VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2020.

Zadatak 1.

(a) [3 boda] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Koristeći samo aksiome vjerojatnosti, dokažite da je $\mathbb{P}$ monotona: ako su $A, B \in \mathcal{F}$ takvi da je $A \subset B$, tada vrijedi $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(b) [3 boda] Neka je $(A_n)_{n\geq 1}$ niz događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvih da je $\mathbb{P}(A_n) = 1$ za sve $n \geq 1$. Dokažite da je tada i $\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$.

(c) [2 boda] Neka je $(A_n)_{n\geq 1}$ niz događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvih da je $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. Izračunajte $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

(d) [2 boda] Postotak ljudi u nekom gradu koji voli jazz je 35%, koji voli klasičnu glazbu također 35%, a 15% ih voli i jazz i klasičnu glazbu. Nađite vjerojatnost da slučajno odabrana osoba iz tog grada voli klasičnu glazbu, ali ne voli jazz.

Rješenje.

(a) (i) [1 bod] Vrijedi $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Zaista, neka je $p = \mathbb{P}(\emptyset)$. Definiramo $A_n = \emptyset$, $n \geq 1$. Zbog aksioma (A3) (σ-aditivnost) vrijedi

$$p = \mathbb{P}(\emptyset) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p$$

što je moguće samo ako je $p = 0$.

(ii) [1 bod] Konačna aditivnost: neka su $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tada je $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$. Zaista, definiramo $A_n = \emptyset$, $n \geq 3$,. Tada je $(A_n)_{n\geq 1}$ niz po parovima disjunktnih događaja, po po aksiomu (A3) (σ-aditivnost) vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = P(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \sum_{n=3}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti iskoristili da je $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(iii) [1 bod] Neka su $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$. Tada je $B = A \cup (B \setminus A)$, $B \setminus A \in \mathcal{F}$, te su A i $B \setminus A$ disjunktni. Zbog konačne aditvnosti je

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$$

gdje smo iskoristili da je zbog aksioma (A1) $\mathbb{P}(B \setminus A) \geq 0$.

(b) Budući da je $\mathbb{P}(A_n) = 1$, slijedi da je $\mathbb{P}(A_n^c) = 1 - \mathbb{P}(A_n) = 0$ za sve $n \geq 1$. Po svojstvu σ-subaditivnosti vjerojatnosti vrijedi

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1} A_n^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 0.$$

Zbog de Morganovih zakona je

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - \mathbb{P}((\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^c) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) = 1 - 0 = 1.$$

Alternativno rješenje: prvo pokazujemo da ako su $C, D \in \mathcal{F}$ takvi da je $P(C) = \mathbb{P}(D) = 1$, tada je i $\mathbb{P}(C \cap D) = 1$. Zaista, zbog monotonosti vjerojatnosti je $\mathbb{P}(C \cup D) \geq \mathbb{P}(C) = 1$, pa je i $\mathbb{P}(C \cup D) = 1$. Nadalje,

$$\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cup D) = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Vratimo se na pretpostavke zadatka. Indukcijom slijedi da je $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = 1$ za sve $n \geq 1$. Stavimo $B_n := A_1 \cap \cdots \cap A_n$. Tada je $(B_n)_{n \geq 1}$ nerastući niz događaja, $\mathbb{P}(B_n) = 1$ za sve $n \geq 1$, te $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Iz neprekidnosti vjerojatnosti na nerastući niz događaja slijedi da je

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}(\cap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(B_n) = 1.$$

Napomene: (1) Niz događaja $(A_n)_{n \geq 1}$ ne mora biti nerastući (a ni neopadajući); (2) Nije pretpostavljeno da su događaji $(A_n)_{n \geq 1}$ nezavisni pa se ne može koristiti obrat Borel-Cantellijeve leme; (3) Iz $\mathbb{P}(A_n) = 1$ ne slijedi da je $A_n = \Omega$.

(c) Vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty.$$

Konvergencija reda može se pokazati na sljedeće načine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{N \to \infty} \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = 1$$

ili

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

po npr. integralnom kriteriju.

Sada po Borel-Cantellijeovoj lemi (Lema 1.11) slijedi da je $\mathbb{P}(\limsup_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

Napomene: Niz događaja $(A_n)_{n \geq 1}$ ne mora biti nerastući iako je niz vjerojatnosti $(\mathbb{P}(A_n))_{n \geq 1}$ opadajući.

(d) Stavimo $A = \{$slučajno odabrana osoba voli jazz$\}$ i $B = \{$slučajno odabrana osoba voli klasičnu glazbu$\}$. Dano je $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 0.35$ i $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.15$. Traži se $\mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B \setminus A)$.

Zbog $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$ slijedi $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.35 - 0.15 = 0.2$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2020.

Zadatak 2.

(a) [2 boda] Definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) [3 boda] Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a) dokažite da je tada i $(A \cup B^c) \backslash C \in \mathcal{F}$.

(c) [3 boda] Neka je $f\colon X \to Y$ funkcija, $\mathcal{G}$ neka σ-algebra na Y, te $A \in \mathcal{G}$. Dokažite da je tada i

$$\mathcal{F} = \{f^{-1}(B \cap A) : B \in \mathcal{G}\}$$

σ-algebra na $f^{-1}(A)$.

(d) [2 boda] Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Nadopunite familiju $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ do najmanje σ-algebre na Ω koja sadrži elemente familije $\mathcal{F}$.

Rješenje.

(a) Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se σ-algebra (ili σ-algebra događaja), ako vrijede sljedeća tri svojstva:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(ii) Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement);

(iii) Ako su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije).

(b) Uočimo da vrijedi $(A \cup B^c)\backslash C = (A \cup B^c) \cap C^c = ((A \cup B^c)^c \cup C)^c$.
Kako je $B \in \mathcal{F}$ onda slijedi po (ii) da je i $B^c \in \mathcal{F}$. Kako je $\emptyset = \Omega^c$, iz (i) i (ii) zaključujemo da je i $\emptyset \in \mathcal{F}$. Ako definiramo $A_1 = A, A_2 = B^c, A_j = \emptyset$, za $j \geq 3$, onda će po (iii) slijediti da je i $A \cup B^c = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$. Iz ovoga primjenom (ii) dobijemo i da je $(A \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$. Uz $A_1 = (A \cup B^c)^c, A_2 = C, A_j = \emptyset$, za $j \geq 3$ iz (iii) slijedi da je $(A \cup B^c)^c \cup C \in \mathcal{F}$, pa je konačno prema (ii) i $(A \cup B^c)\backslash C = (A \cup B^c) \cap C^c = ((A \cup B^c)^c \cup C)^c \in \mathcal{F}$.

(c) Provjerimo da su ispunjena svojstva (i),(ii) i (iii) iz definicije.

(i) Kako vrijedi $f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \cap A)$ i $Y \in \mathcal{G}$ jer je $\mathcal{G}$ σ-algebra, to je onda po definiciji familije $\mathcal{F}$ i $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

(ii) Neka je $C \in \mathcal{F}$. Moramo pokazati i da je $f^{-1}(A)\backslash C \in \mathcal{F}$. Kako je $C \in \mathcal{F}$, to onda znači da postoji $B \in \mathcal{G}$ takva da vrijedi $C = f^{-1}(B \cap A)$. Sada imamo $f^{-1}(A)\backslash C = f^{-1}(A) \cap C^c = f^{-1}(A) \cap (f^{-1}(B \cap A))^c = f^{-1}(A) \cap (f^{-1}((B \cap A)^c)) = f^{-1}(A \cap ((B \cap A)^c)) = f^{-1}(A \cap B^c)$. Kako je $B \in \mathcal{G}$ i $\mathcal{G}$ je σ-algebra na Y, to je i $B^c \in \mathcal{G}$, pa po definiciji familije $\mathcal{F}$ je $f^{-1}(A)\backslash C \in \mathcal{F}$.

(iii) Neka su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$. Po definiciji to znači da postoje $B_j \in \mathcal{G}$, $j \in \mathbb{N}$, takvi da vrijedi $A_j = f^{-1}(A \cap B_j)$. Sada imamo $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A \cap B_j) = f^{-1}(\bigcup_{j=1}^{\infty}(A \cap B_j)) = f^{-1}(A \cap (\cup_{j=1}^{\infty} B_j))$. Kako je $\cup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{G}$, to je onda $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

(d) Najmanja σ-algebra koja sadrži ovu familiju mora sadržavati $\emptyset$ i Ω, kao i sve komplemente i unije skupova. Tražena najmanja σ-algebra je

$$\{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2020.

Zadatak 3.

(a) [2 boda] Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Precizno definirajte nezavisnost familije događaja $\{A, B, C\}$.

(b) [2 boda] Neka je $\{A, B, C\}$ nezavisna familija događaja iz $\mathcal{F}$. Pokažite da su nezavisni i događaji $A \cup B$ i C^c.

(c) [3 boda] Definirajte potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, te potom precizno iskažite i dokažite Bayesovu formulu.

(d) [3 boda] U košari se nalazi ukupno 9 voćki od kojih su neke jabuke, a neke kruške. Sve pretpostavke o broju jabuka su jednako vjerojatne. Iz košare izvlačimo jednu voćku. Koja je vjerojatnost da je u košari bilo 8 ili 9 jabuka ako znamo da smo izvukli jabuku?

Rješenje.

(a) Familija događaja $\{A, B, C\}$ je nezavisna ako vrijedi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C), \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ i $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

(b) Kako je familija $\{A, B, C\}$ nezavisna, to je nezavisna i familija događaja $\{A, B, C^c\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A \cup B) \cap C^c) =& \mathbb{P}((A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)) = \mathbb{P}(A \cap C^c) + \mathbb{P}(B \cap C^c) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) = \\
=& \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C^c) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C^c) = \\
=& (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))\mathbb{P}(C^c) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C^c),
\end{aligned}$$

pa zaključujemo da su događaji $A \cup B$ i C^c nezavisni.

(c) Neka je $(H_i)_{i \in I}$ konačna ili prebrojiva familija događaja iz $\mathcal{F}$ takva da je $\mathbb{P}(H_i) > 0$ za sve $i \in I$, $H_i \cap H_j = \emptyset$ za $i \neq j$ te $\cup_{i \in I}^{\infty} H_i = \Omega$. Takvu familiju $(H_i)_{i \in I}$ zovemo potpun sustav događaja. Bayesova formula: Neka je $(H_i)_{i \in I}$ potpun sustav događaja na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Tada za svaki $A \in \mathcal{F}$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(H_j \mid A) = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}.$$

Dokaz: Korištenjem definicije uvjetne vjerojatnosti u prvoj jednakosti i formule potpune vjerojatnosti u trećoj, dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_j \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(H_j \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(H_j)\mathbb{P}(A \mid H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A \mid H_i)}.
\end{aligned}$$

(d) Definirajmo $H_i = \{\text{u košari je } i \text{ jabuka}\}$, za $i = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Vrijedi $\mathbb{P}(H_i) = \frac{1}{10}$. Neka je $A = \{\text{izvučena je jabuka iz košare}\}$. Tada je $\mathbb{P}(A|H_i) = \frac{i}{9}$, $i = 0, 1, \ldots, 9$. U zadatku se traži $\mathbb{P}(H_8 \cup H_9|A) = \mathbb{P}(H_8|A) + \mathbb{P}(H_9|A)$. Po Bayesovoj formuli dobijemo vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(H_8|A) = \frac{\frac{8}{9}\frac{1}{10}}{\sum_{i=0}^{9} \frac{i}{9}\frac{1}{10}} = \frac{8}{45},$$
$$\mathbb{P}(H_9|A) = \frac{\frac{9}{9}\frac{1}{10}}{\sum_{i=0}^{9} \frac{i}{9}\frac{1}{10}} = \frac{9}{45},$$

iz čega dobijemo da je tražena vjerojatnost $\mathbb{P}(H_8 \cup H_9|A) = \frac{8}{45} + \frac{9}{45} = \frac{17}{45}$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2020.

Zadatak 4.

(a) [3 boda] Neka je Ω neprazan skup takav da je $|\Omega| < \infty$. Pokažite da je s

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

dobro definirana vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (provjerite aksiome vjerojatnosti).

(b) Neka je poredano 10 karata, od kojih su 4 trefa, 3 pika, 2 srca i 1 karo. Od tih 10 karata, igraču se na slučajan način podijeli 6 karata.

(i) [4 boda] Odredi vjerojatnost da je igrač dobio karte u sve četiri boje.

(ii) [3 boda] Odredi vjerojatnost da je igrač dobio barem dva trefa.

Rješenje.

(a) Jer je $A \subseteq \Omega$, vrijedi da je $|A| \leq |\Omega|$ pa je $\mathbb{P}(A) \leq 1$. S obzirom da je za svaki događaj A, $|A| \geq 0$ i $|\Omega| > 0$, slijedi $\mathbb{P}(A) \geq 0$, za svaki $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ (*nenegativnost*).
Vrijedi $\mathbb{P}(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$ (*normiranost*).
Zbog $|\Omega| < \infty$ je i $|\mathcal{P}(\Omega)| < \infty$. Zato je dovoljno promotriti σ-aditivnost za konačne familije skupova. Neka su $n \in \mathbb{N}$ te $A_1, A_2, \ldots, A_n$ proizvoljni po parovima disjunktni poskupovi od Ω. Tada je i $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cap A_n = \emptyset$ pa je

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \frac{|A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}| + |A_n|}{|\Omega|} = \mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n) = \cdots = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Dakle, s danom je formulom dobro definirana vjerojatnost na promatranom izmjerivom prostoru.

(b) Igraču se dodijeli 6 od 10 karata pa je zato Ω jednak familiji svih šesteročlanih podskupova karata od skupa od 10 karata. Slijedi

$$|\Omega| = \binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

(i) Tražimo vjerojatnost da je igrač dobio karte u sve četiri boje. Označimo s A skup mogućih odabira šest karata od ponuđenih deset, tako da su među njima sve četiri boje. Tražimo $\mathbb{P}(A)$. Zadatak se svodi na određivanje $|A|$. U tu svrhu, odredimo radije $|A^c|$, tj. koliko ima mogućih odabira šest od deset karata tako da postoji barem jedna boja koja se ne pojavljuje. Prema formuli uključivanja i isključivanja:

$$|A^c| = |\{\text{nema karo boje}\}| + |\{\text{nema boje srce}\}| + |\{\text{nema pik boje}\}| + |\{\text{nema tref boje}\}| -$$

$$-|\{\text{nema niti srca niti karo}\}| - |\{\text{nema niti pika niti karo}\}|$$

iz razloga što nam treba barem šest karata kako bismo izvukli šest karata, a na primjer skup $\{\text{nema niti srca niti pika}\}$ bi zapravo značilo da bismo trebali od 5 karata izvući 6, a to je, dakako $\emptyset$ te ima kardinalitet 0 (slično za preostale dvostruke presjeke, sve trostruke presjeke i četverostruki presjek). Sada je

$$\begin{aligned}|A^c| &= \binom{9}{6} + \binom{8}{6} + \binom{7}{6} + \binom{6}{6} - \binom{7}{6} - \binom{6}{6} = \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 84 + 28 = 112 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = \frac{112}{210} = \frac{56}{105} \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = \frac{49}{105}\end{aligned}$$

Dakle, tražena vjerojatnost iznosi $\frac{49}{105}$.
(Mogli smo ovo odrediti direktno računajući $\mathbb{P}(A)$, odnosno $|A|$ kao

$$\begin{aligned}|A| &= \binom{4}{3}\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \binom{4}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{2}\binom{1}{1} + \binom{4}{2}\binom{3}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \\ &\quad + \binom{4}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{2}\binom{1}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \\ &= 98 \\ &\Rightarrow \ \mathbb{P}(A) = \frac{98}{210} = \frac{49}{105}\end{aligned}$$

pa je rezultat, naravno, isti.)

(ii) Tražimo vjerojatnost da je igrač dobio barem dva trefa. Ako skup čiju vjerojatnost tražimo označimo s B, mi ćemo odrediti $|B^c|$ na sljedeći način:

$$B^c = \{\text{igrač je dobio točno 0 trefova}\} \cup \{\text{igrač je dobio točno 1 tref}\}$$

pri čemu su skupovi s desne strane disjunktni pa možemo kardinalitet od B^c odrediti tako da zbrojimo kardinalitete skupova s desne strane jednakosti. Slijedi

$$\begin{aligned}|B^c| &= \binom{6}{6} + \binom{4}{1}\binom{6}{5} = 1 + 4 \cdot 6 = 25 \\ &\Rightarrow \ \mathbb{P}(B^c) = \frac{25}{210} = \frac{5}{42} \\ &\Rightarrow \ \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = \frac{37}{42}\end{aligned}$$

Dakle, tražena vjerojatnost jednaka je $\frac{37}{42}$.
(Također, alternativno:

$$\begin{aligned}|B| &= \binom{4}{2}\binom{6}{4} + \binom{4}{3}\binom{6}{3} + \binom{4}{4}\binom{6}{2} = \\ &= 185 \\ &\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{185}{210} = \frac{37}{42}\end{aligned}$$

što daje traženo.)

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2020.

Zadatak 5.

(a) [2 boda] Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s diskretnom vjerojatnosnom funkcijom gustoće f. Precizno definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

(b) [3 boda] Kutija sadrži 5 bijelih i 5 crnih kuglica. Na slučajan način izvučene su dvije kuglice. Ako su iste boje dobivate 11 Kn, ako su različite gubite 10 Kn. Izračunajte Vaš očekivani dobitak/gubitak, te varijancu dobitka/gubitka.

(c) [2 boda] Funkcija distribucije diskretne slučajne varijable X dana je s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/4, & 1 \leq x < 2 \\ 3/4, & 2 \leq x < 3 \\ 7/8, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

Nađite $\mathbb{P}(X \geq 2)$ i $\mathbb{P}(X = 3)$.

(d) [3 boda] Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ koja ima matematičko očekivanje. Dokažite da vrijedi $(\mathbb{E}\,X)^2 \leq \mathbb{E}\,(X^2)$.

Rješenje.

(a) Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako vrijedi $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f(x) < \infty$, onda kažemo da X ima *matematičko očekivanje* koje definiramo kao

$$\mathbb{E}\,(X) := \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x).$$

(b) Neka X označava Vaš slučajni dobitak/gubitak. Tada je $X \in \{+11, -10\}$ te vrijedi

$$\mathbb{P}(X = +11) = \frac{\binom{5}{2} + \binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{9}, \quad \mathbb{P}(X = -10) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}.$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,(X) &= 11 \times \frac{4}{9} - 10 \times \frac{5}{9} = -\frac{2}{3}, \\ \mathbb{E}\,(X^2) &= 11^2 \times \frac{4}{9} + (-10)^2 \times \frac{5}{9} = \frac{984}{9}, \\ \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}\,(X^2) - (\mathbb{E}\,X)^2 = \frac{984}{9} - \frac{4}{9} = \frac{980}{9}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 2) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) = 1 - F(2-) = 1 - 1/4 = 3/4 \\ \mathbb{P}(X = 3) &= F(3) - F(3-) = 7/8 - 3/4 = 1/8 \end{aligned}$$

(d) U slučaju da je $\mathbb{E}(X^2) = \infty$ druga nejednakost trivijalno slijedi. Pretpostavimo da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ i uočimo da je $(|X| - \mathbb{E}(|X|))^2 \geq 0$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
0 &\overset{\text{Tm 4.31 (iii)}}{\leq} \mathbb{E}\left[(|X| - \mathbb{E}(|X|))^2\right] \\
&= \mathbb{E}(|X|^2 - 2|X|\mathbb{E}(|X|) + \mathbb{E}(|X|)^2) \\
&\overset{\text{Tm 4.31 (iv)}}{=} \mathbb{E}(|X|^2) - \mathbb{E}(2|X|\mathbb{E}(|X|)) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2) \\
&\overset{\text{Tm 4.31 (i) i (iii)}}{=} \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(|X|)^2.
\end{aligned}$$

Nadalje, iz $-|X| \leq X \leq |X|$ slijedi $-\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(|X|)$, odnosno kvadriranjem $\mathbb{E}(X)^2| \leq \mathbb{E}(|X|)^2$. Zajedno s gornjom nejednakosti dobivamo $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.

Alternativno, možemo koristiti Cauchy-Schwartzovu nejednakost za sume/redove:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x) = \sum_{x\in\mathbb{R}} (|x| f(x)^{1/2}) f(x)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{x\in\mathbb{R}} |x|^2 f(x)\right)^{1/2} \left(\sum_{x\in\mathbb{R}} f(x)\right)^{1/2} = (\mathbb{E}(X^2))^{1/2}.
\end{aligned}$$

Kvadriranjem i upotrebom nejednakosti $\mathbb{E}(X)^2| \leq \mathbb{E}(|X|)^2$ opet dobivamo traženu tvrdnju.