

Preslikavanja ravnine

Elementarna geometrija - vježbe

Lucija Relić

Prirodoslovno-matematički fakultet — Matematički odsjek
Sveučilište u Zagrebu

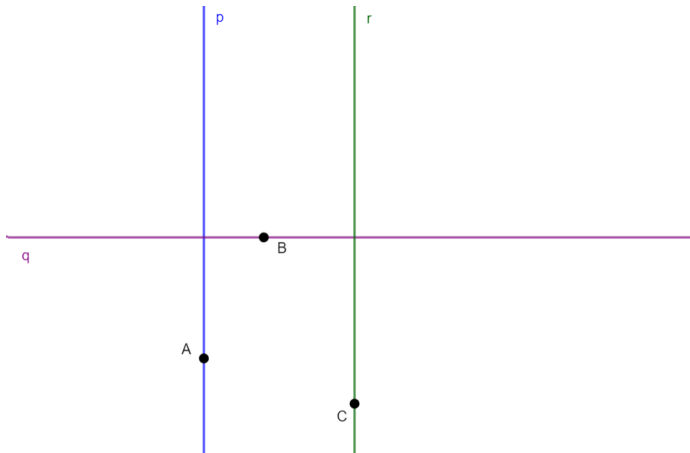
siječanj 2024.

Zadatak 1.

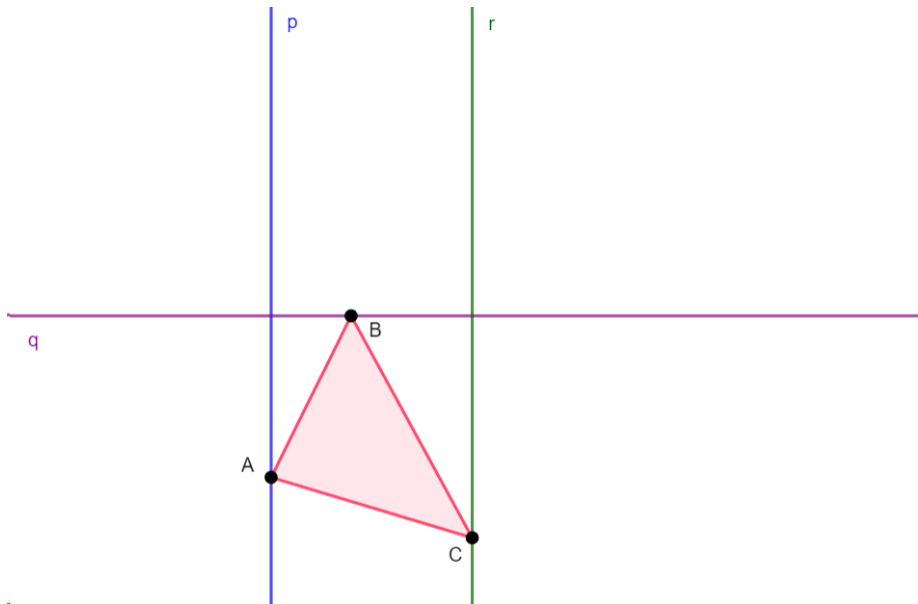
Nacrtajte pravce p , q i r tako da je $p \perp q$ i $q \perp r$. Na pravcima p , q i r odaberite redom točke A , B i C tako da niti jedan od pravaca ne siječe unutrašnjost trokuta ABC . Odredite sliku trokuta ABC pri preslikavanju $f = s_r \circ s_p \circ s_q$.

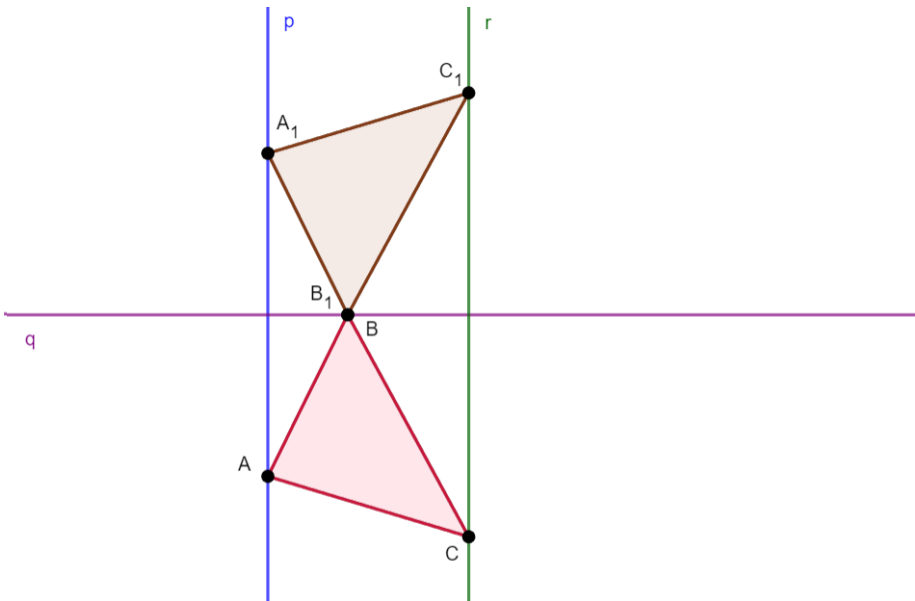
Zadatak 1.

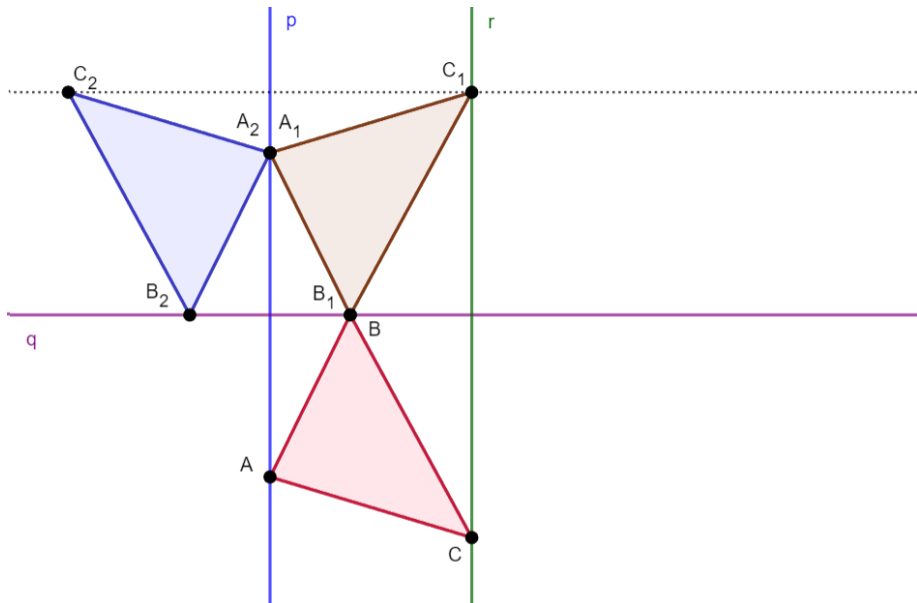
Nacrtajte pravce p , q i r tako da je $p \perp q$ i $q \perp r$. Na pravcima p , q i r odaberite redom točke A , B i C tako da niti jedan od pravaca ne siječe unutrašnjost trokuta ABC . Odredite sliku trokuta ABC pri preslikavanju $f = s_r \circ s_p \circ s_q$.



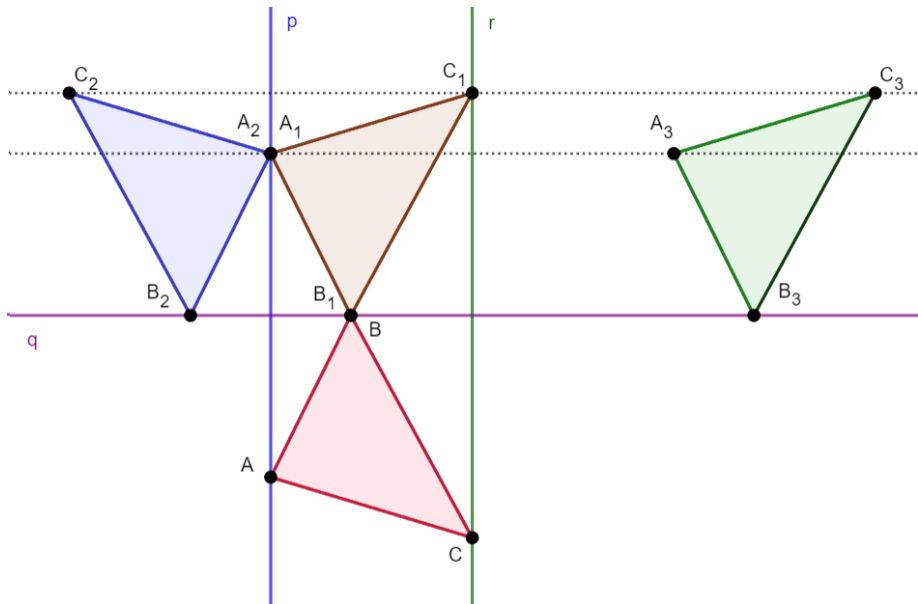
trokut ABC



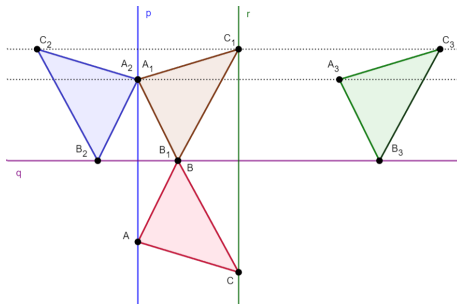




$$S_r \circ S_p \circ S_q$$

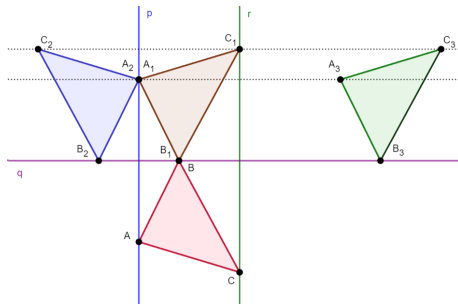


Zadatak 1.



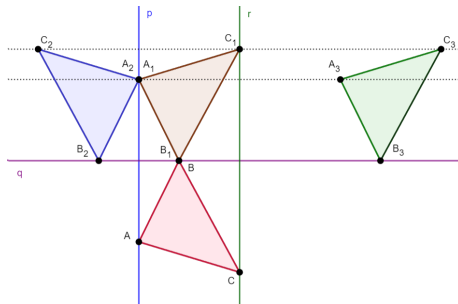
Što je preslikavanje koje preslikava $ABC \rightarrow A_2B_2C_2$?

Zadatak 1.



Što je preslikavanje koje preslikava $ABC \rightarrow A_2B_2C_2$?
Centralna simetrija oko $p \cap q$ ili rotacija za 180° oko $p \cap q$.

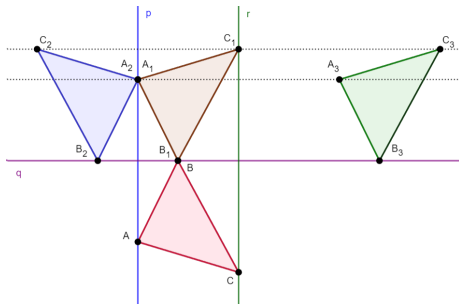
Zadatak 1.



Što je preslikavanje koje preslikava $ABC \rightarrow A_2B_2C_2$?
Centralna simetrija oko $p \cap q$ ili rotacija za 180° oko $p \cap q$.

Što je preslikavanje koje preslikava $A_1B_1C_1 \rightarrow A_3B_3C_3$?

Zadatak 1.



Što je preslikavanje koje preslikava $ABC \rightarrow A_2B_2C_2$?
Centralna simetrija oko $p \cap q$ ili rotacija za 180° oko $p \cap q$.

Što je preslikavanje koje preslikava $A_1B_1C_1 \rightarrow A_3B_3C_3$?
Translacija za dvostruku udaljenost pravaca p i r .

Zadatak 2.

Što je kompozicija

(a) dvije translacije?

Zadatak 2.

Što je kompozicija

(a) dvije translacije?

Translacija za zbroj vektora.

(b) dvije rotacije?

Zadatak 2.

Što je kompozicija

(a) dvije translacije?

Translacija za zbroj vektora.

(b) dvije rotacije?

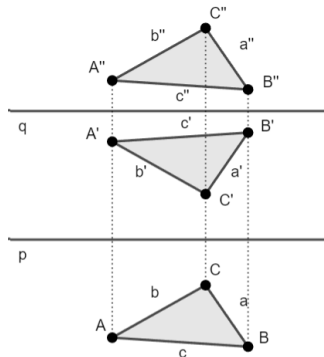
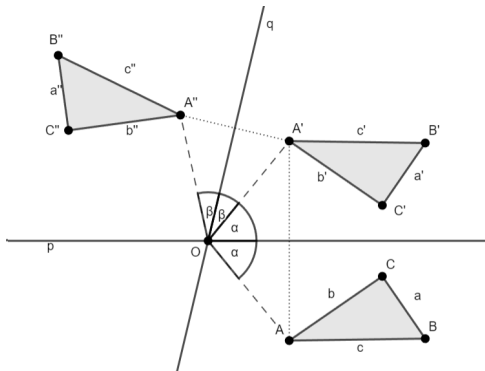
Rotacija za zbroj kuteva (modulo 360°).

(c) dvije osne simetrije?

Zadatak 2.

Što je kompozicija

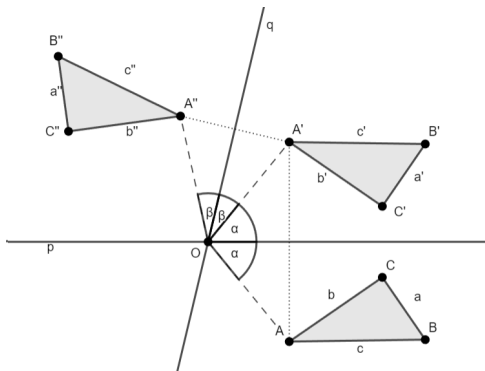
(c) dvije osne simetrije?



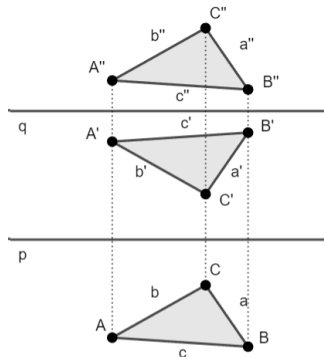
Zadatak 2.

Što je kompozicija

(c) dvije osne simetrije?



Rotacija oko $p \cap q$ za kut $2\angle(pOq)$.



Translacija za vektor $\overrightarrow{AA''}$, duljine dvostruko veće od udaljenosti p i q , okomit na p i q .

Zadatak 3.

Koje je preslikavanje inverzno

(a) translaciji za vektor \vec{a} ?

Zadatak 3.

Koje je preslikavanje inverzno

(a) translaciji za vektor \vec{a} ?

Translacija za vektor $-\vec{a}$.

(b) osnoj simetriji u odnosu na pravac p ?

Zadatak 3.

Koje je preslikavanje inverzno

(a) translaciji za vektor \vec{a} ?

Translacija za vektor $-\vec{a}$.

(b) osnoj simetriji u odnosu na pravac p ?

Ista ta osna simetrija.

(c) centralnoj simetriji u odnosu na točku O ?

Zadatak 3.

Koje je preslikavanje inverzno

- (a) translaciji za vektor \vec{a} ?
Translacija za vektor $-\vec{a}$.
- (b) osnoj simetriji u odnosu na pravac p ?
Ista ta osna simetrija.
- (c) centralnoj simetriji u odnosu na točku O ?
Ista ta centralna simetrija.
- (d) rotaciji oko točke O za kut α ?

Zadatak 3.

Koje je preslikavanje inverzno

(a) translaciji za vektor \vec{a} ?

Translacija za vektor $-\vec{a}$.

(b) osnoj simetriji u odnosu na pravac p ?

Ista ta osna simetrija.

(c) centralnoj simetriji u odnosu na točku O ?

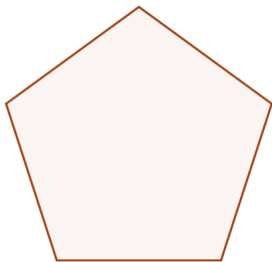
Ista ta centralna simetrija.

(d) rotaciji oko točke O za kut α ?

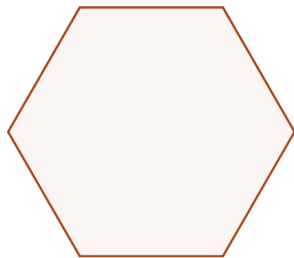
Rotacija oko točke O za ("suprotan") kut " $-\alpha$ ", tj. rotacija za isti kut u suprotnom smjeru. Ako želimo (isti) pozitivan smjer, rotacija za kut $360^\circ - \alpha$.

Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?

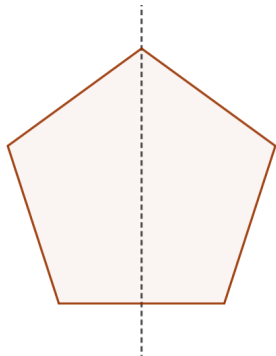


šesterokut?

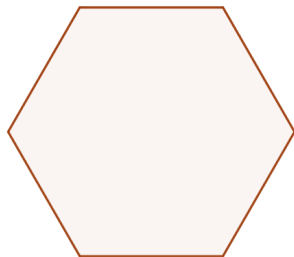


Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?

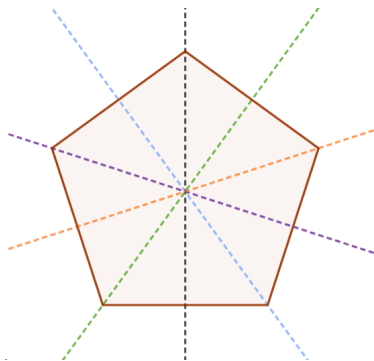


šesterokut?



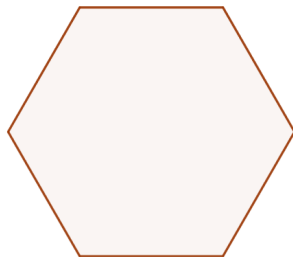
Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?



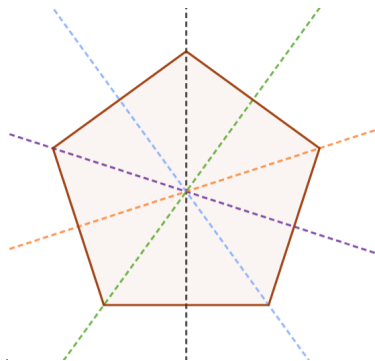
5 osi simetrije

Koliko osi simetrije ima pravilni
šesterokut?



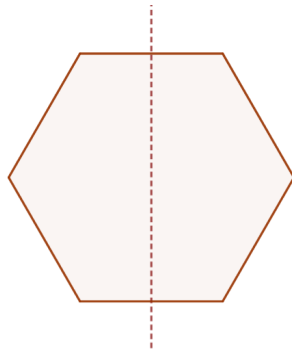
Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?



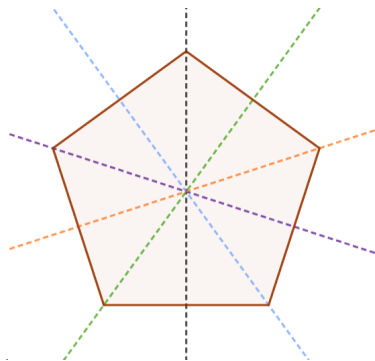
5 osi simetrije

šesterokut?



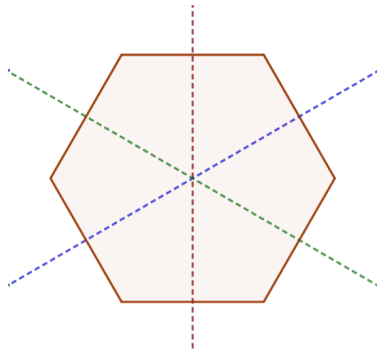
Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?



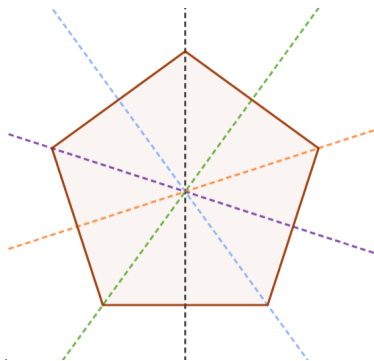
5 osi simetrije

šesterokut?



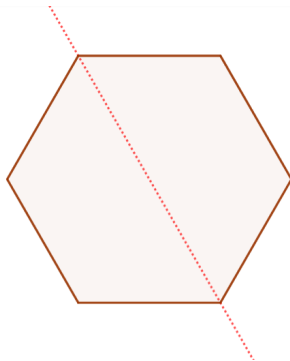
Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?



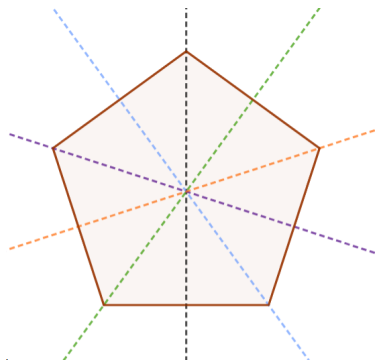
5 osi simetrije

Koliko osi simetrije ima pravilni
šesterokut?



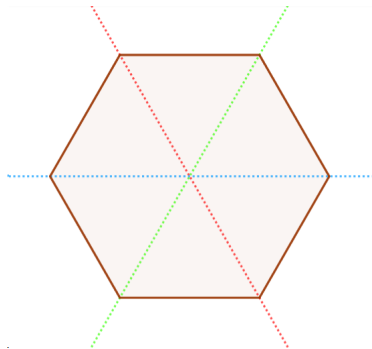
Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni peterokut?



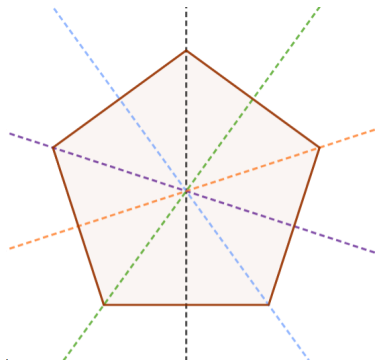
5 osi simetrije

Koliko osi simetrije ima pravilni šesterokut?



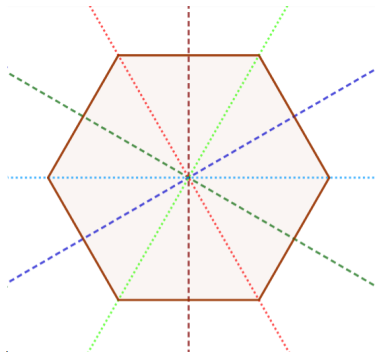
Zadatak 4.

Koliko osi simetrije ima pravilni
peterokut?



5 osi simetrije

šesterokut?

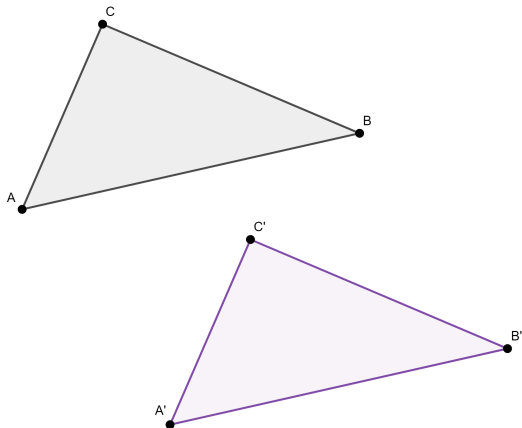


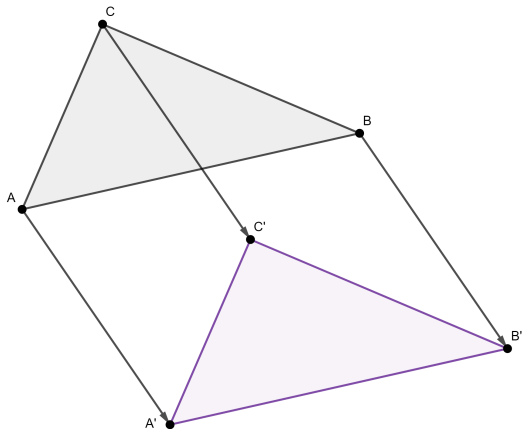
$3 + 3 = 6$ osi simetrije

Zadatak 5.

Dana su dva sukladna trokuta. Tada postoji izometrija koja preslikava jedan na drugi. Kako biste provjerili je li ta izometrija

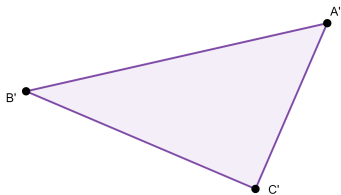
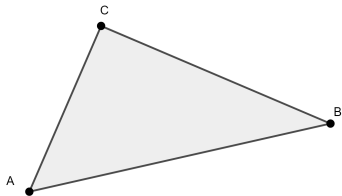
- rotacija?
- osna simetrija?
- centralna simetrija?
- translacija?

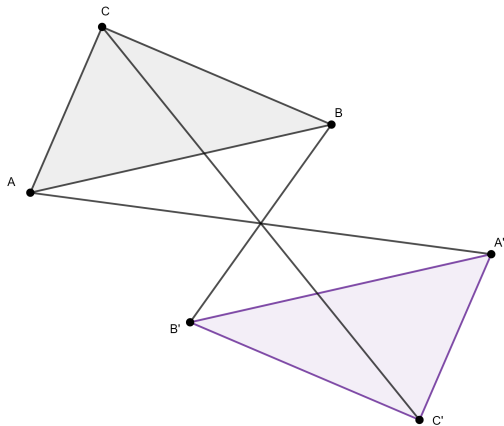




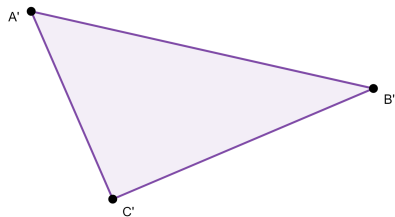
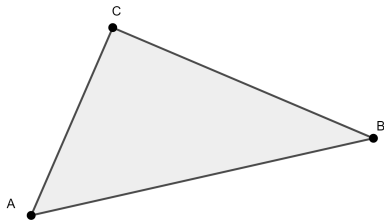
$\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ i $\overrightarrow{CC'}$ jednaki vektori

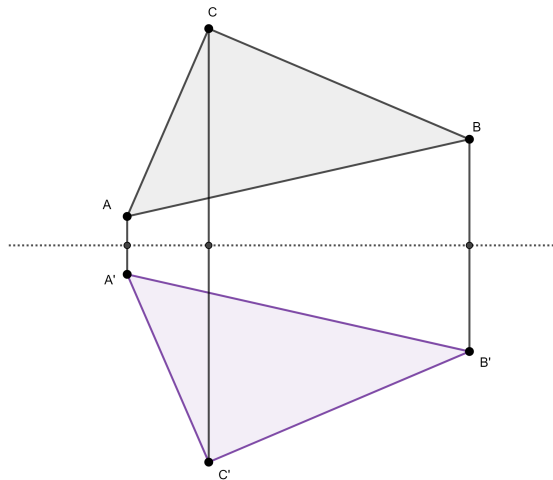
centralna simetrija



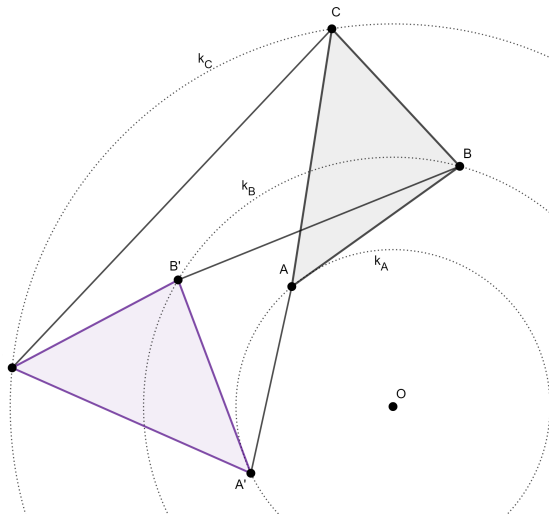


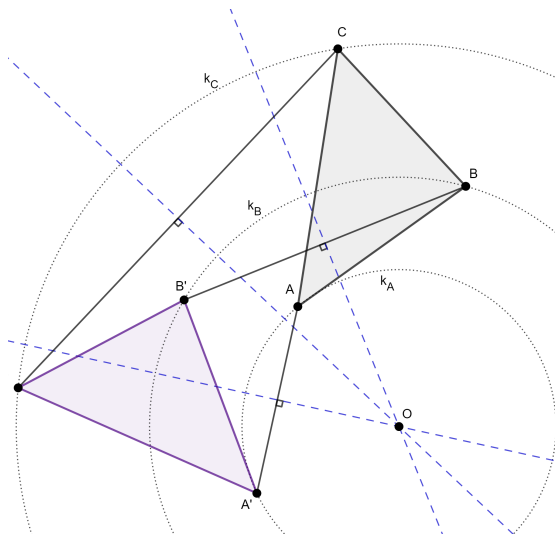
$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ imaju isto polovište





Polovišta od $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ su kolinearna.





Nužno je da simetrale dužina $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$ prolaze istom točkom O ; provjeravamo da vrijedi $\angle AOA' = \angle BOB' = \angle COC'$.

Zadatak 6.

Neka je f izometrija s fiksnim točkama A , B i C . Ako A , B i C nisu kolinearne, dokažite da je f identiteta.

Zadatak 6.

Neka je f izometrija s fiksnim točkama A , B i C . Ako A , B i C nisu kolinearne, dokažite da je f identiteta.

- pretpostavimo suprotno, f nije identiteta i postoji točka T t.d.
 $T' = f(T) \neq T$
- svojstvo izometrije i A fiksna točka: $|AT| = |A'T'| = |AT'|$
 \implies točka A leži na simetrali dužine $\overline{TT'}$
- (analogno) A , B , C leže na simetrali dužine $\overline{TT'}$
- po pretpostavci zadatka A , B , C nisu kolinearne \rightarrow kontradikcija

Zadatak 7.

Što je izometrija koja ima dvije fiksne točke, a nije identiteta?

Zadatak 7.

Što je izometrija koja ima dvije fiksne točke, a nije identiteta?

- neka je $f \neq \text{id}$ izometrija, $f(A) = A$, $f(B) = B$, točka T neka za koju vrijedi $f(T) = T' \neq T$
- isto kao u prethodnom zadatku: A, B leže na simetrali dužine $\overline{TT'}$, tj. simetrala dužine $\overline{TT'}$ je pravac AB

Zadatak 7.

Što je izometrija koja ima dvije fiksne točke, a nije identiteta?

- neka je $f \neq \text{id}$ izometrija, $f(A) = A$, $f(B) = B$, točka T neka za koju vrijedi $f(T) = T' \neq T$
- isto kao u prethodnom zadatku: A, B leže na simetrali dužine $\overline{TT'}$, tj. simetrala dužine $\overline{TT'}$ je pravac AB
- naslućujemo da je f osna simetrija s obzirom na pravac $AB =: p$

Zadatak 7.

Što je izometrija koja ima dvije fiksne točke, a nije identiteta?

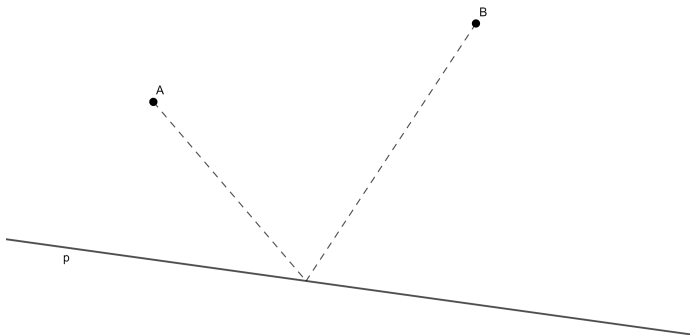
- neka je $f \neq \text{id}$ izometrija, $f(A) = A$, $f(B) = B$, točka T neka za koju vrijedi $f(T) = T' \neq T$
- isto kao u prethodnom zadatku: A, B leže na simetrali dužine $\overline{TT'}$, tj. simetrala dužine $\overline{TT'}$ je pravac AB
- naslućujemo da je f osna simetrija s obzirom na pravac $AB =: p$
- $g := s_p \circ f$ je izometrija, $g(A) = s_p \circ f(A) = s_p(A) = A$, $g(B) = B$
- p je simetrala od $\overline{TT'}$ pa je $g(T) = s_p \circ f(T) = s_p(T') = T$
- 3 fiksne točke koje nisu kolinearne $\xrightarrow[\text{zad.}]{\text{prethodni}}$ g identiteta
- $s_p \circ f = \text{id}$ pa je f inverz od s_p , odnosno s_p

Zadatak 8.

Dan je pravac p i točke A i B s iste strane tog pravca. Odredite točku C na pravcu AB tako da opseg trokuta ABC bude minimalan.

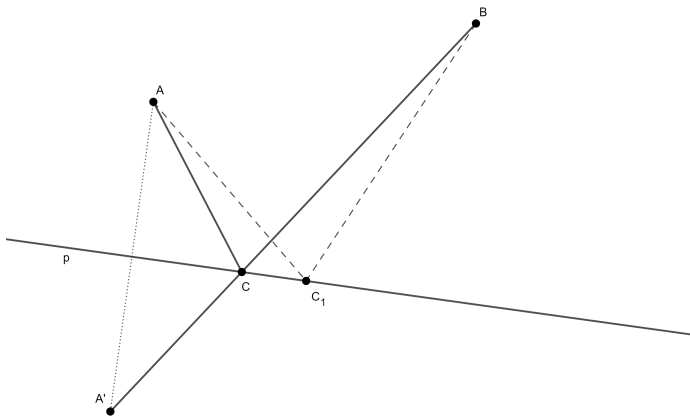
Zadatak 8.

Dan je pravac p i točke A i B s iste strane tog pravca. Odredite točku C na pravcu AB tako da opseg trokuta ABC bude minimalan.



Zadatak 8.

Dan je pravac p i točke A i B s iste strane tog pravca. Odredite točku C na pravcu AB tako da opseg trokuta ABC bude minimalan.

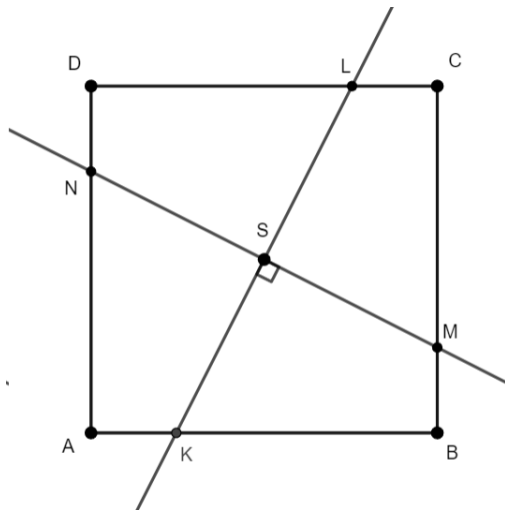


Zadatak 9.

Dva međusobno okomita pravca prolaze kroz središte kvadrata. Dokažite da su odsječci tih pravaca unutar kvadrata sukladni.

Zadatak 9.

Dva međusobno okomita pravca prolaze kroz središte kvadrata. Dokažite da su odsječci tih pravaca unutar kvadrata sukladni.

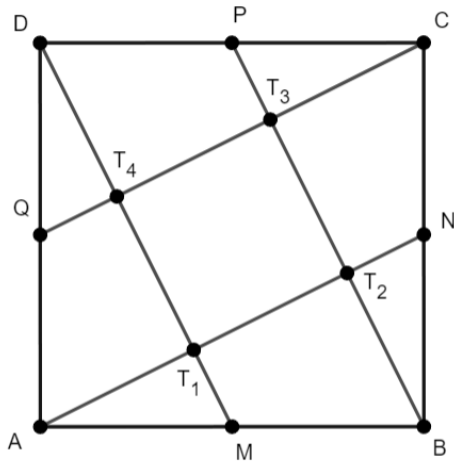


Zadatak 10.

Točke M , N , P , Q redom su polovišta stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} kvadrata $ABCD$. Dokažite da pravci AN , BP , CQ , DM omeđuju kvadrat.

Zadatak 10.

Točke M , N , P , Q redom su polovišta stranica \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} kvadrata $ABCD$. Dokažite da pravci AN , BP , CQ , DM omeđuju kvadrat.

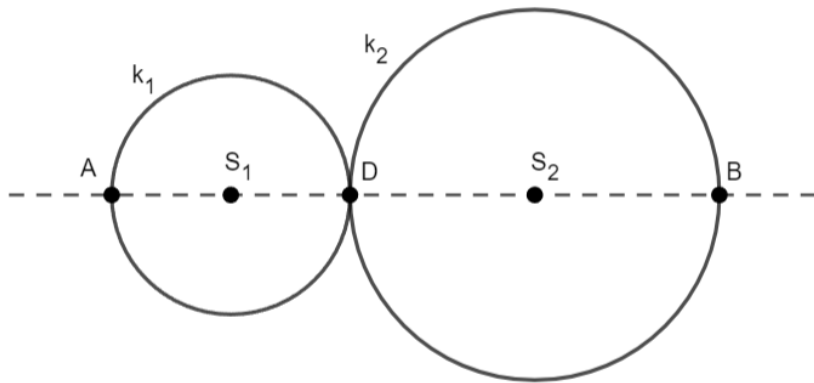


Zadatak 11.

Neka su $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = k(S_2, r_2)$ kružnice koje se dodiruju izvana u točki D . Odredite centar homotetije koja preslikava jednu kružnicu u drugu.

Zadatak 11.

Neka su $k_1 = k(S_1, r_1)$ i $k_2 = k(S_2, r_2)$ kružnice koje se dodiruju izvana u točki D . Odredite centar homotetije koja preslikava jednu kružnicu u drugu.



Zadatak 12.

Kružnica opisana trokutu ABC ima polumjer r . Točke P i Q su polovišta od \overline{AB} i \overline{AC} , a točka N nožište visine iz vrha A . Odredite polumjer kružnice opisane trokutu PQN .

Zadatak 13.

Dokažite da polovišta osnovica, sjecište dijagonala i sjecište krakova trapeza leže na jednom pravcu.