1. Domaća zadaća iz Financijskog modeliranja

Zadatak 1. Provjerite dopuštaju li sljedeći modeli financijskog tržišta arbitražu. Ukoliko je odgovor potvrdan, odredite sve portfelje koji su arbitraža. Je li model financijskog tržišta potpun?

(a) Model financijskog tržišta sastoji se od tri elementarna događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i dvije osnovne financijske imovine: nerizična imovina S^0 koja se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = 1/9$ i rizična imovina S^1 t.d. je $S_0^1 = 5$ i

$$S_1^1(\omega_1) = \frac{60}{9}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{40}{9}, \quad S_1^1(\omega_3) = \frac{30}{9}.$$

(b) Model financijskog tržišta sastoji se od tri elementarna događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ i tri osnovne financijske imovine: nerizična imovina S^0 koja se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = 1/9$ i rizične imovine S^1 i S^2 t.d. je $S_0^1 = 5$, $S_0^2 = 10$ i

$$S_1^1(\omega_1) = \frac{60}{9}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{60}{9}, \quad S_1^1(\omega_3) = \frac{40}{9},$$
$$S_1^2(\omega_1) = \frac{120}{9}, \quad S_1^2(\omega_2) = \frac{80}{9}, \quad S_1^2(\omega_3) = \frac{80}{9}.$$

Zadatak 2. Promotrite model financijskog tržišta koji se sastoji od dva elementarna događaja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ i dvije osnovne financijske imovine: nerizična imovina S^0 koja se ukamaćuje po kamatnoj stopi $r = 1/9$ i rizična imovina S^1 t.d. je $S_0^1 = 5$ i

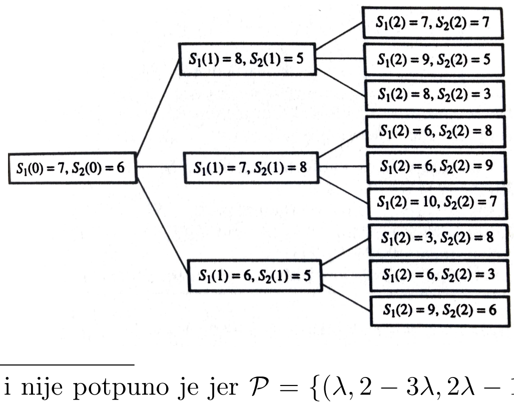
$$S_1^1(\omega_1) = \frac{60}{9}, \quad S_1^1(\omega_2) = \frac{40}{9}.$$

(a) Odredite cijenu forward ugovora s dostavnom cijenom $K = \frac{55}{9}$. Odredite dostavnu cijenu K t.d. je cijena forward ugovora jednaka 0.

(b) Odredite cijenu call opcije s cijenom izvršenja $K = \frac{55}{9}$.

(c) Odredite cijenu put opcije s cijenom izvršenja $K = \frac{55}{9}$.

Zadatak 3. Dan je dvoperiodni model financijskog tržišta s jednom nerizičnom imovinom čiji je prinos $r = 0$ i dvije rizične imovine S^1 i S^2 ($d = 2$, $T = 2$, $k = 9$). Dinamika cijena rizičnih imovina određena je sljedećim prikazom ($S_t^i = S_i(t)$):



---

1. a) Ne dopušta arbitražu i nije potpuno je jer $\mathcal{P} = \{(\lambda, 2 - 3\lambda, 2\lambda - 1) : \lambda \in (1/2, 2/3)\}$, b) Kako je $\mathcal{P} = \emptyset$ slijedi da tržište dopušta arbitražu. Sve arbitraže su oblika $\phi = (0, 2\lambda, -\lambda)$, $\lambda > 0$.

2. a)$C^{\text{fw}} = -1/2$, $K = \frac{50}{9}$, b) $C^{\text{call}} = 1/4$, (c) $C^{\text{put}} = 3/4$.

(a) Dokažite da je model financijskog tržišta potpun i odredite ekvivalentnu martingalnu mjeru. Za rješavanje linearnog sustava možete koristiti online linear solver ili neki drugi software.

(b) Odredite cijenu u trenutku $t = 0$ slučajnog zahtjeva $C = (S_2^1 + S_2^2 - 13)_+$ s vremenom dospijeća 2.

Zadatak 4. Dan je CRR model s parametrima $a = -0.2$, $b = 0.25$, $r = 0.1$ i $T = 3$. Početna cijena dionice je $S_0 = 100$.

(a) Odredite vrijednost lookback call opcije $C = S_T - m$, $m := \min\{S_t : 0 \le t \le T\}$. Također, odredite replicirajući portfelj za slučaj $S_1 = 125$ i $S_2 = 100$.

(b) Odredite vrijednost up-and-out put opcije $C = 1_{\{M<B\}}(K - S_T)_+$, $M := \max\{S_t : 0 \le t \le T\}$ s cijenom izvršenja $K = 120$ i barijerom $B = 130$. Odredite replicirajući portfelj u slučaju da je $S_1 = 80$ i $S_2 = 64$.

(c) Neka je $\tau := \inf\{t \in \{0, 1, 2, 3\} : S_t \ge 130\}$ prvo vrijeme kada vrijednost dionica premaši 130 (uz dogovor $\inf \emptyset = 4$). Odredite zajedničku razdiobu slučajnog vektora (S_3, τ) obzirom na ekvivalentnu martingalnu mjeru $\mathbb{P}^*$. Korištenjem zajedničke razdiobe odredite vrijednost u trenutku 0 up-and-out put opcije iz (b) dijela.

Zadatak 5. Neka su $Z_t \sim U([0, 1])$, $t = 0, 1, 2, 3$ nezavisne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(a) Odredite Snellov omotač $U = \{U_t : t = 0, 1, 2, 3\}$ slučajnog procesa $Z = \{Z_t : t = 0, 1, 2, 3\}$.

(b) Neka je $\tau_0 = \inf\{t \ge 0 : U_t = Z_t\}$. Izračunajte $\mathbb{E}[U_{\tau_0}]$.

---

3. a) Jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera jednaka je

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbb{P}^*(\omega_i)$	1/9	1/9	1/9	1/6	1/12	1/12	1/12	1/6	1/12

Hint: Ako označimo $\omega_1 = \{S_1^1 = 8, S_2^1 = 7\}$, tada je $\mathbb{P}^*(\omega_1|\mathcal{F}_1) = \frac{\mathbb{P}^*(\omega_1)}{\mathbb{P}^*(\omega_1)+\mathbb{P}^*(\omega_2)+\mathbb{P}^*(\omega_3)}$, b) $C_0 = \frac{19}{18}$.
4. a) $C_0 = 32.62822$, $\phi_1 = (-22.2612, 0.54934)$, $\phi_2 = (-61.2182, 0.892256)$, $\phi_3 = (-33.3918, 0.5555)$,
b) $C_0 = 8.59282$, $\phi_1 = (47.1195, -0.385267)$, $\phi_2 = (85.7955, -0.915825)$, $\phi_3 = (90.1578, -1)$,
c) Uočimo prvo promatranjem binarnog stabla cijena dionice da je $\mathbb{P}^*(\tau \in \{2, 4\}) = 1$. Slijedi

$\tau \backslash S_3$	51.2	80	125	195.31
2	0	0	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$
4	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{8}{27}$	0

pa je $C_0 = \frac{\mathbb{E}^*[1_{\{M<130\}}(120-S_3)_+]}{1.1^3} = \frac{\mathbb{E}^*[1_{\{\tau=4\}}(120-S_3)_+]}{1.1^3} = \frac{(120-51.2)\frac{1}{27}+(120-80)\frac{6}{27}}{1.1^3} = 8.59282$.
5. a) $U_0 = \max\{Z_0, \frac{89}{128}\}$, $U_1 = \max\{Z_1, \frac{5}{8}\}$, $U_2 = \max\{Z_2, \frac{1}{2}\}$, $U_3 = Z_3$, (b) $\mathbb{E}[U_{\tau_0}] \approx 0.7413$.

Zadatak 6. Igrač može bacati simetričnu kocku najviše 5 puta i može u bilo kojem trenutku stati. Odredite optimalnu strategiju koja maksimizira očekivani broj koji se pojavio na kocki kada je igrač stao s igrom te odredite taj broj.

Zadatak 7. Neka je $X = (X_t : t \in \{0,1,2,3,4,5\})$ (vremenski homogen) Markovljev lanac sa skupom stanja $S = \{0,1,2,3,4\}$ i prijelaznom matricom $P = (p(x,y) : x,y \in S)$, gdje je

$$\begin{aligned} p(x,x+1) &= \frac{1}{2},\ x \in \{1,2,3\} \\ p(x,x-1) &= \frac{1}{2},\ x \in \{1,2,3\} \\ p(0,1) &= 1,\ p(4,3) = 1. \end{aligned}$$

Dana je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ s

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	3	2	0	3

i slučajni proces $Z = (Z_t : t \in \{0,1,2,3,4,5\})$, $Z_t = f(X_t)$. Maksimizirajte $\mathbb{E}_x[Z_\sigma]$ po svim vremenima zaustavljanja $\sigma \in \mathcal{T}_{0,5}$, za svaki $x \in S$. Odredite optimalno vrijeme zaustavljanja za trajektoriju $\omega = \{X_0 = 2,\ X_1 = 3,\ X_2 = 2,\ X_3 = 3,\ X_4 = 2,\ X_5 = 3\}$.

---

6. Ako je U Snellov omotač, vrijedi rekurzija $\mathbb{E}[U_t] = \frac{7}{2} - \frac{(\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1)\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil}{12} + \mathbb{E}[U_{t+1}]\frac{\lceil \mathbb{E}U_{t+1} \rceil - 1}{6}$ za $1 \leq t \leq T-1$ s početnim uvjetom $\mathbb{E}U_T = \frac{7}{2}$. Optimalna strategija je sljedeća: ako u prvom, drugom, ili trećem bacanju dobijemo barem 5 onda stanemo, inače nastavljamo. Ako u četvrtom bacanju dobijemo barem 4, onda stanemo, a inače bacamo još 5. put. Srednji optimalni broj na kocki je tada 5.13.
7. $\max\limits_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,5}} \mathbb{E}_x[Z_\sigma] = 3$ za $x \in \{0,1,3,4\}$, $\max\limits_{\sigma \in \mathcal{T}_{0,5}} \mathbb{E}_2[Z_\sigma] = \frac{47}{16}$, $\tau_0(\omega) = 4$.