

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

- Dozvoljeno je koristiti pribor za pisanje i brisanje i kalkulator.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do utorka, 23. veljače u 12 sati na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se online.

Zadatak 1.

- (a) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable za koje je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.
- (a1) [2 boda] Definirajte koeficijent korelacije ρ slučajnog vektora (X, Y) .
- (a2) [2 boda] Pokažite da je $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.
- (a3) [3 boda] Ako je $\rho(X, Y) = -1$, što to znači za slučajne varijable X i Y ? Pokažite i detaljno obrazložite.
- (b) [3 boda] Na stolu su četiri karte; dvije su crne (dama i as) i dvije su crvene (dama i desetka). Na slučajan način istovremeno okrećemo dvije karte. Neka slučajna varijabla X modelira broj okrenutih crnih karata, a slučajna varijabla Y broj okrenutih asova. Odredite $\mathbb{E}(XY)$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 2.

- (a) [2 boda] Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s diskretnom vjerojatnosnom funkcijom gustoće f . Definirajte uvjetnu diskretnu funkciju gustoće slučajne varijable X uz dano $Y = y$.
- (b) [3 boda] Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable, X Poissonova s parametrom 3, Y Poissonova s parametrom 2 te neka je $Z := X + Y$. Nađite (tj. izračunajte i prepoznajte) uvjetnu distribuciju slučajne varijable X uz dano $Z = 4$. (Bez dokaza možete koristiti rezultat o funkciji gustoće slučajne varijable Z .)
- (c) [3 boda] Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor takav da postoje $\mathbb{E}(X)$ i $\mathbb{E}(X|Y)$. Dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X).$$

- (d) [2 boda] Simetrična igraća kocka baca se 20 puta. Neka je X_i broj koji je pao u i -tom bacanju, $i = 1, 2, \dots, 20$. Označimo sa $S_n = X_1 + \dots + X_n$, zbroj brojeva u prvih n bacanja, $n = 1, 2, \dots, 20$. Izračunajte

$$\mathbb{E}[S_{10}|S_{20} = 66].$$

Detaljno obrazložite svoj odgovor.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 3.

- (a) [2 boda] Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f . Precizno definirajte pojam matematičkog očekivanja od X .
- (b) [3 boda] Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f , funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Dokažite da vrijedi $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - \mathbb{P}(X \leq x)) dx$.
- (c) [3 boda] Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} c - cx^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunajte konstantu c i funkciju distribucije slučajne varijable X .

- (d) [2 boda] Neka je $X \sim N(0, 4)$. Nađite sve realne brojeve $c > 0$ za koje vrijedi

$$\mathbb{P}(X^2 \leq c) \geq 0.901.$$

Detaljno obrazložite svoj odgovor.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 4.

- (a) [2 boda] Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X .
- (b) [3 boda] Neka su $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ i $Y \sim P(5)$ dvije nezavisne slučajne varijable. Neka je Z diskretna slučajna varijabla definirana sa $Z := 2X + Y$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable Z .
- (c) [2 boda] Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$ čija je funkcija izvodnica vjerojatnosti dana formulom $G_X(s) = \frac{1+2s}{4-s}$, $|s| \leq 1$. Izračunajte $\mathbb{E}[X]$ i $\text{Var } X$.
- (d) [3 boda] U toku jednog sata na autobusni kolodvor u Zagrebu dolaze putnički autobusi na način da je broj dolazaka autobusa slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu s parametrom 15. Autobusi koji dolaze imaju 56 putnika s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$, 45 putnika s vjerojatnošću $\frac{1}{6}$ i 30 putnika s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Izračunajte očekivani ukupan broj putnika koji dolaze u toku jednog sata na autobusni kolodvor u Zagrebu.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 5.

- (a1) [2 boda] Precizno iskažite slabi zakon velikih brojeva.
- (a2) [2 boda] Dokažite slabi zakon velikih brojeva.
- (b) [3 boda] Asistent Ivan treba ispraviti 50 ispita te ih ispravlja jedan za drugim. Vremena potrebna za ispravljanje tih ispita su nezavisna i sva imaju istu distribuciju s očekivanjem 15 minuta i standardnom devijacijom 5 minuta. Nađite približnu vjerojatnost da će asistent ispraviti sve ispite za manje od 12 sati ispravljanja.
- (c) [3 boda] Neka je $(X_n)_{n \geq 1}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Distribucija slučajne varijable X_n dana je tablicom

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2n^\alpha} & 1 - \frac{1}{n^\alpha} & \frac{1}{2n^\alpha} \end{pmatrix}$$

gdje je $\alpha \in (0, \infty)$. O ovisnosti o parametru α , ispitajte konvergira li niz $(X_n)_{n \geq 1}$ po vjerojatnosti i/ili gotovo sigurno.