

# Teme za diplomske radove za ak. godinu 2024/2025

PMF–Matematički odsjek

## Popis tema

Adamović Dražen: Poluprosti prstenovi	1
Adamović Dražen: Weylove algebre	2
Antonić Nenad: Degenerirana difuzija	3
Antonić Nenad: Jednadžbe mješovitog tipa: Tricomijeva jednadžba	4
Antonić Nenad: Elementarna rješenja i Malgrange-Ehrenpreisov teorem	5
Arambašić Ljiljana: Laplaceova transformacija i primjena u rješavanju diferencijalnih jednadžbi	6
Arambašić Ljiljana: Konačni bazni okviri i njihovi duali	7
Arambašić Ljiljana: Funkcionalne jednadžbe	8
Bašić Matija: Klasificirajući prostor kategorije	9
Bašić Matija: Simplicijalni skupovi	10
Bombardelli Mea: Spiralna sličnost	11
Bombardelli Mea: Potpuni četverostran	12
Bosner Tina: Najbolje aproksimacije polinomima	13
Bosner Tina: Određivanje vidljivih ploha	14
Bosner Tina: Traženje nultočaka funkcija	15
Bošnjak Barbara: Grupe permutacija u algebri i kombinatorici	16
Bošnjak Barbara: Galoisova teorija i primjena u teoriji brojeva	17
Brückler Franka Miriam: Josipov zadatak	18
Brückler Franka Miriam: Fibonaccijev "Liber Abaci"	19
Brückler Franka Miriam: Povijest matematičke indukcije	20
Ciganović Igor: Bilinearne forme	21

Ciganović Igor: Ciklotomska polja	22
Ciganović Igor: Reprezentacije konačnih grupa	23
Ciganović Igor: Konačna polja	24
Gogić Ilja: Kada su glatke funkcije analitičke?	25
Gogić Ilja: Karakterizacije neprekidnosti i Vellemanov teorem	26
Hanzer Marcela: Reprezentacije grupe $GL_2(\mathbb{F}_q)$ , gdje je $\mathbb{F}_q$ konačno polje	27
Hanzer Marcela: Teorija reprezentacija konačnih grupa; Artinov teorem	28
Hanzer Marcela: Moebiusova transformacija	29
Ilišević Dijana: Wignerov teorem	30
Ilišević Dijana: Jordanovi homomorfizmi i derivacije	31
Iljazović Zvonko, Prša Marija: Svojtveni problem	32
Iljazović Zvonko, Prša Marija: Teoremi vektorske analize	33
Jurak Mladen: Ograničavajući volumeni u detekciji kolizija u video igrama	34
Jurak Mladen: Metoda konačnih volumena za višekomponentni krosdifuzijski model biofilma	35
Kovač Vjekoslav: Egipatski razlomci	36
Kovač Vjekoslav: Konvergencija gotovo svuda u harmonijskoj analizi	37
Kozić Slaven: Problem četiri broja	38
Kozić Slaven: Kvantna determinanta	39
Kozić Slaven: Analiza igre križić-kružić u afinoj ravnini	40
Ljulj Matko: Mješovita formulacija za model elastične ljuske	41
Manger Robert, Klobučar Barišić Ana: Dvostruka rimska dominacija	42
Marušić Miljenko: Splajn kolokacija za singularno perturbirane rubne probleme	43
Marušić Miljenko: Eksponencijalno prilagođene diferencijske sheme	44
Marušić Miljenko: Eksponencijalni integratori	45
Marušić Miljenko: Kolokacija splajnom za rubni problem za ODJ	46
Marušić-Paloka Eduard: Uvod u varijacijski račun	47
Marušić-Paloka Eduard: Fundamentalna rješenja za paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe	48

<b>Marušić-Paloka Eduard: Sturm-Liouvilleov problem</b>	<b>49</b>
<b>Marušić-Paloka Eduard: Krivoljni integrali</b>	<b>50</b>
<b>Milin Šipuš Željka: Pravčaste plohe u prostornim formama</b>	<b>51</b>
<b>Milin Šipuš Željka: Björlingova formula i minimalne plohe</b>	<b>52</b>
<b>Muha Boris: Nash-Kuiperov teorem</b>	<b>53</b>
<b>Muha Boris: Teorija glasovanja i demokracija: Matematičke osnove i paradoksi društvenog izbora</b>	<b>54</b>
<b>Muha Boris: Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya i Navier-Stokesove jednačbe</b>	<b>55</b>
<b>Nakić Ivica: Fourierova transformacija na vremenskom otvoru</b>	<b>56</b>
<b>Nakić Ivica: Algoritmi najkraćeg puta</b>	<b>57</b>
<b>Pandžić Pavle: Konačne grupe refleksija</b>	<b>58</b>
<b>Pandžić Pavle: Realne forme prostih Liejevih algebri</b>	<b>59</b>
<b>Pandžić Pavle: Proste kompleksne Liejeve algebre</b>	<b>60</b>
<b>Pažanin Igor: Reynoldsov zakon</b>	<b>61</b>
<b>Pažanin Igor: Matematičko modeliranje demokratskih procesa</b>	<b>62</b>
<b>Pažanin Igor: Neizotermni tok fluida u porznoj sredini</b>	<b>63</b>
<b>Pedić Tomić Veronika: Elementarne nejednakosti</b>	<b>64</b>
<b>Pedić Tomić Veronika: Matematika i teorija struna</b>	<b>65</b>
<b>Pedić Tomić Veronika: Prosti brojevi u kriptografiji</b>	<b>66</b>
<b>Pedić Tomić Veronika: Monster grupa</b>	<b>67</b>
<b>Pejković Tomislav: Kongruencije za Stirlingove i povezane brojeve</b>	<b>68</b>
<b>Pejković Tomislav: Melzakova formula</b>	<b>69</b>
<b>Perše Ozren: Liejeve grupe i Liejeve algebre</b>	<b>70</b>
<b>Perše Ozren: Jordanove algebre</b>	<b>71</b>
<b>Perše Ozren: Poluproste Liejeve algebre</b>	<b>72</b>
<b>Radunović Goran: Egzistencija meromorfnihi funkcija i teorem o Riemannovom preslikavanju</b>	<b>73</b>
<b>Radunović Goran: Funkcije izvodnice i primjene</b>	<b>74</b>
<b>Radunović Goran: Multilinearni funkcionali i tenzori</b>	<b>75</b>

<b>Radunović Goran: Fraktalni skupovi generirani transformacijama</b>	<b>76</b>
<b>Radunović Goran: Frakcionalni integro-diferencijalni račun i primjene</b>	<b>77</b>
<b>Radunović Goran: Bedford-McMullenovi sagovi</b>	<b>78</b>
<b>Resman Maja: Kaotična dinamika i fraktalna dimenzija</b>	<b>79</b>
<b>Resman Maja: Pickov teorem i teorem Minkowskog</b>	<b>80</b>
<b>Resman Maja: Dinamika racionalnih preslikavanja na sferi i izračunljivost Julia skupova</b>	<b>81</b>
<b>Šiftar Juraj: Jednostavna grupa reda 168</b>	<b>82</b>
<b>Šiftar Juraj: Eulerova spirala i optimalni ovali</b>	<b>83</b>
<b>Širola Boris: Projektivni prostori i projektivne transformacije</b>	<b>84</b>
<b>Širola Boris: Grupe permutacija i matrice grupe</b>	<b>85</b>
<b>Širola Boris: Polinomi i Mason-Stothersov teorem</b>	<b>86</b>
<b>Tambača Josip: Metoda inkremenata u teoriji elastičnosti</b>	<b>87</b>
<b>Tambača Josip: Primjeri optimizacije u matematičkom modeliranju</b>	<b>88</b>
<b>Tambača Josip: Numerička metoda za problem interakcije 3D elastičnog tijela i 1D elastičnog štapa</b>	<b>89</b>
<b>Vuković Mladen: Odlučivost logika interpretabilnosti</b>	<b>90</b>
<b>Vuković Mladen: Vjerojatnosne logike</b>	<b>91</b>
<b>Vuković Mladen, Perkov Tin: Prirodna dedukcija za modalnu logiku</b>	<b>92</b>
<b>Vuković Mladen: Složenost logika interpretabilnosti</b>	<b>93</b>

**Mentor:** Adamović Dražen

## Poluprosti prstenovi

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Poželjno je predznanje iz algebarskih kolegija

**Naslov na engleskom:** Semisimple rings

**Opis teme:** U diplomskom radu bit će proučavani poluprosti prstenovi, poluproste algebre i njihovi primjeri. Ovisno o afinitetu studenta, naglasak će biti dan na strukturnu teoriju, konstrukciju ili klasifikaciju tih prstenova.

**Literatura:**

S. Lang, *Algebra*, Springer, 2002.

W. A. Adkins, S. H. Weintraub, *Algebra. An approach via module theory*, Springer, 1992.

**Mentor:** Adamović Dražen

## Weylove algebre

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Poželjno je predznanje iz algebarskih kolegija

**Naslov na engleskom:** Weyl algebras

**Opis teme:** U diplomskom radu će se proučavati osnovne konstrukcije povezane s Weylovom algebrom. Weylova algebra bit će definirana kao kvocijent tenzorske algebre. Ovisno o afinitetu studenta, bit će proučavane kvantne Weylove algebre, teorija reprezentacija Weylovih algebri i veza s teorijom Liejevih algebri.

**Literatura:**

T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Vol. 131 of Graduate texts in mathematics, 2ed, Springer, 2001.

J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 30, AMS, 1997.

N. Jing, J. Zhang, *Quantum Weyl algebras and deformations of  $U(G)$* , Pacific Journal of Mathematics, Vol. 171, No. 2, 1995.

**Mentor:** Antonić Nenad

## Degenerirana difuzija

**Područje:** parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Parcijalne diferencijalne jednačbe, Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, Mjera i integral

**Naslov na engleskom:** Degenerate diffusion

**Opis teme:** Jednačba provođenja topline prototip je za paraboličke parcijalne diferencijalne jednačbe. Međutim, ponekad modeliranje realne pojave difuzije pokazuje druga svojstva, koja se mogu opisati nelinearnom jednačbom oblika  $u_t = \operatorname{div} \operatorname{grad} (u^m)$ . Za  $m > 1$  imamo sporu difuziju (jednačbu porozne sredine), za  $m_c < m < 1$  nadkritičnu brzu difuziju, a za  $m \leq m_c$  podkritičnu brzu difuziju ( $m_c = (d - 2)_+/d$ ).

**Literatura:**

P. Daskalopoulos, C. E. Kenig, *Degenerate diffusion*, EMS, 2007.

**Mentor:** Antonić Nenad

## Jednadžbe mješovitog tipa: Tricomijeva jednadžba

**Područje:** parcijalne diferencijalne jednadžbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Parcijalne diferencijalne jednadžbe, Normirani prostori i Operatori na normiranim prostorima, Mjera i integral

**Naslov na engleskom:** Equations of mixed type: the Tricomi equation

**Opis teme:** Tricomijeva jednadžba, koja mijenja tip, je jednostavan model za prijelaz iz podzvučnog toka u nadzvučni tok fluida. Kratak sažetak o jednadžbi može se naći u tekstu prve reference niže.

### Literatura:

G-Q. Chen: The Tricomi Equation, <https://people.maths.ox.ac.uk/chengq/outrach/TheTricomiEquation.pdf>

A. Kuzmin, *Boundary-value problems for transonic flow*, Wiley, 2002.

J. M. Rassias, *Lecture notes on mixed type partial differential equations*, World Scientific, 1990.

A. V. Bicadze, *Some classes of partial differential equations*, Gordon and Breach, New York, 1988.

**Mentor:** Antonić Nenad

## Elementarna rješenja i Malgrange-Ehrenpreisov teorem

**Područje:** parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Elementary solutions and the Malgrange-Ehrenpreis theorem

**Opis teme:** Svaki netrivialni linearan parcijalni diferencijalni operator s konstantnim koeficijentima na  $\mathbf{R}^d$  ima elementarno (fundamentalno) rješenje. To je iskaz Malgrange-Ehrenpreisova teorema, koji se smatra prvim praktičnim uspjehom Schwartzove teorije distribucija. Naime, poznavanje elementarnog rješenja omogućuje jednostavno računanje rješenja nehomogene linearne jednačbe. S druge strane, ukoliko imamo varijabilne koeficijente, taj rezultat ne vrijedi.

### Literatura:

Peter Wagner: *A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, Am. Math. Monthly, **116**(2009) 257–462

Jean-Pierre Rosay: *A Very Elementary Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*, Am. Math. Monthly, **98**(1991) 518–523

Norbert Ortner, Peter Wagner: *Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators: Theory and Practice*, Springer, 2015.

**Mentor:** Arambašić Ljiljana

## Laplaceova transformacija i primjena u rješavanju diferencijalnih jednačbi

**Područje:** Matematička analiza

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Nema

**Naslov na engleskom:** Laplace transform and its application in solving differential equations

**Opis teme:** Laplaceova transformacija omogućava prevođenje diferencijalnih jednačbi u algebarski oblik, gdje ih je lakše riješiti. U ovom diplomskom radu proučit ćemo osnovna svojstva Laplaceove transformacije koja su nam potrebna za njenu primjenu u rješavanju diferencijalnih jednačbi.

### Literatura:

D. Blanuša, *Laplaceova transformacija*, Zagreb, 1960.

P. P. G. Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer, 2004.

Y. H. Gangadharaiyah, N. Sandeep, *Engineering Applications of the Laplace Transform*, Cambridge, 2021.

P. K. F. Kuhfittig, *Introduction to the Laplace Transform*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, vol. 8, Springer US, 1978.

J. L. Schiff, *The Laplace transform*, Springer, New York, 1999.

**Mentor:** Arambašić Ljiljana

## Konačni bazni okviri i njihovi duali

**Područje:** Linearna algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** Vektorski prostori

**Naslov na engleskom:** Finite frames and their duals

**Opis teme:** Bazni okvir za konačnodimenzionalni unitarni prostor  $H$  je niz  $(x_n)_{n=1}^m$  u  $H$  takav da postoje konstante  $A, B > 0$  tako da za sve  $x \in H$  vrijedi  $A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^m |(x|x_n)|^2 \leq B\|x\|^2$ . Primjeri baznih okvira su ortonormirane baze za  $H$ , ali nije svaki bazni okvir ortonormirana baza (štoviše, bazni okviri nisu uvijek linearno nezavisni skupovi). Svaki vektor iz  $H$  se može rekonstruirati pomoću vektora baznog okvira  $(x_n)_{n=1}^m$ , to jest, postoji bazni okvir  $(y_n)_{n=1}^m$  tako da je  $x = \sum_{n=1}^m (x|y_n)x_n$  za sve  $x \in H$ ; svaki takav bazni okvir  $(y_n)$  nazivamo dualom od  $(x_n)$ . U ovom radu proučavat ćemo svojstva baznih okvira s naglaskom na njihove dualne bazne okvire odnosno rekonstrukcije vektora.

### Literatura:

O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.

O. Christensen, *Frames and bases: An introductory course*, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.

D. Han, K. Kornelson, D. Larson, E. Weber, *Frames for undergraduates*, Providence, AMS, 2007.

**Mentor:** Arambašić Ljiljana

## Funkcionalne jednađbe

**Područje:** Matematička analiza

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Functional equations

**Opis teme:** Funkcionalne jednađbe su jednađbe u kojima su nepoznanice funkcije. U ovom diplomskom radu proučit ćemo neke metode za rješavanje funkcionalnih jednađbi u jednoj i dvije varijable.

### Literatura:

J. Aczél, *Lectures on functional equations and their applications*, Academic Press. Dover Books on Mathematics, 1966.

D. Bessenyei, *The theory of functional equations in high school education*, Teaching Mathematics and Computer Sciences, 10/2 (2012), 345-360

C. Efthimiou, *Introduction to Functional Equations: Theory and Problem-solving Strategies for Mathematical Competitions and Beyond*, AMS, 2011

C. G. Small, *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer, 2007

**Mentor:** Bašić Matija

## Klasificirajući prostor kategorije

**Područje:** Algebarska topologija

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** Algebarska topologija

**Naslov na engleskom:** Classifying space of a category

**Opis teme:** Teorija kategorija je nastala iz potreba algebarske topologije kako bi se stvorio formalizam za uspoređivanje različitih konstrukcija koje daju slične rezultate. Obratno, klasificirajući prostori kategorija omogućavaju proučavanje kategorija koristeći alate algebarske topologije. Posebni slučajevi uključuju klasificirajući prostor grupe kao važnog objekta u teoriji glavnih svežnjeva, odakle dolazi i naziv klasificirajući. U ovom radu će se prezentirati osnovne konstrukcije i primjene slijedeći temeljne ideje Daniela Quillena. Ovisno o afinitetima studenata veći naglasak će se staviti na teoriju svežnjeva, Grassmanijane, karakteristične klase, Bottovu periodičnost ili neke druge povezane kocepte.

### Literatura:

D. Quillen, Higher Algebraic K-theory I, Lecture Notes in Math, vol. 341, Berlin, New York, 1973.

P. G. Goerss, J. F. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Modern Birkhäuser Classics, 1999.

I. Moerdijk, Classifying spaces and classifying topoi, Lecture Notes in Math., vol. 1616, Springer, 1995.

**Mentor:** Bašić Matija

## Simplicijalni skupovi

**Područje:** algebarska topologija, kombinatorika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Simplicial sets

**Opis teme:** Simplicijalni skupovi su kombinatorni model za topološke prostore čija primjena je zapravo mnogo šira od područja algebarske topologije. U radu će biti prezentirati uvod u teoriju simplicijalnih skupova (kategorijska definicija, produkt, Kanovi kompleksi i homotopske grupe) uz odabrane primjere.

**Literatura:**

G. Friedman, Survey article: An elementary illustrated introduction to simplicial sets, Rocky Mountain J. Math. 42(2): 353-423 (2012)

P. Goerss, J. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Springer, 2009.

G. Heuts, I. Moerdijk, Trees in algebra and topology, 2021.

**Mentor:** Bombardelli Mea

## Spiralna sličnost

**Područje:** geometrija

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Spiral symmetry

**Opis teme:** Spiralna sličnost je kompozicija homotetije i rotacije. Glavni cilj rada je proučiti svojstva tog preslikavanja. Također će se prikazati primjena spiralne sličnosti u rješavanju zadataka s natjecanja.

**Literatura:**

Jafet Baca, *On a special center of spiral similarity*, Mathematical Reflections 1 (2019), [https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2019-01/mr\\_1\\_2019\\_spiral\\_similarity.pdf](https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2019-01/mr_1_2019_spiral_similarity.pdf)

**Mentor:** Bombardelli Mea

## Potpuni četverostran

**Područje:** geometrija

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Complete quadrilateral

**Opis teme:** Potpuni četverostran je geometrijska figura određena s četiri pravca koji određuju 6 sjecišta. Možemo promatrati četiri trokuta određena tim pravcima te neke njihove karakteristične točke. Poznat je tekst Jakoba Steinera iz 1828. u kojem navodi 10 svojstava potpunog četverostrana. Cilj je ovoga rada dokazati te rezultate.

**Literatura:**

J. Steiner, Annales de Gergonne, XVIII (1827) 302

J.-P. Ehrmann, Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral, Forum Geom. Vol 4 (2004)

N. Rapanos, The complete quadrilateral and its properties

D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 2004.

**Mentor:** Bosner Tina

## Najbolje aproksimacije polinomima

**Područje:** Numerička matematika

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Best approximations by polynomials

**Opis teme:** Za danu funkciju, treba naći najbolju aproksimaciju polinomom, što podrazumijeva da se traži polinom koji najmanje odstupa od funkcije u nekoj normi. Promatraju se kontinuirane i diskretne norme, a u svrhu računanja aproksimacije uvode se i ortogonalni polinomi.

**Literatura:**

G. M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials*, Springer, 2003.

**Mentor:** Bosner Tina

## Određivanje vidljivih ploha

**Područje:** Računarstvo i numerička matematika

**Prikladno za studij:** Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** po mogućnosti Računalna grafika

**Naslov na engleskom:** Visible-surface determination

**Opis teme:** Za dani skup 3D objekata i danu projekciju, želimo odrediti koje linije ili plohe su vidljive iz središta projekcije ili duž pravaca projekcije, tako da se mogu prikazati samo one koje to jesu. Ideja ovog diplomskog rada je predstaviti nekoliko različitih algoritama koji se bave tim problemom.

**Literatura:**

J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes, *Computer Graphics: Principles and Practice*, Addison–Wesley, 2005.

**Mentor:** Bosner Tina

## Traženje nultočaka funkcija

**Područje:** Numerička matematika

**Prikladno za studij:** Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Root finding algorithms

**Opis teme:** Ideja ovog diplomskog rada je pregled numeričkih metoda za traženje nultočaka realnih funkcija jedne varijable. Većina metoda se koristi za računanje realnih jednostrukih nultočaka, ali predstaviti će se i metode za traženje kompleksnih, kao i realnih višestrukih nultočaka. U sklopu ove teme, predviđeno je programiranje i testiranje danih metoda.

**Literatura:**

A. Quarterioni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Springer, 2007.

**Mentor:** Bošnjak Barbara

## Grupe permutacija u algebri i kombinatorici

**Područje:** Algebra, Kombinatorika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Permutation groups in algebra and combinatorics

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu će se obraditi osnovni algebarski teoremi o grupama permutacija te pokazati osnovna primjena permutacija u kombinatornim zadacima.

### Literatura:

Justin Wyss-Gallifent, *Permutation groups - lecture notes*, <https://math.umd.edu/~immortal/MATH403/lecturenotes/ch5.pdf>

Richard F. Bass, Masha Gordina, *Combinatorics - lecture notes*, <https://probability.oer.math.uconn.edu/wp-content/uploads/sites/2187/2018/01/prob3160ch1.pdf>

Bruce Sagan, *Combinatorics: The Art of Counting*, AMS Graduate Studies in Mathematics, 2020.

**Mentor:** Bošnjak Barbara

## Galoisova teorija i primjena u teoriji brojeva

**Područje:** Algebra, Teorija brojeva

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Galois theory and its applications in number theory

**Opis teme:** U ovom diplomskom radu će se obraditi osnovni teoremi Galoisove teorije proširenja polja racionalnih brojeva i prikazati njihova primjena na rješavanje problema iz teorije brojeva.

**Literatura:**

James Milne, *Fields and Galois Theory - lecture notes*, <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/FT.pdf>

Ian Stewart, David Tall, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*, A. K. Peters, 2002.

**Mentor:** Brückler Franka Miriam

## Josipov zadatak

**Područje:** popularizacija matematike; kombinatorika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Povijest matematike; Kombinatorika ili Diskretna matematika

**Naslov na engleskom:** Josephus Problem

**Opis teme:** Josipov zadatak je stari povijesni kombinatorni zadatak, koji se pripisuje židovskom povjesničaru i vojskovođi Flaviju Josipu. U svojoj osnovnoj varijanti glasi ovako: "Ako se neki broj ljudi  $n$  poreda u krug i počevši od jednog kao prvog smaknut biva svaki  $m$ -ti, nastavljaajući kružno sve dok ne preživi samo jedan, koja je pozicija tog koji je preživio u početnom redosljedju?" Ovaj se zadatak kroz povijest javljao u mnogim kulturama i razdobljima, s različitim kontekstima. Do danas postoje razna rješenja i generalizacije. Cilj ovog diplomskog rada je opisati oba aspekta - povijesni pregled, kao i moderni pristup i rješenja.

### Literatura:

Dowdy, James; Mays, Michael E. (1989). "Josephus Permutations". *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*. 6: 125–130.

Graham, R. L.; Knuth, D. E.; Patashnik, O. (1989). *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison Wesley

Halbeisen, L.; Hungerbühler, N. (1997). "The Josephus Problem". *J. Théor. Nombres Bordeaux*. 9 (2): 303–318

Robinson, W. J. (1960). "The Josephus problem". *Math. Gaz.* 44 (347): 47–52.

Rouse Ball, W. W. (1905). *Mathematical Recreations and Essays* (2nd ed.). London: Macmillan

**Mentor:** Brückler Franka Miriam

## Fibonaccijev "Liber Abaci"

**Područje:** povijest matematike

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** Povijest matematike

**Naslov na engleskom:** Fibonacci's "Liber Abaci"

**Opis teme:** Knjiga s početka 13. stoljeća kojom je matematika arapskog stila, a posebno dekadski brojevni sustav s nulom postao poznatiji u srednjovjekovnoj Europi i koja je ujedno označila početak ponovnog razvoja europske matematike bila je "Liber abaci", autora Leonarda iz Pise, poznatijeg pod nadimkom Fibonacci. U ovom će se diplomskom radu detaljno opisati sadržaj "Liber abaci" u njegovom povijesnom kontekstu.

### Literatura:

L. Sigler, Fibonacci's Liber Abaci. Springer-Verlag, New York, 2002.

J. Hoyrup, Leonardo Fibonacci and abaco culture, a proposal to invert the roles. *Revue d'histoire des mathématiques* 11 (2005) 23–56

K. Devlin, Recreational mathematics in Leonardo of Pisa's Liber abbaci. [https://web.stanford.edu/~kdevlin/Papers/Rec\\_Math\\_in\\_Liber\\_abbaci.pdf](https://web.stanford.edu/~kdevlin/Papers/Rec_Math_in_Liber_abbaci.pdf)

**Mentor:** Brückler Franka Miriam

## Povijest matematičke indukcije

**Područje:** povijest matematike; teorija skupova; matematička logika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** Povijest matematike

**Naslov na engleskom:** History of Mathematical Induction

**Opis teme:** Metoda matematičke indukcije poznata je metoda dokazivanja u matematici. Iako je svoju modernu formu dobila tek prije manje od 150 godina, njezini neformalni oblici sežu daleko u povijest, u doba srednjovjekovne islamske matematike, a neki povjesničari njezine rane ideje uočavaju još u antičkoj Grčkoj. U ovom diplomskom radu bit će opisana povijest ove metode, od njezini antičkih začetaka, prvih neformalnih oblika kod Abu Kamila, Al-Karadžija i Al-Samawala, kroz njezino preciziranje kod Rabi Levi Ben Geršona, Franciscusa Maurolyciusa i Blaisea Pascala, do njezine moderne formalizacije (Augustus De Morgan, Richard Dedekind, Giuseppe Peano).

### Literatura:

Bussey, W. H. (1917). "The Origin of Mathematical Induction". *The American Mathematical Monthly*. 24 (5): 199–207.

Cajori, Florian (1918). "Origin of the Name "Mathematical Induction"". *The American Mathematical Monthly*. 25 (5): 197–201.

Fowler, D. (1994). "Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use It?". *Physis*. 31: 253–265.

Rabinovitch, Nachum L. (1970). "Rabbi Levi Ben Gershon and the origins of mathematical induction". *Archive for History of Exact Sciences*. 6 (3): 237–248.

Rashed, R. (1994). "Mathematical induction: al-Karajī and al-Samaw'al". *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Boston Studies in the Philosophy of Science. Vol. 156. Springer Science & Business Media.

Vacca, G. (1909). "Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction". *Bulletin of the American Mathematical Society*. 16 (2): 70–73.

Yadegari, Mohammad (1978). "The Use of Mathematical Induction by Abū Kāmil Shujā' Ibn Aslam (850-930)". *Isis*. 69 (2): 259–262.

**Mentor:** Ciganović Igor

## Bilinearne forme

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Bilinear forms

**Opis teme:** U ovoj temi nas zanimaju strukturni teoremi za bilinearne forme, a posebno dekompozicija simetrične forme na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru.

**Literatura:**

S. Lang, *Algebraic Number theory*, Second Edition, Springer, 1984.

**Mentor:** Ciganović Igor

## Ciklotomska polja

**Područje:** Teorija brojeva

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Algebarske strukture

**Naslov na engleskom:** Cyclotomic fields

**Opis teme:** Ciklotomsko proširenje algebarskog polja je polje sadržano u proširenju generiranom korijenom jedinice. Proširenja polja racionalnih brojeva generirana korijenom jedinice imaju posebnu vezu između Galoisove grupe i Eulerove funkcije.

**Literatura:**

S. Lang, *Algebraic Number theory*, Second Edition, Springer, 1984.

**Mentor:** Ciganović Igor

## Reprezentacije konačnih grupa

**Područje:** Reprezentacije grupa

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Representations of finite groups

**Opis teme:** Reprezentacija konačne grupe na konačno dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru je djelovanje grupe u smislu da imamo homomorfizam iz te grupe u grupu linearnih invertibilnih operatora danog vektorskog prostora. Osnovno svojstvo reprezentacija konačnih grupa je da se prostor može prikazati kao direktna suma ireducibilnih reprezentacija, odnosno invarijantnih potprostora koji ne sadrže manje invarijantne potprostore. U ovoj dekompoziciji je važna funkcija traga, odnosno karakter reprezentacije. Uvođenjem odgovarajućeg skalarnog produkta, karakteri ireducibilnih reprezentacija dane grupe su ortogonalni.

**Literatura:**

Representation Theory : A First Course / William Fulton, Joe Harris, New York <etc.> : Springer, 1991

**Mentor:** Ciganović Igor

## Konačna polja

**Područje:** Teorija brojeva

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Algebarske strukture

**Naslov na engleskom:** Finite fields

**Opis teme:** Zanima nas napraviti klasifikaciju konačnih polja, proučiti grupu automorfizama u smislu Galoisove teorije, te razmotriti neke reducibilnosti polinoma.

**Literatura:**

S. Lang, *Algebraic Number theory*, Second Edition, Springer, 1984.

**Mentor:** Gogić Ilja

## Kada su glatke funkcije analitičke?

**Područje:** Analiza

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** When are smooth functions analytic?

**Opis teme:** Neka je  $I$  otvoreni interval u  $\mathbb{R}$  i  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija (ili funkcija klase  $C^\infty$ ), što znači da postoje derivacije  $f', f'', \dots$ , svakog reda od  $f$ . Kažemo da je  $f$  analitička na  $I$  ako za svaku točku  $c \in I$  njen Taylorov red oko  $c$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n,$$

konvergira prema  $f$  na nekom podintervalu  $J \subseteq I$  oko  $c$ .

U ovom radu bi se obradila osnovna svojstva realnih analitičkih funkcija, dali bi se razni primjeri glatkih funkcija koje jesu i nisu analitičke, te bi se dokazali neki važni rezultati (kao Pringsheim-Boasov teorem i Bernsteinov teorem) koji daju dovoljne uvjete da bi glatka funkcija bila analitička.

### Literatura:

S. G. Krantz, H. R. Parks, *A Primer of Real Analytic Functions*, Birkhäuser Boston, MA, 2002.

R. P. Boas, *A Primer of Real Functions*, The Mathematical Association of America; 4th edition, 1997.

S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

B. Guljaš, *Matematička analiza I & II*, interna skripta, PMF-MO, Zagreb

dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf>

**Mentor:** Gogić Ilja

## Karakterizacije neprekidnosti i Vellemanov teorem

**Područje:** Analiza

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preuvjeti:** Metrički prostori

**Naslov na engleskom:** Characterizations of continuity and Velleman's theorem

**Opis teme:** U prvom dijelu diplomskog rada bi se obradile razne karakterizacije neprekidnosti funkcija  $f : X \rightarrow Y$ , gdje su  $X$  i  $Y$  metrički prostori. Jedna od tih karakterizacija kaže da je  $f$  neprekidna ako i samo ako je praslika svakog otvorenog skupa u  $Y$  po  $f$  otvoren skup u  $X$ . U drugom dijelu rada bi se dokazao Vellemanov teorem koji kaže da se neprekidnost funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ne može okarakterizirati u terminu slika, tj. ne postoje familije skupova  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  u  $\mathbb{R}$  takve da je proizvoljna funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna ako i samo ako za sve  $F \in \mathcal{F}$  vrijedi  $f(F) \in \mathcal{G}$ .

### Literatura:

Z. Čerin, *Metrički prostori*, interna skripta, PMF-MO

dostupno na <https://web.math.pmf.unizg.hr/~cerin/METR.pdf>.

G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, New York: John Wiley and Sons, 1984.

D. J. Velleman, *Characterizing continuity*, American Mathematical Monthly 104 (1997) 318–322.

**Mentor:** Hanzer Marcela

## Reprezentacije grupe $GL_2(\mathbf{F}_q)$ , gdje je $\mathbf{F}_q$ konačno polje

**Područje:** Algebra; Teorija reprezentacija

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** položen kolegij Algebarske strukture

**Naslov na engleskom:** Representations of the group  $GL_2(\mathbf{F}_q)$ , where  $\mathbf{F}_q$  is a finite field

**Opis teme:** Opće linearne grupe (nad proizvoljnim poljima) čine jednu od najznačajnijih serija grupa koje se javljaju u najrazličitijim granama matematike. Najjednostavnije je razumjeti njihove reprezentacije ako je riječ o grupama koje su i konačne, dakle, nad konačnim poljima. U radu bi se prvo objasnili osnovni pojmovi vezani uz teoriju reprezentacija konačnih grupa nužni za razvoj teorije, posebno konjugacijske klase i karakteri. Naglasak u radu bi bio na korištenju tih osnovnih pojmova u eksplisnom izračunu svih ireducibilnih reprezentacija opće linearne grupe ranga 2 nad konačnim poljima.

**Literatura:**

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory – A first course*, Springer, 1991.

**Mentor:** Hanzer Marcela

## Teorija reprezentacija konačnih grupa; Artinov teorem

**Područje:** Algebra; Teorija reprezentacija

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** položen kolegij Algebarske strukture, poželjno je da je položen i kolegij Algebra

**Naslov na engleskom:** Representation theory of finite groups; Artin's Theorem

**Opis teme:** Reprezentacije konačnih grupa su vrlo značajne za primjene u fizici ili kvantnoj kemiji, a u matematici su, zajedno s klasičnom harmonijskom analizom, ishodišna točka u razvoju teorije reprezentacija i drugih klasa grupa, npr. algebarskih. U radu bi se trebao dati osvrt na osnove teorije reprezentacija konačnih grupa, teoriju karaktera i osnovne koncepte (sume, tenzorski produkti, induciranje) uz analizu nekoliko primjera konkretnih grupa. U radu bi se trebali dokazati Artinov i Brauerov teorem, koji imaju značajnu ulogu u primjeni teorije reprezentacija, npr. u proučavanju  $L$ -funkcija.

### Literatura:

J.-P. Serre, *Linear representations of finite groups*, Springer, 1977.

C. W. Curtis, I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley, 1962.

**Mentor:** Hanzer Marcela

## Moebiusova transformacija

**Područje:** Kompleksna analiza; geometrija

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** položen kolegij Kompleksna analiza, položen kolegij Algebarske strukture

**Naslov na engleskom:** Moebius transformation

**Opis teme:** Problemi kompleksne analize su često jasniji ako ih prati geometrijski zor. S druge strane, Moebiusove transformacije, iako interesantne same po sebi, imaju i vrlo važnu ulogu u teoriji brojeva, i to putem modularnih formi.

U ovom radu će se dati osnove geometrije krugova u kompleksnoj ravnini (veza s hermitskim matricama), stereografske projekcije i zatim proučavati osnovna svojstva Moebiusove transformacije i njihovu klasifikaciju.

**Literatura:**

Schwerdtfeger, *Geometry of complex numbers: circle geometry, Moebius transformation, non-euclidean geometry*, Dover, 1979.

**Mentor:** Ilišević Dijana

## Wignerov teorem

**Područje:** Funkcionalna analiza

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Financijska i poslovna matematika, Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Kolegij "Normirani prostori"

**Naslov na engleskom:** Wigner's theorem

**Opis teme:** Neka su  $(H, (\cdot, \cdot))$  i  $(K, (\cdot, \cdot))$  unitarni prostori nad  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  te neka je  $f: H \rightarrow K$  preslikavanje koje zadovoljava

$$|(f(x), f(y))| = |(x, y)|, \quad x, y \in H.$$

Poznati Wignerov teorem kaže da je  $f$  rješenje gornje funkcijske jednadžbe ako i samo ako je  $f$  fazno ekvivalentna nekoj linearnoj ili antilinearnoj izometriji  $U$ , to jest,

$$f(x) = \sigma(x)Ux, \quad x \in H,$$

gdje je  $\sigma: H \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $|\sigma(x)| = 1$ ,  $x \in H$ , tzv. fazna funkcija. Ovaj čuveni rezultat igra važnu ulogu u kvantnoj mehanici i teoriji reprezentacija u fizici, a u ovom radu izložit će se neke njegove verzije s dokazima.

### Literatura:

G. Chevalier, *Wigner's theorem and its generalizations*, u: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, Elsevier, 2007, str. 429–475.  
i reference iz ovog preglednog rada

**Mentor:** Ilišević Dijana

## Jordanovi homomorfizmi i derivacije

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Kolegiji "Algebra 1 i 2" ili "Algebarske strukture"

**Naslov na engleskom:** Jordan homomorphisms and derivations

**Opis teme:** Aditivno preslikavanje  $f$  s prstena  $R$  u prsten  $R'$  se naziva homomorfizam ako je  $f(ab) = f(a)f(b)$  za sve  $a, b \in R$ , antihomomorfizam ako je  $f(ab) = f(b)f(a)$  za sve  $a, b \in R$ , a Jordanov homomorfizam ako je  $f(a^2) = f(a)^2$  za sve  $a \in R$ . Aditivno preslikavanje  $f: R \rightarrow R$  se naziva derivacija ako je  $f(ab) = f(a)b + af(b)$  za sve  $a, b \in R$ , a Jordanova derivacija ako je  $f(a^2) = f(a)a + af(a)$  za sve  $a \in R$ . Očigledno je svaki (anti)homomorfizam ujedno i Jordanov homomorfizam, a svaka derivacija ujedno i Jordanova derivacija. Obrati ovih tvrdnji su u posljednjih pedesetak godina bili predmetom proučavanja mnogih matematičara i općenito ne vrijede. Zadatak ovog diplomskog rada je opisati strukturu Jordanovih homomorfizama i Jordanovih derivacija u nekim posebnim slučajevima.

### Literatura:

- P. Ara, M. Mathieu, *Local multipliers of  $C^*$ -algebras*, Springer-Verlag, London, 2003.  
 M. Brešar, *Jordan mappings of semiprime rings*, J. Algebra 127 (1989), 218–228  
 I. N. Herstein, *Topics in ring theory*, Univ. of Chicago, Chicago, 1969.  
 T. W. Palmer, *Banach algebras and the general theory of  $*$ -algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

**Mentor:** Iljazović Zvonko

**Suvoditelj:** Prša Marija

## Svojtveni problem

**Područje:** Primijenjena matematika

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** The Eigenvalue Problem

**Opis teme:** U ovom radu će se proučavati pitanje svojstvenog problema. Krenulo bi se od osnovnih definicija i teorema, zatim bi se promatrali svojstveni problemi za neke specijalne vrste matrica, a spomenule bi se i različite numeričke metode za njihovo rješavanje. U završnom dijelu rada naglasak bi bio na primjeni svojstvenog problema na primjerima iz prakse.

**Literatura:**

J. W. Demmel, Applied Numerical Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 1997

N. Truhar, Numerička linearna algebra, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010

B. N. Datta, Numerical Linear Algebra and Applications, SIAM, Philadelphia, 2010

S. Vlase, M. Marin, A. Ochsner, Eigenvalue and Eigenvector Problems in Applied Mechanics, Springer Cham, 2019

**Mentor:** Iljazović Zvonko

**Suvoditelj:** Prša Marija

## Teoremi vektorske analize

**Područje:** Primijenjena matematika

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Theorems of vector analysis

**Opis teme:** Iz zanimljivog područja vektorske analize u ovom radu bi se prikazali, objasnili i dokazali neki od njenih integralnih teorema. Integralni teoremi vektorske analize, između ostalog, obuhvaćaju Greenov teorem, Teorem o divergenciji te Stokesov teorem, a u radu bi se pokrili svi ili samo neki od navedenih teorema.

### Literatura:

B.B. Hubbard, J.H. Hubbard, Vector Calculus, Linear Algebra and Differential Forms: A Unified Approach, Pearson College Div, London, 1998

D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008

I. Velčić, J.P. Milišić, L. Korkut, M. Krnić, M. Pašić, T. Burić, Vektorska analiza, Element, Zagreb, 2014

M. Antoni, Calculus with Curvilinear Coordinates, Springer Cham, 2018

**Mentor:** Jurak Mladen

## Ograničavajući volumeni u detekciji kolizija u video igrama

**Područje:** Geometrija i računarstvo

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Bounding volumes in collision detection in video games

**Opis teme:** U detekciji kolizija u video igrama važnu ulogu imaju ograničavajući volumeni. Oni omogućavaju efikasnu detekciju kolizija kompleksnih likova tako što se problem kolizije likova zamijenjuje problemom kolizije njihovih ograničavajućih volumena. Ograničavajući volumeni mogu imati različite oblike: sfere, kvadri i slično. Jednostavniji oblici dozvoljavaju bržu ali manje preciznu detekciju kolizija, dok složeniji oblici daju preciznije rezultate, ali traže veću količinu računanja.

Potrebno je proučiti najčešće korištene ograničavajuće volumene i algoritme za detekciju njihovih kolizija. Pored teorijskog dijela potrebno je demonstrirati opisane tehnike u softveru. Pri tome se može koristiti programski jezik python i biblioteka pygame, ili C++ i biblioteka SFML ili bilo koja druga softverska okolina u kojoj se kolizije mogu grafički prikazati.

Za temeljnu literaturu treba uzeti knjigu [1] poglavlja 4 i 5.

### Literatura:

- 1.Christer Ericson: Real-Time collisionDetection, Elsevier, 2005.
- 2.Gabor Szauer: Game Physics Cookbook, Packt Publishing, 2017.
- 3.Resursi na internetu.

**Mentor:** Jurak Mladen

## Metoda konačnih volumena za višekomponentni krosdifuzijski model biofilma

**Područje:** Primijenjena i numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi 1

**Naslov na engleskom:** Finite volume method for multi-species cross-diffusion biofilm model

**Opis teme:** Potrebno je implementirati metodu konačnih volumena za model biofilma prezentiran u [1]. Osnovne karakteristike modela su degeneracija parabolčnosti i krosdifuzija. Numerička shema je dana u članku [2]. Potrebno je opisati karakteristike sustava, formirati numeričku metodu i implementirati metodu u kodu za sustav s dvije komponente u dvije i tri prostorne dimenzije. Verificirati rezultate iz reference [2]. Kod implementirati u Dune biblioteci.

### Literatura:

- 1.E. S. Daus, J.-P. Milišić, N. Zamponi: Analysis of a degenerate and singular volume-filling cross-diffusion system modeling biofilm growth.
- 2.E. S. Daus, A. Jungel, A. Zurek: Convergence of a finite-volume scheme for a degenerate-singular cross-diffusion system for biofilms.
- 3.Dune biblioteka <https://www.dune-project.org/index.html>.

**Mentor:** Kovač Vjekoslav

## Egipatski razlomci

**Područje:** Teorija brojeva, Povijest matematike

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Egyptian fractions

**Opis teme:** Stari Egipćani su racionalne brojeve zapisivali kao zbrojeve različitih jediničnih razlomaka, tj. razlomaka s brojnikom 1. Takve prikaze danas nazivamo *egipatski razlomci*. Prvi cilj diplomskog je objasniti i ilustrirati njihovo povijesno pojavljivanje i upotrebu, npr. prema člancima [5], [2] i [4]. Drugi cilj diplomskog je rigorozno dokazati neke rezultate u vezi takvih prikaza, poput klasičnog Fibonaccijevog teorema. U novije vrijeme Paul Erdős je formulirao mnogobrojne slutnje u vezi rastava na egipatske razlomke, od kojih su neke dokazane/opovrgnute. Treći je cilj diplomskog dati pregled otvorenih problema i novijih rezultata o egipatskim razlomcima, npr. prema preglednim radovima [3] i [1] te članku [6].

### Literatura:

[1] T. F. Bloom, C. Elsholtz, *Egyptian fractions*, Nieuw Arch. Wiskd. (5), 23 (2022), 237–245.

[2] F. M. Brückler, *Egipatski razlomci*, Osječki matematički list 21 (2021), 75–80.

[3] R. L. Graham, *Paul Erdős and Egyptian fractions*, Erdős centennial, Bolyai Soc. Math. Stud. vol. 25, 289–309. János Bolyai Math. Soc., Budimpešta, 2013.

[4] R. Green, *Egyptian fractions*, A Piece of the Pi: mathematics explained, 2024.

<https://apieceofthepi.substack.com/p/egyptian-fractions>

(pristupljeno 13. 11. 2024.)

[5] D. Jankov, *Egipatski razlomci*, Osječki matematički list 11 (2011), 11–18.

[6] V. Kovač, *On eventually greedy best underapproximations by Egyptian fractions*, J. Number Theory (2025), 7 pp.

**Mentor:** Kovač Vjekoslav

## Konvergencija gotovo svuda u harmonijskoj analizi

**Područje:** Harmonijska analiza

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Convergence almost everywhere in harmonic analysis

**Opis teme:** Jedan cilj diplomskog je razraditi standardni pristup dokazivanju rezultata o g.s. konvergenciji u harmonijskoj analizi, svođenjem na tzv. maksimalne ocjene te potom dokazivanjem istih [1], [2]. Drugi cilj je razraditi nekoliko primjena tog pristupa, npr. na Lebesgue–Rademacherov teorem o diferenciranju, na g.s.-konvergenciju ergodičkih usrednjenja, ili na g.s.-konvergenciju rješenja jednadžbe provođenja prema početnom uvjetu. Tema je korisna za usvajanje klasičnih tehnika realne harmonijske analize.

### Literatura:

[1] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series 30, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[2] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Mathematical Series 32, Princeton University Press, Princeton, 1971.

**Mentor:** Kožić Slaven

## Problem četiri broja

**Područje:** Kombinatorika, linearna algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Four number problem

**Opis teme:** Neka je dan kvadrat čiji su vrhovi označeni prirodnim brojevima. U prvom koraku, kvadratu pridružimo novi kvadrat čiji su vrhovi polovišta stranica polaznog kvadrata. Vrhovi tog novog kvadrata označeni su apsolutnim vrijednostima razlika oznaka vrhova one stranice polaznog kvadrata na kojoj se nalaze. U svakom sljedećem koraku, sasvim analogno, zadnjem kvadratu kojeg smo konstruirali pridružujemo novi kvadrat. Ovaj postupak, tj. igra završava kada dobijemo kvadrat čiji su svi vrhovi označeni nulom. Cilj ovog diplomskog rada je proučiti različite aspekte ovakve igre, npr. hoće li se opisani postupak zaustaviti nakon konačno mnogo koraka, kako će se igra promijeniti ako dopustimo da su vrhovi označeni realnim brojevima i slično. Ovisno o afinitetu studenta, dio rada može biti posvećen proučavanju vjerojatnosti da igra završi u  $k$  koraka ili generalizaciji problema na  $n$ -terokute.

### Literatura:

B. Freedman, *The four number game*, Scripta Mathematica **14** (1948), 35–47.

J. D. Sally, P. J. Sally, *Roots to Research, A Vertical Development of Mathematical Problems*, AMS, 2007.

W. A. Webb, *The length of the four-number game*, Fibonacci Quarterly **20** (1982), 33–35.

**Mentor:** Kožić Slaven

## Kvantna determinanta

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Quantum determinant

**Opis teme:** Standardna definicija determinante  $\det: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  iz linearne algebre se može prirodno generalizirati na određene (nekomutativne) asocijativne algebre  $A$  tako da dobijemo funkciju  $\det: M_n(A) \rightarrow A$ . Takvu funkciju nazivamo *kvantnom determinantom*. Pokazuje se da se slika  $\det(M_n(A))$  kvantne determinante nalazi u centru od  $A$ . Cilj ovog diplomskog rada je proučiti primjenu kvantne determinante u konstrukciji centralnih elemenata određene klase kvantnih algebri, tzv. (*zakrenutih*) *Yangijana tipa A*.

**Literatura:**

A. Molev, *Yangians and Classical Lie Algebras*, American Mathematical Society 2007.

**Mentor:** Kožić Slaven

## Analiza igre križić-kružić u afinjoj ravnini

**Područje:** Kombinatorika, teorija grafova

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Analysis of the Tic-tac-toe game on the affine plane

**Opis teme:** Afina ravnina predstavlja generalizaciju pojma euklidske ravnine. Glavni cilj ovog diplomskog rada je proučiti osnovna svojstva igre križić-kružić u konačnim afinim ravninama s posebnim naglaskom na ispitivanje pobjedničkih strategija te uspostavljanje veze s latinskim kvadratima. Ovisno o afinitetu studenta, dio rada može biti posvećen naprednijim rezultatima vezanim uz igru na afinjoj ravnini reda 4 ili njejoj generalizaciji na druge matematičke objekte poput grafa ili hiperkocke.

### Literatura:

R. A. Beeler, *Tic-Tac-Toe on Graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **72** (2018), 106–112.

J. Beineke, J. Rosenhouse, *The Mathematics of Various Entertaining Subjects*, Princeton University Press 2016.

P. Danziger, M. A. Huggan, R. Malik, T. G. Marbach, *Tic-Tac-Toe on an Affine Plane of order 4*, Australasian Journal of Combinatorics, **82** (2022), 21–30.

S. W. Golomb, A. W. Hales, *Hypercube Tic-Tac-Toe*, MSRI Publications **42** (2002), 167–182.

**Mentor:** Ljulj Matko

## Mješovita formulacija za model elastične ljuske

**Područje:** Parcijalne diferencijalne jednačbe, Numerička analiza

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Mixed formulation for the elastic shell model

**Opis teme:** Linearni model ljuske Naghdijeva tipa koji su prezentirali Tambača i Tutek 2016. dobro je definiran model za ljuske kojima je srednja ploha parametrizirana Lipschitz-neprekidnom funkcijom. Međutim, varijacijska formulacija u modelu sadrži dva člana koja su množena faktorom  $h$  i  $h^3$ , redom (gdje je  $h$  parametar debljine ljuske), što prilikom numeričkog rješavanja može dovesti to grešaka za male  $h$ . Zato se za ovaj model može izvesti mješovita formulacija kojom bi se numerička aproksimacija učinila stabilnijom. Cilj ovog rada je implementirati mješovitu formulaciju te napraviti odgovarajuću analizu.

### Literatura:

M. Jurak, *Praktikum primijenjene matematike II. Metoda konačnih elemenata*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2006.

J. Tambača, Z. Tutek, A new linear Naghdi type shell model for shells with little regularity, *Applied Mathematical Modelling* 40 (2016), 23-24, 10549-10562.

F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, 1991.

**Mentor:** Manger Robert

**Suvoditelj:** Klobučar Barišić Ana

## Dvostruka rimska dominacija

**Područje:** Oblikovanje i analiza algoritama, Optimizacija

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Double Roman domination

**Opis teme:** Dvostruka rimska dominacija (DRD) je problem kombinatorne optimizacije definiran na neusmjerenim grafovima. Početni problem je postavio rimski car Konstantin u 4. stoljeću, a glasi: “Kako strateški rasporediti legije da Rimsko carstvo bude obranjeno od barbara”? Detaljnije, ako je legija stacionirana na nekom mjestu, ono se smatra sigurnim. Nesigurna mjesta moraju biti blizu sigurnih. Ako postanu napadnuta, šalje se legija iz obližnjeg sigurnog mjesta, koje treba imati barem dvije legije da ostane sigurno. Nadalje, treba postaviti što manje legija zbog skupoće održavanja. Dvostruka rimska dominacija je jača verzija rimske dominacije koja omogućava dvostruku sigurnost. Danas se problem može promatrati kao zadatak dodjele različitih pružatelja usluga kao što su vojne jedinice, vatrogasne službe ili vozila hitne pomoći na odabrane lokacije.

U diplomskom radu potrebno je najprije izložiti teorijske rezultate o DRD te o njenoj novijoj verziji koja uzima u obzir i troškove održavanja usluga. U praktičnom dijelu rada trebalo bi implementirati heuristiku za rješavanje novije verzije.

### Literatura:

T.W. Haynes: Fundamentals of domination in graphs. CRC Press, 1998.

D. Rupnik Puklukar, J. Žerovnik: Double Roman Domination - A Survey. Mathematics 11(2), 2023.

A. Klobučar Barišić, R. Manger: Solving the minimum-cost double Roman domination problem. Central European Journal of Operations Research 32, 793–817, 2024.

**Mentor:** Marušić Miljenko

## Splajn kolokacija za singularno perturbirane rubne probleme

**Područje:** numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Spline collocation for singularly perturbed boundary value problem

**Opis teme:** U diplomskom radu treba opisati i usporediti nekoliko metoda koje koriste splajn funkcije za numeričko rješavanje singularno perturbiranog rubnog problema za ODJ. Singularno perturbirani problem je rubni problem za diferencijalnu jednadžbu oblika  $\varepsilon y'' + by' + cy = f$ , gdje je  $\varepsilon$  jako mali realni broj.

**Literatura:**

J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin, *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems*, World Scientific, Singapore, 1996.

**Mentor:** Marušić Miljenko

## Eksponecijalno prilagođene diferencijske sheme

**Područje:** numerička matematika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Exponentially fitted difference schemes

**Opis teme:** U diplomskom radu treba prikazati i usporediti nekoliko diferencijskih shema koje se primjenjuju za numeričko rješavanje singularno perturbiranog rubnog problema za ODJ. Singularno perturbirani problem je rubni problem za diferencijalnu jednažbu oblika  $\varepsilon y'' + by' + cy = f$ , gdje je  $\varepsilon$  jako mali realni broj.

**Literatura:**

J. J. H. Miller, E. O'Riordan, G. I. Shishkin, *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems*, World Scientific, Singapore, 1996.

**Mentor:** Marušić Miljenko

## Eksponecijalni integratori

**Područje:** numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Exponential integrators

**Opis teme:** U diplomskom radu treba prikazati i usporediti nekoliko eksponencijalno prilagođenih metoda koje se primjenjuju za numeričko rješavanje inicijalnog problema za obične diferencijalne jednačbe. Od posebnog je interesa primjena na krute probleme.

**Literatura:**

M. Hochbruck, A. Ostermann, *Exponential integrators*, Acta Numerica, **19** (2010) 209–286

**Mentor:** Marušić Miljenko

## Kolokacija splajnom za rubni problem za ODJ

**Područje:** numerička matematika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Spline collocation for boundary value problem for ODE

**Opis teme:** U diplomskom radu treba opisati metodu kolokacije splajn funkcijama primjenjenu na rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu oblika  $a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$ . Treba prikazati rezultate o konvergenciji metode te na nekoliko primjera ilustrirati metodu.

**Literatura:**

C. de Boor, *A Practical Guide to Splines*, Springer–Verlag, New York, 1978.

A. Lamniia, H. Mraoui, *Spline collocation method for solving boundary values problem*, International Journal of Mathematical Modelling & Computations, **3** (2013) 11–23.

**Mentor:** Marušić-Paloka Eduard

## Uvod u varijacijski račun

**Područje:** Primijenjena matematika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Matematička analiza 1,2,3. + Obične diferencijalne jednačbe ili Diferencijalni i integralni račun 1 i 2 + Primijenjena matematička analiza

**Naslov na engleskom:** Introduction to the calculus of variations

**Opis teme:** Cilj rada je uvesti osnovne pojmove i rezultate vezane uz varijacijski račun. Struktura diplomskog rada bi trebala biti: formulacija problema, primjeri i motivacija, Hamiltonov princip i Lagrangeove jednačbe, Eulerove jednačbe.

**Literatura:**

P. J. Collins, *Differential and integral equations*, Oxford University Press, 2005.

**Mentor:** Marušić-Paloka Eduard

## Fundamentalna rješenja za paraboličke parcijalne diferencijalne jednačbe

**Područje:** Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Matematička analiza 1, 2, 3. Parcijalne diferencijalne jednačbe.

**Naslov na engleskom:** Fundamental solutions for parabolic partial differential equations

**Opis teme:** Cauchyjev problem za linearnu paraboličku PDJ. Holderovi prostori. Potencijali. Konstrukcija fundamentalnog rješenja. Svojstva. Egzistencija i jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema.

**Literatura:**

A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Dover, 2008.

G. M. Liebermann, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific, 1996.

**Mentor:** Marušić-Paloka Eduard

## Sturm-Liouvilleov problem

**Područje:** Diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** Obične diferencijalne jednačbe ili Primijenjena matematička analiza.

**Naslov na engleskom:** Sturm-Liouville problem

**Opis teme:** Cilj rada je iznijeti osnovne rezultate vezane uz Sturm-Liouvilleov problem. Rad bi trebao obraditi sljedeće teme: diferencijalna jednačba 2. reda, svojstvene vrijednosti i svojstvene funkcije, Greenova funkcija, specijalne funkcije.

**Literatura:**

P. J. Collins, *Differential and integral equations*, Oxford University Press, 2005.

**Mentor:** Marušić-Paloka Eduard

## Krivuljni integrali

**Područje:** Matematička analiza

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Matematička analiza 3 ili Diferencijalni i integralni račun 2

**Naslov na engleskom:** Line integral

**Opis teme:** Krivulje. Osnovni pojmovi. Krivuljni integral skalarne funkcije (integral prve vrste). Krivuljni integral vektorske funkcije (integral druge vrste). Neovisnost o izboru parametrizacije. Greenov teorem.

**Literatura:**

S. Kurepa, *Matematička analiza 3*, Tehnička knjiga, 1979.

J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Vectro calculus*, Freeman, 4th edition, 2000.

**Mentor:** Milin Šipuš Željka

## Pravčaste plohe u prostornim formama

**Područje:** Diferencijalna geometrija

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** Uvod u diferencijalnu geometriju / Diferencijalna geometrija

**Naslov na engleskom:** Ruled surfaces in space forms

**Opis teme:** Cilj ovog diplomskog rada je proučiti pravčaste plohe u trodimenzionalnim prostornim formama. Prostorne forme su potpune Riemannove mnogostrukosti konstantne sekcijske zakrivljenosti, a pravčaste plohe u njima generirane su 1-parametarskom familijom geodetskih krivulja (posebno, u  $\mathbb{E}^3$  pravcima). U  $\mathbb{E}^3$  je poznato da su sve plosnate plohe (tj. plohe kojima Gaussova zakrivljenost iščezava,  $K = 0$ ) pravčaste, te da se mogu opisati kao unija cilindričnih, stožastih i tangentnih ploha. Sustavno proučavanje pravčastih ploha u prostornim formama, posebno u  $\mathbb{S}^3$  i  $\mathbb{H}^3$ , napravljeno je tek u [2].

### Literatura:

1. E. Abbena, S. Salamon, A. Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC; 3rd edition, 2006.
2. L. C. B. da Silva, J. D. da Silva, Characterization of manifolds of constant curvature by ruled surfaces. São Paulo J. Math. Sci. 16, 1138–1162 (2022). <https://doi.org/10.1007/s40863-022-00319-7>

**Mentor:** Milin Šipuš Željka

## Björlingova formula i minimalne plohe

**Područje:** Diferencijalna geometrija

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** Uvod u diferencijalnu geometriju

**Naslov na engleskom:** Björling's formula and minimal surfaces

**Opis teme:** Minimalne plohe su plohe kojima srednja zakrivljenost iščezava. Javljaju se kao rješenja mnogih problema, primjerice problema minimizacije funkcije površine, Plateau-ovog, te Björling-ovog problema. U drugom, minimalne plohe se dobivaju kao plohe minimalne potencijalne površinske energije čime se omogućava njihova eksperimentalna realizacija kao ploha od sapunice. Generiranje minimalnih ploha pomoću tzv. Björlingove formule u kompleksnim koordinatama opisuje minimalne plohe kao plohe sa zadanom krivuljom koja na njima leži te plošnom normalom. Cilj ovog diplomskog rada je uvesti potrebnu teoriju za opisivanje minimalnih ploha pomoću Björlingove formule, te generirati primjere. Pomoću minimalnih ploha moguće je opisati mnoge prirodne objekte kao i objekte u arhitekturi, umjetnosti i slično.

### Literatura:

1. E. Abbena, S. Salamon, A. Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, Chapman and Hall, CRC, 2006.
2. B. Odehnal, On algebraic minimal surfaces, KoG 20(2016), 61-78.

**Mentor:** Muha Boris

## Nash-Kuiperov teorem

**Područje:** Diferencijalna geometrija, Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** Diferencijalna geometrija ili Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Naslov na engleskom:** Nash-Kuiper theorem

**Opis teme:** Cilj radnje je dokazati Nash-Kuiperov teorem o  $C^1$  izometričkim ulaganjima  $m$ -dimenzionalne mnogostrukosti  $M$  u  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq m + 1$ .

**Literatura:**

J. Nash,  *$C^1$  isometric imbeddings*, Ann. of Math. (2), 60:383–396, 1954.

Székelyhidi Jr, L., *From isometric embeddings to turbulence*. HCDTE lecture notes. Part II. Nonlinear hyperbolic PDEs, dispersive and transport equations, 7, 2012.

**Mentor:** Muha Boris

## Teorija glasovanja i demokracija: Matematičke osnove i paradoksi društvenog izbora

**Područje:** Primjena matematike u društvenim znanostima

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Voting Theory and Democracy: Mathematical Foundations and Paradoxes of Social Choice

**Opis teme:** Cilj ovog rada jest istražiti ulogu matematike u demokratskim procesima i sustavima glasovanja, s posebnim naglaskom na Arrowljev teorem o nemogućnosti. Rad će obuhvatiti formalne dokazne korake Arrowljevog teorema te njegovu primjenu u analizi poštenih sustava glasovanja. Student će simulirati ishode glasovanja u raznim sustavima i tako ilustrirati kako odabrani sustav glasovanja može utjecati na konačan ishod, ovisno o načinu agregacije preferencija birača.

### Literatura:

Arrow, K.J., 2012. Social choice and individual values (Vol. 12). Yale university press.

Hodge, J.K. and Klima, R.E., 2018. The mathematics of voting and elections: a hands-on approach (Vol. 30). American Mathematical Soc.

Taylor, A.D., 2005. Social choice and the mathematics of manipulation. Cambridge University Press.

Taylor, A.D. and Pacelli, A.M., 2009. Mathematics and politics: strategy, voting, power, and proof. Springer Science & Business Media.

**Mentor:** Muha Boris

## Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya i Navier-Stokesove jednađbe

**Područje:** Povijest matematike, Diferencijalne jednađbe

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Primijenjena matematička analiza ili Obične diferencijalne jednađbe

**Naslov na engleskom:** Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya and the Navier-Stokes equations

**Opis teme:** Cilj ovog rada jest pružiti biografski prikaz života Olge Alexandrovne Ladyzhenskay te predstaviti njezine ključne doprinose matematičkoj teoriji Navier-Stokesovih jednađbi. Konkretno, u rad će se dokazati Ladyzhenskay-ina nejednakost i objasniti ulogu te nejednakosti u teoriji dobre postavljene Navier-Stokesovih jednađbi.

### Literatura:

Dumbaugh, Della, Panagiota Daskalopoulos, Anatoly Vershik, Lev Kapitanski, Nicolai Reshetikhin, Darya Apushkinskaya, and Alexander Nazarov. "The Ties That Bind Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya and the 2022 ICM in St. Petersburg." *Notices of the American Mathematical Society* 67, no. 3 (2020): 373.

Friedlander, Susan, Peter Lax, Cathleen Morawetz, Louis Nirenberg, Gregory Seregin, Nina Ural'tseva, and Mark Vishik. "Olga Alexandrovna Ladyzhenskaya." *Notices of the AMS* 51, no. 11 (2004).

Galdi, Giovanni P. "An introduction to the Navier-Stokes initial-boundary value problem." In *Fundamental directions in mathematical fluid mechanics*, pp. 1-70. Basel: Birkhäuser Basel, 2000.

Ladyzhenskaya, Olga Aleksandrovna. "The mathematical theory of viscous incompressible flow." Gordon & Breach (1969).

**Mentor:** Nakić Ivica

## Fourierova transformacija na vremenskom otvoru

**Područje:** Obrada signala, harmonijska analiza

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preduvjeti:** Nema

**Naslov na engleskom:** Short-Time Fourier Transform

**Opis teme:** Fourierova transformacija na vremenskom otvoru (STFT - Short-Time Fourier Transform) je često korišten alat kod obrade zvučnih, posebno glazbenih signala. STFT pruža vremenski lokalizirane informacije o frekvenciji za situacije u kojima komponente frekvencije signala variraju tijekom vremena, dok standardna Fourierova transformacija daje informacije o frekvenciji u prosjeku za cijeli vremenski interval signala. STFT je važan alat u obradi signala, naročito pri obradi zvučnih signala. Cilj diplomskog rada je izložiti matematičku pozadinu STFT-a te objasniti primjenu STFT-a u vremensko-frekvencijskoj analizi zvučnih signala.

### Literatura:

J. N. Kutz, *Data-driven modeling & scientific computation: Methods for Integrating Dynamics of Complex Systems and Big Data*, 2nd ed, [https://faculty.washington.edu/kutz/kutz\\_book\\_v2.pdf](https://faculty.washington.edu/kutz/kutz_book_v2.pdf) (2024)

Ø. Ryan, *Linear Algebra, Signal Processing, and Wavelets: A Unified Approach*, Springer, (2019)

**Mentor:** Nakić Ivica

## Algoritmi najkraćeg puta

**Područje:** Teorija grafova, Računarstvo

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** predznanje obuhvaćeno kolegijem Kombinatorna i diskretna matematika

**Naslov na engleskom:** Shortest path algorithms

**Opis teme:** Cilj diplomskog rada je izložiti Dijkstrin i Bellman-Fordov algoritam za nalaženje najkraćeg puta u težinskom grafu i dokazati njihova osnovna svojstva.

**Literatura:**

D. P. Williamson, *Network flow algorithms*, Cambridge University Press, 2019.

**Mentor:** Pandžić Pavle

## Konačne grupe refleksija

**Područje:** algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Finite reflection groups

**Opis teme:** U ovoj se temi obrađuju osnove teorije konačnih grupa refleksija. Osnovni su primjeri Weylove grupe sistema korijena.

**Literatura:**

L. C. Grove, T. C. Benson, *Finite reflection groups*, Springer, 1985.

J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Springer, 1997.

W. Soergel, *Spiegelungsgruppen und Wurzelsysteme*,

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXSPIEG.pdf>

**Mentor:** Pandžić Pavle

## Realne forme prostih Liejevih algebri

**Područje:** algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Real forms of simple Lie algebras

**Opis teme:** U ovoj se temi pretpostavlja klasifikacija kompleksnih prostih Liejevih algebri i na osnovu nje se dobiva klasifikacija realnih prostih Liejevih algebri. Osnovna metoda je korištenje tzv. Voganovih dijagrama.

**Literatura:**

A. W. Knap, *Lie groups: beyond an introduction*, Birkhäuser, Boston, 1996.

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course*, Springer, 1991.

**Mentor:** Pandžić Pavle

## Proste kompleksne Liejeve algebre

**Područje:** algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Simple complex Lie algebras

**Opis teme:** U ovoj se temi obrađuju osnove teorije Liejevih algebri te klasifikacija kompleksnih prostih Liejevih algebri pomoću njihovih sistema korijena.

**Literatura:**

J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and Representation Theory*, Springer, 1997.

W. Fulton, J. Harris, *Representation theory. A first course.*, Springer, 1991.

**Mentor:** Pažanin Igor

## Reynoldsov zakon

**Područje:** Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Reynolds law

**Opis teme:** U teoriji lubrikacije (podmazivanja) promatra se tok tankog sloja mazi-va koji razdvaja dvije hrapave površine koje se gibaju jedna u odnosu na drugu. Cilj ovog rada izvesti je osnovni Reynoldsov zakon i dovesti ga u vezu s temeljnim zakoni-ma sačuvanja. Također, diskutirali bi se i određeni modeli iz recentne literature koji predstavljaju korekcije Reynoldsovog zakona.

**Literatura:**

A. Z. Szeri, *Fluid Film Lubrication*, Cambridge University Press, 2010.

G. Bayada, M. Chambat, *The transition between the Stokes equations and the Reynolds equation: A mathematical proof*, Appl. Math. Opt. 14 (1986), 73–93.

**Mentor:** Pažanin Igor

## Matematičko modeliranje demokratskih procesa

**Područje:** Matematičko modeliranje

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Mathematical modelling of democratic processes

**Opis teme:** Cilj ovog rada izvesti je te analizirati jednostavne matematičke modele koji opisuju dinamiku izbornih i postizbornih procesa. Modeli su dani sustavima običnih diferencijalnih jednačini, a za njihovu analizu koristi se teorija stabilnosti i numeričke simulacije.

**Literatura:**

A.K. Misra, *A simple mathematical model for the spread of two political parties*, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 17 (2012), 343–354.

T. Chilachava, L. Sulava, *Mathematical and computer modeling of elections*, *Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences, Proceedings*, v. XV – XVI (2018), 174–190.

**Mentor:** Pažanin Igor

## Neizotermni tok fluida u poroznoj sredini

**Područje:** Parcijalne diferencijalne jednačbe

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Non-isothermal fluid flow through a porous medium

**Opis teme:** Proučavanje toka fluida u poroznoj sredini od iznimnog je značaja sa praktičnog stanovišta. Polazeći od temeljnih zakona sačuvanja, u ovom radu izveli bi osnovne jednačbe koje opisuju neizotermni tok u poroznoj sredini te diskutirali pripadne rubne uvjete. Također, bavili bi se i primjerima jednostavnih tokova za koje je moguće odrediti točna rješenja.

**Literatura:**

D. A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, 2017.

P. M. Adler, *Porous Media: Geometry and Transports*, Butterworth–Heinemann, 1992.

**Mentor:** Pedić Tomić Veronika

## Elementarne nejednakosti

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Elementary inequalities

**Opis teme:** Matematički problemi vezani uz rješavanje nejednakosti vrlo su zastupljeni, kako u nastavi srednjoškolske matematike i školskim matematičkim natjecanjima, tako i u nastavi fakultetske matematike.

U ovom diplomskom radu dat ćemo pregled i dokaz nekoliko osnovnih vrsta matematičkih nejednakosti, uključujući nejednakosti kvadratne, algebarske, geometrijske i harmonijske sredine (K-A-G-H) te Cauchy-Schwarzovu nejednakost. Također, demonstrirat ćemo korištenje navedenih nejednakosti na zadacima sa srednjoškolskih i fakultetskih matematičkih natjecanja.

### Literatura:

1. Brown, T. Arnold. "Elementary Inequalities." The Mathematical Gazette, vol. 25, no. 263, 1941, pp. 2–11. JSTOR,
2. D. S. Mitrinović, Elementary Inequalities, Pp.159., 1964. (P. Noordhoff Ltd., Groningen). The Mathematical Gazette. 1965;49(370):456-457.
3. Pečarić, J.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996.

**Mentor:** Pedić Tomić Veronika

## Matematika i teorija struna

**Područje:** Algebra, Topologija

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Mathematics and String Theory

**Opis teme:** Teorija struna fizikalni je i kozmološki model kojim se povezuju kvantna fizika i teorija gravitacije, a već se desetljećima posebna pozornost pridaje istraživanju zrcalnih simetrija, tj. odnosu između dviju zrcalnih Calabi-Yau mnogostrukosti. U ovom diplomskom radu dat ćemo elementarni pregled teorije struna i njezinih poveznica s matematikom, uz poseban naglasak na zrcalne simetrije.

**Literatura:**

1. Zwiebach, B. (2004) A First Course in String Theory. Cambridge University Press, Cambridge,
2. Hori, K., Katz, S., Klemm, A., Pandharipande, R., Thomas, R., Vafa, C., Vakil, R., Zaslow, E. (2003). Mirror Symmetry. (Clay Mathematics Monographs, Vol. 1). American Mathematical Society.

**Mentor:** Pedić Tomić Veronika

## Prosti brojevi u kriptografiji

**Područje:** Teorija brojeva

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Prime numbers in cryptography

**Opis teme:** Kriptografija je znanstvena disciplina o prevođenju jasnog teksta u kriptirani tekst, kako bi njegov sadržaj bio poznat samo onome koji posjeduje ključ za odgonetanje. Moderna kriptografija temelji se na matematičkim i računalnim metodama, posebno na korištenju dovoljno velikih prostih brojeva.

U ovom diplomskom radu dat ćemo povijesni pregled kriptografije te pregled najvažnijih rezultata iz teorije brojeva koji se koriste u modernoj kriptografiji.

**Literatura:**

A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

A. Dujella, M. Maretić, *Kriptografija*, Element, Zagreb, 2007.

**Mentor:** Pedić Tomić Veronika

## Monster grupa

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preduvjeti:** Nema

**Naslov na engleskom:** Monster group

**Opis teme:** Monster (čudovišna) grupa, poznata još i kao Fischer-Griess grupa te kao "prijateljski div", najveća je sporadična prosta grupa. Međutim, sasvim neočekivano, monster grupa je duboko povezana i s modularnim funkcijama te se ta poveznica obično naziva čudovišna mjesečina (monstrous moonshine). Na taj način monster grupa igra i važnu ulogu u teoriji verteks-algebri.

U ovom radu dat ćemo pregled klasifikacije konačnih prostih grupa uz naglasak na čudovišnu grupu. Također, dat ćemo kratak uvod u teoriju čudovišne mjesečine i opis verteks-algebre Moonshine Module, kojoj je Monster grupa grupa simetrija.

### Literatura:

1. D. Gorenstein, *Finite simple groups*, University Series in Mathematics, New York: Plenum Publishing Corp., 1982.
2. I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Appl. Math., vol. 134, Academic Press, 1988.
2. R. Borcherds, *Monstrous Moonshine and Monstrous Lie Superalgebras*, Invent. Math., 1992.

**Mentor:** Pejković Tomislav

## Kongruencije za Stirlingove i povezane brojeve

**Područje:** kombinatorika, teorija brojeva

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Congruences for Stirling and Related Numbers

**Opis teme:** U radu će se proučiti neke od kongruencija koje zadovoljavaju Stirlingovi brojevi prve i druge vrste, Bellovi i Fubinijevi brojevi te neke blisko vezane rezultate.

**Literatura:**

I. Mezo, Combinatorics and Number Theory of Counting Sequences, Chapman and Hall/CRC, 2019.

D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, 2001.

**Mentor:** Pejković Tomislav

## Melzakova formula

**Područje:** kombinatorika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Melzak's Formula

**Opis teme:** U radu će se promatrati binomni identitet pripisan Z.A. Melzaku kao i posljedice i generalizacije te formule. Tijekom proučavanja pojavljuju se i neka poznatija pitanja polinomne interpolacije.

**Literatura:**

J. Quaintance, Combinatorial Identities for Stirling Numbers: The Unpublished Notes of H W Gould, World Scientific Publishing Co., 2015.

R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics - A foundation for computer science (2nd ed.), Addison-Wesley Professional, 1994.

**Mentor:** Perše Ozren

## Liejeve grupe i Liejeve algebre

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** Dobro poznavanje gradiva kolegija "Vektorski prostori" i "Algebra"

**Naslov na engleskom:** Lie groups and Lie algebras

**Opis teme:** U ovom radu se planiraju proučavati pojmovi Liejeve grupe i Liejeve algebre, te njihove međusobne veze.

**Literatura:**

J. S. Milne, *Lie Algebras, Algebraic Groups, and Lie Groups* (online)

N. Bourbaki, *Elements of Mathematics, Lie Groups and Lie Algebras*, Springer 2005.

**Mentor:** Perše Ozren

## Jordanove algebre

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Poželjno je poznavanje gradiva kolegija "Vektorski prostori" i "Algebra"

**Naslov na engleskom:** Jordan algebras

**Opis teme:** U ovom radu se planira proučavati strukturna teorija Jordanovih algebri.

**Literatura:**

K. McCrimmon, *A Taste of Jordan algebras*, Springer, 2004.

**Mentor:** Perše Ozren

## Poluproste Liejeve algebre

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika

**Preduvjeti:** Dobro poznavanje gradiva kolegija "Vektorski prostori" i "Algebra"

**Naslov na engleskom:** Semisimple Lie algebras

**Opis teme:** U ovom radu planiraju se obraditi neke osnovne teme iz strukturne teorije poluprostih Liejevih algebri i njihovih reprezentacija, kao što su Cartanova podalgebra, korijenska dekompozicija, moduli najveće težine i sl.

**Literatura:**

J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

**Mentor:** Radunović Goran

## Egzistencija meromorfnih funkcija i teorem o Riemannovom preslikavanju

**Područje:** kompleksna analiza

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** kompleksna analiza

**Naslov na engleskom:** Existence of Meromorphic Functions and the Riemann Mapping Theorem

**Opis teme:** Proučavali bi se napredniji koncepti kompleksne analize kao što su analitička proširivost, konformna preslikavanja i kompaktifikacija s ciljem dokazivanja tri fundamentalna teorema: Mittag-Lefflerov teorem o egzistenciji meromorfnih funkcija s unaprijed predodređenim polovima; Weierstrassov teorem o egzistenciji holomorfnih funkcija s unaprijed predodređenim nulama te teorem o Riemannovom preslikavanju.

### Literatura:

W. Schlag, *A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Mathematics (Book 154). Amer. Mathematical Society, 2014.

S. Lang, *Complex Analysis*, Graduate Texts in Mathematics (Book 103), Springer, 4th edition, 2003.

**Mentor:** Radunović Goran

## Funkcije izvodnice i primjene

**Područje:** kombinatorna i diskretna matematika

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Generating functions and applications

**Opis teme:** Istraživale bi se funkcije izvodnice i njihove primjene uključujući i Lagrangeovu formulu inverzije, poopćene binomne i eksponencijalne redove te hipergeometrijske redove.

**Literatura:**

Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001

**Mentor:** Radunović Goran

## Multilinearni funkcionali i tenzori

**Područje:** linearna algebra

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Multilinear functionals and tensors

**Opis teme:** Uveo bi se pojam multilinearnog funkcionala i tenzora te bi se proučavala osnovna svojstva i pojmovi konstantnog tenzora i invarijante tenzora. Također bi se obradio i pojam polja tenzora te primjene vezane uz pojmove krivolinijskih koordinata, geodetskih krivulja i Riemannovog prostora.

**Literatura:**

S. Kurepa *Konačnodimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

**Mentor:** Radunović Goran

## Fraktalni skupovi generirani transformacijama

**Područje:** fraktalna geometrija

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** integral i mjera, metrički prostori

**Naslov na engleskom:** Fractal sets generated by transformations

**Opis teme:** Proučavali bi se fraktalni skupovi generirani transformacijama, tj. sistemima iteriranih funkcija. Najvažniji primjeri ovakvih fraktala su sebi-slični i sebi-afini skupovi. Prethodno bi se uvelo pojmove Hausdorffove dimenzije, box dimenzije i dimenzije Minkowskog te proučilo njihova glavna svojstva. Dokazali bi se glavni teoremi o dimenzijama sebi-sličnih i sebi-afinih skupova.

**Literatura:**

K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 3rd Edition, Wiley, 2014.

G. David, S. Semmes, *Fractured Fractals and Broken Dreams: Self-Similar Geometry through Metric and Measure*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications (Book 7), Clarendon Press, 1998.

**Mentor:** Radunović Goran

## Frakcionalni integro-diferencijalni račun i primjene

**Područje:** Matematička analiza

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Fractional integro-differential calculus and applications

**Opis teme:** Proučavao bi se Riemann-Liouvilleov frakcionalni integro-diferencijalni operator koji poopćuje klasične operatore  $n$ -strukog diferenciranja i integriranja na slučaj kada  $n$  više nije nužno prirodan broj. Obradile bi se i primjene na rješavanje diferencijalnih jednačbi uz osvrt na klasične probleme Abelove integralne jednačbe, Heavisideovog operatorskog računa i Liouvilleovog problema.

**Literatura:**

Osnovna: K. S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York 1993

Dodatna: A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*

**Mentor:** Radunović Goran

## Bedford-McMullenovi sagovi

**Područje:** fraktalna geometrija, realna analiza

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** metrički prostori

**Naslov na engleskom:** Bedford-McMullen carpets

**Opis teme:** Proučavala bi se fraktalna svojstva Bedford-McMullenovih sagova koji predstavljaju najjednostavniji primjer fraktalnih skupova koji su sebi-afini, ali nisu nužno sebi-slični. Naglasak bi bio na određivanju nekoliko klasičnih fraktalnih dimenzija Bedford-McMullenovih sagova kao što su Hausdorffova, Assouadova, box dimenzija te dimenzija pakiranja. Također proučavale bi se i relativno nove tehnike interpoliranja dimenzija.

### Literatura:

J. Fraser, Fractal geometry of Bedford-McMullen carpets, In: *Pollicott, M., Vienti, S. (eds) Thermodynamic Formalism. Lecture Notes in Mathematics*, vol 2290. Springer, Cham

K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, 3rd Edition, Wiley, 2014.

**Mentor:** Resman Maja

## Kaotična dinamika i fraktalna dimenzija

**Područje:** analiza, dinamički sustavi

**Prikladno za studij:** svi studiji (i Biomedicinska matematika)

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Chaotic dynamics and fractal dimension

**Opis teme:** U radu se promatraju iteracije jednodimenzionalnih kvadratnih preslikavanja na segmentu koja generiraju kaotičnu dinamiku na Cantorovom skupu, a zatim se generaliziraju na 2-d preslikavanja potkove. Određuju se i fraktalne dimenzije invarijantnih skupova na kojima je dinamika kaotična.

**Literatura:**

Devaney, R.L., An introduction to chaotic dynamical systems, 2nd edition, Westview Press, 2003

K. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge University Press (1985)

**Mentor:** Resman Maja

## Pickov teorem i teorem Minkowskog

**Područje:** geometrija

**Prikladno za studij:** nastavnički studiji

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Pick and Minkowski theorems

**Opis teme:** Rad se bavi raznim dokazima Pickovog teorema za jednostavno računanje površine poligona koji ima vrhove u cjelobrojnoj mreži u ravnini. Jedan od dokaza koristi tzv. Teorem Minkowskoga o dovoljnim uvjetima da bi konveksan, omeđen skup simetričan u odnosu na ishodište sadržavao točku cjelobrojne mreže različitu od  $(0,0)$ . Razmatraju se i generalizacije teorema na  $\mathbb{R}^n$ .

### Literatura:

<https://mast.queensu.ca/~murty/murty-thain.pdf>

<https://web.archive.org/web/20170829044759/http://documents.kenyon.edu/math/GarbettJSenEx2011.pdf>

C. Blatter, Another proof of Pick's theorem Math. Mag.70 (1997)

A. Bogomolny, A proof of Pick's theorem, [http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick\\_proof.shtml](http://www.cut-the-knot.org/ctk/Pick_proof.shtml)

**Mentor:** Resman Maja

## Dinamika racionalnih preslikavanja na sferi i izračunljivost Julia skupova

**Područje:** kompleksna analiza, dinamički sustavi

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Financijska i poslovna matematika

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Dynamics of rational maps on the sphere and computability of Julia sets

**Opis teme:** U radu će se proučavati osnovna svojstva dinamike racionalnih preslikavanja na Riemannovoj sferi i njihovi Julievi skupovi. Osnovno pitanje je asimptotsko ponašanje diskretnih trajektorija pod iteracijama. Vezano uz to, proučavaju se Julievi skupovi racionalnih preslikavanja-komplementi skupova oko kojih se iteracije ponašaju asimptotski stabilno. Julievi skupovi su obično fraktalni objekti i od posebnog interesa je moći ih za dano preslikavanje nacrtati na računalu. Na nekim primjerima se proučava izračunljivost Julievih skupova racionalnih preslikavanja, tj. pokušava se odgovoriti pitanje pod kojim uvjetima se može nacrtati Julia skup na računalu do na proizvoljnu preciznost.

### Literatura:

M. Braverman, M. Yampolsky, *Computability of Julia sets*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009)

L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex dynamics*, (Universitext). Springer, New York, 1993.

J. Milnor, *Dynamics in one complex variable*, 3rd edition, Princeton University Press, 2011.

**Mentor:** Šiftar Juraj

## Jednostavna grupa reda 168

**Područje:** Teorija grupa, Konačne geometrije

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Algebra ili Algebarske strukture

**Naslov na engleskom:** The simple group of order 168

**Opis teme:** Postoji točno 57 grupa reda 168, do izomorfizma. Među njima tri su abelove, pet nilpotentnih, sve osim jedne su rješive, a ta nerješiva ujedno je jednostavna ili prosta (*simple group*), dakle nema normalnih podgrupa. Prosta grupa manjeg reda nužno je reda 60, izomorfna alternirajućoj grupi stupnja 5 (izuzevši trivijalno proste grupe čiji red je primbroj, manji od 60).

Jednostavna grupa reda 168 može se realizirati na više načina, a najpoznatije su linearne grupe  $PSL(2,7)$  i  $GL(3,2)$ . Prva je ujedno puna grupa automorfizama projektivnog pravca nad poljem  $GF(7)$ , a druga ima analogni smisao za najmanju projektivnu ravninu  $PG(2,2)$  (Fanoova ravnina). Postoje veze s još nekim zanimljivim kombinatoričkim strukturama, primjerice Coxeterovim grafom i Steinerovim 3-(8,4,1) dizajnom. U radu bi se prikazalo nekoliko pristupa dokazu da su grupe  $PSL(2,7)$  i  $GL(3,2)$  izomorfne te srodnih rezultata koji se uklapaju u utvrđivanje jedinstvenosti proste grupe reda 168. Grupovna struktura povezuje se s djelovanjem na kombinatoričkim objektima. U obzir dolazi i zahtjevnija interpretacija kao grupe automorfizama Kleinove kvadrike koji čuvaju orijentaciju.

### Literatura:

I. Stewart, *Intrinsic Geometries of the Simple Group of Order 168*, Amer. Math. Monthly, 131(8) (2024), 690-703.

E. Brown, N. Loehr, [https://personal.math.vt.edu/brown/doc/PSL\(2,7\)\\_GL\(3,2\).pdf](https://personal.math.vt.edu/brown/doc/PSL(2,7)_GL(3,2).pdf)

R. H. Jeurissen, *A proof by graphs that  $PSL(2,7)$  and  $PGL(3,2)$  are isomorphic*, Discrete Math. 70(3) (1988) 315-317.

N. D. Elkies, *The Klein Quartic in Number Theory, The Eightfold Way*, MSRI Publications, vol. 35, 1998.

N. D. Elkies, *Lecture Notes - Designs and Groups*, <https://people.math.harvard.edu/~elkies/M155.15/index.html>

**Mentor:** Šiftar Juraj

## Eulerova spirala i optimalni ovali

**Područje:** Geometrija, matematička analiza

**Prikladno za studij:** Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Uvod u diferencijalnu geometriju

**Naslov na engleskom:** Euler spiral and optimal ovals

**Opis teme:** Eulerova spirala je krivulja čija je zakrivljenost linearna funkcija duljine krivulje. Ima mnoge primjene i pojavljuje se u fizici (elastičnost, difrakcija). Matematički je dosta složena te ima zanimljiva svojstva, koja će, zajedno s jednim aspektom primjene, biti predmet ovog rada.

Oval, u ovom kontekstu, može se shvatiti kao poopćenje elipse: zatvorena ravninska krivulja koja omeđuje konveksno područje i ima dvije osi simetrije, međusobno ortogonalne.

Optimalnost ovdje znači glatkost prijelaza između pravokutnika i elipse, primjerice u građevinarstvu i arhitekturi, kod konstrukcije prometnica i zatvorenih trkaćih staza, a matematički se definira pomoću nekoliko uvjeta. Eulerova krivulja povoljna je za prijelaz između dijelova pravaca i kružnih lukova. Postavljaju se neki kriteriji "optimalnosti" ovala i daje se rješenje, koje se zatim analizira.

### Literatura:

R. Levien, *The Euler Spiral: a mathematical history*, EECS Berkeley, Technical report Technical Report No. UCB/EECS-2008-111, 2008. <https://digitalassets.lib.berkeley.edu/techreports/ucb/text/EECS-2008-111.pdf>

I. Henning Skau, K. Forsberg Kristensen, *An Optimal Oval*, Math. Magazine 93(2)(2020) 113-120. <https://doi.org/10.1080/0025570X.2020.1708690>

L. Bartholdi, A. Henriques, *Orange Peels and Fresnel Integrals*, Math. Intelligencer 34(2012) 1-3. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00283-012-9304-1>

**Mentor:** Širola Boris

## Projektivni prostori i projektivne transformacije

**Područje:** Linearna algebra i projektivna geometrija

**Prikladno za studij:** svi studiji (osim Biomedicinske matematike)

**Preduvjeti:** Poznavanje materije “Linearna algebra 1 i 2”.

**Naslov na engleskom:** Projective spaces and projective transformations

**Opis teme:** Ako je  $V$  konačno dimenzionalan vektorski prostor, tada se skup svih 1-dimenzionalnih potprostora označava s  $\mathbb{P}(V)$  i zove *projektivni prostor* pridružen prostoru  $V$ . Projektivni prostori su važni objekti i u elementarnoj geometriji i u algebarskoj geometriji. U ovoj bi se temi prvo pokazalo kako postoji jaki paralelizam između standardnih vektorskih prostora i projektivnih prostora. U drugom dijelu proučavale bi se tzv. *projektivne transformacije*. Naime, svakom regularnom operatoru  $f$  na  $V$  pridružuje se pripadna projektivna transformacija  $\mathbb{P}(f)$ . I sada imamo situaciju koja je analogna proučavanju standardnih linearnih operatora. Po želji studenta, pored navedenog mogu se obraditi i neki napredniji dijelovi iz područja algebarske geometrije.

**Literatura:**

I. R. Shafarevich, A. O. Remizov; *Linear algebra and geometry*, Springer, New York, 2013.

**Mentor:** Širola Boris

## Grupe permutacija i matrice grupe

**Područje:** Teorija grupa

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Poznavanje materije predmeta “Linearna algebra 1 i 2” i “Algebarske strukture”.

**Naslov na engleskom:** Permutation groups and matrix groups

**Opis teme:** Ova tema nudi bolje razumijevanje osnova teorije grupa, kroz dvije klase važnih primjera; grupe permutacija, i matrice grupe. U dijelu o grupama permutacija dokazale bi se osnovne činjenice i rezultati o tim grupama, i posebno bi se pokazalo da je tzv. alternirajuća grupa prosta grupa. U dijelu o matricnim grupama detaljno bi se definiralo tzv. klasične matrice grupe (opće linearne grupe, specijalne linearne grupe, ortogonalne grupe i simplektičke grupe). Posebno, matrice grupe proučavale bi se kao grupe regularnih matrica s koeficijentima iz komutativnih prstena; budući je to korisno u teoriji brojeva, algebarskoj geometriji, teoriji reprezentacija i algebri.

**Literatura:**

J. J. Rotman; *Advanced modern algebra, Part 1*, Amer. Math. Soc., Providence, 2015.

**Mentor:** Širola Boris

## Polinomi i Mason-Stothersov teorem

**Područje:** Algebra

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Primijenjena matematika, Matematička statistika, Računarstvo i matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički, Matematika i fizika; smjer: nastavnički

**Preduvjeti:** Poznavanje materije predmeta "Algebarske strukture"

**Naslov na engleskom:** Polynomials and Mason-Stothers theorem

**Opis teme:** Polinomi su osnovni primjeri funkcija u matematičkoj analizi. Jednako tako polinomi imaju fundamentalnu ulogu i u algebri. U ovoj bi se temi polinomi proučavali s algebarskog aspekta, i to polinomi u jednoj i polinomi u više varijabli s koeficijentima iz nekog komutativnog prstena. Posebno bi se gledalo polinome s koeficijentima iz polja, te proučavalo skupove njihovih nultočaka. Kao vrhunac teme dokazalo bi se tzv. Mason-Stothersov teorem. Primjenom toga teorema pokazalo bi se da vrijedi analogon slavnog Velikog Fermatovog teorema za polinome u jednoj varijabli s kompleksnim koeficijentima.

**Literatura:**

S. Lang; *Undergraduate algebra, third edition*, Springer, New York, 2005.

**Mentor:** Tambača Josip

## Metoda inkremenata u teoriji elastičnosti

**Područje:** Matematičko modeliranje, PDJ

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Incremental method in the theory of elasticity

**Opis teme:** Metoda inkremenata popularna je numerička metoda za rješavanje nelinearnih problema za rubne zadatke za parcijalne diferencijalne jednačine. Nelinearne probleme najčešće aproksimiramo nizom rješenja pogodno odabranih linearnih problema. Metoda inkremenata se sastoji u tome da silu primjenjujemo u malim inkrementima za koje je linearna aproksimacija dovoljno dobra aproksimacija punog problema. U ovom radu zadatak je proučiti metodu inkremenata za problem nelinearne elastičnosti.

**Literatura:**

P. G. Ciarlet, Mathematical elasticity. Vol. I. Three-dimensional elasticity North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

**Mentor:** Tambača Josip

## Primjeri optimizacije u matematičkom modeliranju

**Područje:** Matematičko modeliranje

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika, Matematika; smjer: nastavnički, Matematika i informatika; smjer: nastavnički

**Preuvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** Examples of optimization in mathematical modeling

**Opis teme:** U radu je potrebno formulirati i analizirati nekoliko problema optimizacije za različite matematičke modele.

**Literatura:**

E. A. Bender, An introduction to mathematical modeling, Wiley-Intersci. Publ. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1978.

**Mentor:** Tambača Josip

## Numerička metoda za problem interakcije 3D elastičnog tijela i 1D elastičnog štapa

**Područje:** Matematičko modeliranje, PDJ, numerika

**Prikladno za studij:** Primijenjena matematika

**Preduvjeti:** nema

**Naslov na engleskom:** A numerical method for the interaction problem of a 3D elastic body and a 1D elastic rod

**Opis teme:** Problemi interakcije različitih kontinuuma, te kontinuuma različitih dimenzija zadnjih godina predmet su velikog interesa u matematičkoj zajednici. Iako postoji problem kod formulacije problema interakcije 3D i 1D elastičnih tijela, numerička aproksimacija u okviru metode konačnih elemenata je dohvatljiva. Zadatak rada je napraviti numeričku aproksimaciju i usporediti ju s rješenjem 3D modela za jednu strukturu koja je tanka.

### Literatura:

C. D'Angelo, A. Quarteroni, *On the coupling of 1D and 3D diffusion-reaction equations. Application to tissue perfusion problems*, Math. Models Methods Appl. Sci. 18 (2008), no. 8, 1481–1504

M. Jurak, *Praktikum primijenjene matematike II. Metoda konačnih elemenata*, skripta, PMF–MO, Zagreb, 2006.

**Mentor:** Vuković Mladen

## Odlučivost logika interpretabilnosti

**Područje:** matematička logika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** položen kolegij Matematička logika

**Naslov na engleskom:** Decidability of interpretability logics

**Opis teme:** U logici dokazivosti **GL** (Gödel-Löb) Gödelov predikat dokazivosti **PA** (Pe-anove aritmetike) formaliziran je kao modalni operator. Veza između modalnog jezika i jezika **PA** uspostavljena je pomoću pojma aritmetičke interpretacije. Solovay (1976) je dokazao aritmetičku potpunost sistema **GL**, tj. da je sistem **GL** logika dokazivosti **PA**, u smislu da je formula teorem **GL** ako i samo ako je svaka njena aritmetička interpretacija teorem **PA**. Pokazalo se da je isti sistem **GL** logika dokazivosti i drugih aritmetičkih teorija, pa tako primjerice **GL** ne razlikuje konačno aksiomatizabilne teorije prvog reda od onih koje to nisu. Stoga se razmatraju logike interpretabilnosti, proširenja sistema **GL** binarnim modalnim operatorom koji formalizira pojam relativne interpretabilnosti između teorija, u istom smislu u kojem **GL** formalizira predikat dokazivosti. Glavni cilj diplomskog rada je dokazati odlučivost nekih proširenja osnovne logike interpretabilnosti **IL**.

### Literatura:

- J.J. Joosten, J.M. Rovira, L. Mikec, M. Vuković, *An overview of Verbrugge Semantics a.k.a. Generalised Veltman Semantics*, in N. Bezhanishvili, R. Iemhoff, F. Yang (eds.), Dick de Jongh on Intuitionistic and Provability Logic, Outstanding Contributions to Logic, Springer, u pripremi
- L. Mikec, T. Perkov, M. Vuković, *Decidability of interpretability logics  $ILM_0$  and  $ILW^*$* , Logic Journal of the IGPL 25, 758-772, 2017.
- L. Mikec, *On Logics and Semantics for Interpretability*, doctoral thesis, University of Barcelona and University of Zagreb, cotutelle, 2021.
- T. Perkov, M. Vuković, *Filtrations of generalized Veltman models*, Mathematical Logic Quarterly 62, 412-419, 2016.
- A. Visser, *An overview of interpretability logic*, in Advances in modal logic, Vol. 1, M. Kracht et al. eds., CSLI Publications, 307-359, 1998.

**Mentor:** Vuković Mladen

## Vjerojatnosne logike

**Područje:** Matematička logika i računarstvo

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Poželjno predznanje obuhvaćeno kolegijima Matematička logika i Teorija skupova

**Naslov na engleskom:** Probability logics

**Opis teme:** Vjerojatnosne logike su proširenja klasične logike (propozicionalne i prvog reda) s izrazima koji govore o vjerojatnosti. Vjerojatnosni operatori su vrlo slični modalnim operatorima, a pripadna semantika je vrlo slična Kripkeovim modelima. U diplomskom radu treba definirati vjerojatnosnu logiku  $LPP_2$ , te za nju dokazati teoreme adekvatnosti i potpunosti. Posebno treba razmotriti pitanje odlučivosti. Osim te osnovne vjerojatnosne propozicionalne logike, u diplomskom treba razmotriti neka proširenja.

### Literatura:

J. Halpern, *Reasoning about uncertainty*, MIT Press, 2005.

Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković, *Probability logics*, Springer, 2016.

Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković, *Probability logics*, Zbornik radova 12(20) (2009), Logic in computer science, Beograd, 35–111

<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/zr/20/n020p035.pdf>

M. Rašković, R. Đorđević, *Probability Quantifiers and Operators*, VESTA, Beograd, 1996.

**Mentor:** Vuković Mladen**Suvoditelj:** Perkov Tin

## Prirodna dedukcija za modalnu logiku

**Područje:** matematička logika**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika**Preduvjeti:** položen kolegij Matematička logika**Naslov na engleskom:** Natural deduction for modal logic

**Opis teme:** Modalna logika motivirana je potrebom da se formaliziraju nužnost i mogućnost, znanje i vjerovanje, dokazivost i mnoga druga svojstva koja se mogu smatrati operatorima na logičkim sudovima. Unatoč jednostavnoj sintaksi koja osigurava odlučivost, modalna logika svojom izražajnošću predstavlja vrlo jako sredstvo za opis relacijskih struktura.

Tradicionalno izlaganje logičkih formalizama obuhvaća definicije sintakse i semantike, te njihovo povezivanje putem teorema adekvatnosti i potpunosti odgovarajućeg hilbertovskog aksiomatskog sistema. Radi ekonomičnosti dokaza ključnih teorema, aksiomatski sistemi su minimalni, odnosno koriste vrlo malo pravila zaključivanja. Zbog toga su formalni dokazi takvih sistema intuitivno vrlo teško razumljivi.

Prirodna dedukcija je alternativni sistem dokazivanja, u kojem se dopušta veći broj pravila zaključivanja. Pravila odgovaraju uobičajenim metodama dokaza u neformalnom (iako strogom) izlaganju matematičkih teorija. Zbog toga su dokazi prirodnom dedukcijom intuitivno jasniji od dokaza u hilbertovskim aksiomatskim sistemima.

Glavni cilj rada je opisati prirodnu dedukciju za osnovni modalni jezik i dokazati odgovarajuće teoreme adekvatnosti i potpunosti. Dodatni ciljevi, vodeći računa o primjerenom opsegu diplomskog rada, bit će pitanje normalizacije, te prirodna dedukcija za općenitije modalne jezike.

**Literatura:**

P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema: *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001.  
M. Fitting: Modal proof theory, u P. Blackburn i dr. (ur.), *Handbook of Modal Logic*, Elsevier, 2006, str. 85–138.

J. Hawthorn: Natural deduction in normal modal logic, *Notre Dame Journal of Formal Logic* 31 (1990) 263–273.

D. Prawitz: *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study*, Almqvist & Wicksell, 1965.  
M. Vuković: *Matematička logika*, Element, 2009.

**Mentor:** Vuković Mladen

## Složenost logika interpretabilnosti

**Područje:** Matematička logika

**Prikladno za studij:** Teorijska matematika, Računarstvo i matematika

**Preduvjeti:** Položen kolegij Matematička logika

**Naslov na engleskom:** Complexity of interpretability logics

**Opis teme:** Logika dokazivosti  $GL$  je jednostavni modalni sistem koji potpuno opisuje svojstva predikata dokazivosti  $Pr_{PA}$  Peanove aritmetike. Logiku interpretabilnosti  $IL$  dobivamo proširenjem logike dokazivosti  $GL$  novim binarnim modalnim operatorom  $\triangleright$ . Glavni cilj diplomskog rada je razmotriti složenost nekih proširenja osnovne logike interpretabilnosti  $IL$ .

### Literatura:

J.J. Joosten, J.M. Rovira, L. Mikec, M. Vuković, *An overview of Verbrugge Semantics a.k.a. Generalised Veltman Semantics*, in N. Bezhanishvili, R. Iemhoff, F. Yang (eds.), *Dick de Jongh on Intuitionistic and Provability Logic, Outstanding Contributions to Logic*, Springer, 2024.

L. Mikec, F. Pakhomov, M. Vuković, *Complexity of the interpretability logic  $IL$* , *Logic Journal of the IGPL* 27 (2019), 1–7

L. Mikec, *On Logics and Semantics for Interpretability*, doctoral thesis, University of Barcelona and University of Zagreb, cotutelle, 2021.

L. Mikec, *Complexity of the interpretability logics  $ILW$  and  $ILP$* , *Logic Journal of the IGPL*, u pripremi

A. Visser, *An overview of interpretability logic*, in *Advances in modal logic*, Vol. 1, M. Kracht et al. eds., CSLI Publications, 307–359, 1998.