y,Z}(y, z) = \sum_{y,z \in \mathbb{N},\ y+z \leq 5} yz f_{X,Y,Z}(5 - y - z, y, z)$$

Diskretna funkcija gustoće $f = f_{X,Y,Z}$ simetrična je u zadnja dva argumenta pa je traženo očekivanje

$$1 \cdot 1 \cdot f(3, 1, 1) + 2 \cdot 2 \cdot f(1, 2, 2) + 2(1 \cdot 2 \cdot f(2, 1, 2) + 1 \cdot 3 \cdot f(1, 1, 3) + 1 \cdot 4 \cdot f(0, 1, 4) + 2 \cdot 3 \cdot f(0, 2, 3)),$$

za što računanjem kao u dijelu (b1) dobivamo da iznosi $\frac{5}{4}$. Na kraju, $\mathrm{Cov}\,(Y, Z) = \frac{5}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}$.

Napomena. Da Y i Z nisu nezavisne, bilo je moguće pokazati i direktno po definiciji, npr. jasno je da

$$\mathbb{P}(Y = 5, Z = 5) = 0 \neq \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \mathbb{P}(Y = 5)\mathbb{P}(Z = 5).$$

(b3) Uočimo da X poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Za x iz tog skupa, uvjetna distribucija od Y uz dano $X = x$ je binomna s parametrima $5 - x$ i $\frac{1}{2}$. Zaista, ako fiksiramo kojih je x dana Marko naručio pizzu, tada je za svaki od preostalih $5 - x$ dana vjerojatnost da je Marko taj dan naručio špagete jednaka $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, te su ti događaji nezavisni. Dakle, $\mathbb{E}\,[Y \mid X = x] = \frac{5-x}{2}$ pa slijedi $\mathbb{E}\,[Y \mid X] = \frac{5-X}{2}$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 2. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno definirajte kada kažemo da postoji funkcija izvodnica momenata M proizvoljne slučajne varijable X, te ju definirajte u tom slučaju.

(b) (*2 boda*) Odredite (ako postoji) funkciju izvodnicu momenata standardne normalne slučajne varijable.

(c) Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da X_n ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom n, $n \geq 1$.

(c1) (*2 boda*) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $M_n := \max\{X_1, \dots, X_n\}$, za sve $n \geq 1$.

(c2) (*2 boda*) Odredite očekivanje slučajne varijable $L_n := \min\{X_1, \dots, X_n\}$, za sve $n \geq 1$.

(d) (*5 bodova*) Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, ali takvih da su $X_1, X_3, \dots$ jednako distribuirane sa očekivanjem $\mu_1 := \mathbb{E}[X_1]$ i varijancom $0 < \sigma_1^2 := \mathrm{Var}(X_1) < \infty$, te $X_2, X_4, \dots$ jednako distribuirane sa očekivanjem $\mu_2 := \mathbb{E}[X_2]$ i varijancom $0 < \sigma_2^2 := \mathrm{Var}(X_2) < \infty$; dakle, X_{2k} i X_{2k+1} nemaju nužno istu razdiobu. Pretpostavimo da postoje funkcije izvodnice momenata od X_1 i X_2. Ako je $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, odredite konstante a_{2n} i b_{2n} tako da niz $Z_n := \frac{S_{2n} - a_{2n}}{b_{2n}}$, $n \geq 1$ konvergira po distribuciji prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli. Precizno dokažite!
Uputa: Smijete koristiti sve tvrdnje dokazane na predavanjima.

Rješenje.

(a) i (b) Vidi predavanja.

(c1) Vrijedi

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = [\text{nezavisnost}] = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdots \mathbb{P}(X_n \leq x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{-kx}), \quad x > 0,$$

te $F_{M_n}(x) = 0$ za $x \leq 0$.

(c2) Slično kao u (c1) imamo da je

$$\mathbb{P}(L_n \leq x) = 1 - \mathbb{P}(L_n > x) = 1 - \prod_{k=1}^{n} e^{-kx} = e^{-\sum_{k=1}^{n} k \cdot x}, \quad x > 0$$

pa slijedi da je L_n ponovno eksponencijalna s parametrom $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dakle,

$$\mathbb{E}[L_n] = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

(d) Neka je $S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n X_{2k-1}, S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n X_{2k}$, $n \geq 1$ – tada vrijedi $S_{2n} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$. Tvrdimo da je jedan izbor konstanti

$$\begin{aligned} a_{2n} &:= \mathbb{E}\,[S_{2n}] = \mathbb{E}\,[S_n^{(1)}] + \mathbb{E}\,[S_n^{(2)}] = n\mu_1 + n\mu_2\,, \\ b_{2n}^2 &:= \mathrm{Var}\,(S_{2n}) = \mathrm{Var}\,[S_n^{(1)}] + \mathrm{Var}\,[S_n^{(2)}] = n\sigma_1^2 + n\sigma_2^2\,, \end{aligned}$$

pri čemu smo kod računanja varijance (dva puta) koristili nezavisnost. Sada imamo

$$\begin{aligned} Z_n := \frac{S_{2n} - a_{2n}}{b_{2n}} &= \frac{\sqrt{n\sigma_1^2}}{\sqrt{n\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}} \cdot \frac{S_n^{(1)} - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}} + \frac{\sqrt{n\sigma_2^2}}{\sqrt{n\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}} \cdot \frac{S_n^{(2)} - n\mu_2}{\sqrt{n\sigma_2^2}} \\ &=: \underbrace{\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}_{=:w_1} Z_n^{(1)} + \underbrace{\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}_{=:w_2} Z_n^{(2)}\,. \end{aligned}$$

Iz CGT-a znamo da niz $(Z_n^{(i)})_n$ po distribuciji konvergira prema $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, za $i = 1, 2$. Htjeli bismo zaključiti da niz $(Z_n)_n$ konvergira po distribuciji prema $Z := w_1 Z^{(1)} + w_2 Z^{(2)}$ gdje su $Z^{(1)}, Z^{(2)}$ nezavisne $\mathrm{N}(0,1)$ slučajne varijable – iz svojstava normalne razdiobe i $w_1^2 + w_2^2 = 1$, slijedi da je $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Kako bismo to zaključili, koristimo teorem neprekidnosti.

Iz (dokaza) CGT-a znamo da $M_{Z_n^{(i)}}(t) \to M_Z(t) = e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, kada $n \to \infty$, za $i = 1, 2$, pa budući da su $Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}$ nezavisne za sve n, imamo

$$M_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\,[e^{tZ_n}] = M_{Z_n^{(1)}}(tw_1) \cdot M_{Z_n^{(2)}}(tw_2) \longrightarrow e^{t^2 w_1^2/2 + t^2 w_2^2/2} = e^{-\frac{t^2}{2}}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Iz teorema neprekidnosti slijedi da niz $(Z_n)_n$ konvergira po distribuciji prema $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Alternativno (i puno bolje), ako definiramo $Y_k := X_{2k-1} + X_{2k}$, $k \geq 1$, slučajne varijable $(Y_k)_{k\geq 1}$ su njd sa očekivanjem $\mathbb{E}\,[Y_1] = \mu_1 + \mu_2$ te varijancom $\mathrm{Var}\,(Y_1) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \in (0, \infty)$ (zbog nezavisnosti X_1 i X_2). Budući da je $S_{2n} = \sum_{k=1}^n Y_k$, CGT za niz $(Y_k)_k$ povlači da

$$\frac{S_{2n} - n(\mu_1 + \mu_2)}{\sqrt{n(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \xrightarrow{d} Z\,.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 3. (*12 bodova*)

(a) (*3 boda*) Definirajte funkciju distribucije F proizvoljne slučajne varijable X i pokažite da je

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1\,.$$

(b) Neka je funkcija distribucije F apsolutno neprekidne slučajne varijable X dana sa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ a - 8x^{-3}, & x > 2. \end{cases}$$

(b1) (*4 boda*) Odredite konstantu a, odredite pripadnu funkciju gustoće, te izračunajte $\mathbb{E}\,(X)$.

(b2) (*2 boda*) Neka je $Y := \min\{4, X\}$. Je li Y apsolutno neprekidna slučajna varijabla? Detaljno obrazložite odgovor.

(c) (*3 boda*) Neka je $X \sim N(4, \sigma^2), \sigma > 0$. Ako znamo da je $\Phi(0.25) = 0.6$, nađite σ tako da vrijedi $\mathbb{P}((X-2)(X-6) \geq 0) = 0.8$.

Rješenje.

(a) Pogledati predavanja.

(b1) Iz $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ odmah slijedi da je $a = 1$. Funkcija gustoće je

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 24x^{-4}, & x > 2. \end{cases}$$

Sada imamo

$$\mathbb{E}\,(X) = \int_2^\infty 24x^{-3}dx = 3.$$

(b2) Y nije apsolutno neprekidna slučajna varijabla jer $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X > 4) \neq 0$.

(c) Označimo s $Z := \frac{X-4}{\sigma}$. Znamo $Z \sim N(0,1)$. Sada imamo

$$\mathbb{P}((X-2)(X-6) \geq 0) = \mathbb{P}(X \leq 2) + \mathbb{P}(X \geq 6) = \mathbb{P}(Z \leq \frac{-2}{\sigma}) + \mathbb{P}(Z \geq \frac{2}{\sigma}) = 2 - 2\Phi(\frac{2}{\sigma}).$$

Iz $2 - 2\Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.8$, dobijemo da mora vrijediti $\Phi(\frac{2}{\sigma}) = 0.6$, odnosno $\frac{2}{\sigma} = 0.25$. Dakle, $\sigma = 8$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 4. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno definirajte pojam konvergencije po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli.

(b) (*4 boda*) Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}[X_i] = 0$ te $\mathrm{Var}(X_i) \leq 5$, za sve $i \in \mathbb{N}$; ne pretpostavljamo da je $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_j)$, za sve $i \neq j$. Iskažite i precizno dokažite slabi zakon velikih brojeva u ovom slučaju.

(c) (*2 boda*) Neka je X nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pronađite konstantu $c > 0$ tako da vrijedi

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq c\mathbb{E}(X^4).$$

(d) (*4 boda*) Neka je $(X_n)_{n \geq 1}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, za koje vrijedi

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2n^3} & 1 - \frac{1}{n^3} & \frac{1}{2n^3} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Konvergira li zadani niz slučajnih varijabli gotovo sigurno?

Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Rješenje.

(a) Pogledati materijale s predavanja.

(b) Trebamo dokazati da vrijedi

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Tada vrijedi $\mathbb{E}[S_n/n] = 0$, zbog nezavisnosti

$$\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \leq \frac{n \cdot 5}{n^2} = \frac{5}{n}.$$

Primjenom Čebiševljeve nejednakosti, za proizvoljan $\epsilon > 0$, imamo

$$\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n}| > \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2} \leq \frac{5}{n\epsilon^2},$$

što teži u nulu kada n teži u ∞. Dakle, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

(c) Koristeći Markovljevu nejednakost za proizvoljnu nenegativnu slučajnu varijablu imamo

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(X^4 \geq 16) \leq \frac{\mathbb{E}(X^4)}{16},$$

iz čega zaključujemo da je $c = \frac{1}{16}$.

(d) Pokažimo prvo da zadani niz konvergira po vjerojatnosti prema 0. Neka je $\epsilon \in (0, 2)$. Tada je

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(\{X_n = -2\} \cup \{X_n = 2\}) = \frac{1}{n^3} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} = 0.$$

Dakle, zadani niz konvergira po vjerojatnosti prema 0. Ako niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira g.s., onda zbog gore pokazanog konvergira g.s. prema slučajnoj varijabli $X = 0$. Stavimo $A_n = \{|X_n| > 1/2\}$. Vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}. \tag{1}$$

Gornji red konvergira, pa po Borel-Cantellijevoj lemi vrijedi $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, pa uzimanjem komplementa $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty}(\{X_n = 0\})) = 1$. To znači da je vjerojatnost skupa svih $\omega \in \Omega$ takvih da je $X_n(\omega) = 0$ za sve osim konačno mnogo n jednaka 1. Dakle, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ g.s.