

# Vektorski prostori - nastavnički smjer

## 2. kolokvij

6.2.2024.

---

### Zadatak 1

- (i) (3 boda) Definirajte skalarni produkt na vektorskom prostoru tako da popišete svojstva skalarnog produkta. Definirajte normu iz skalarnog produkta.
- (ii) (4 boda) Iskažite Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost te pretpostavljajući tu nejednakost dokažite nejednakost trokuta.

### Zadatak 2

- (i) (4 boda) Definirajte unitarne operatore. Iskažite i dokažite propoziciju o spektru unitarnog operatora.
- (ii) (3 boda) Iskažite teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora na kompleksnom vektorskom prostoru.

### Zadatak 3

- (a) (4 boda) Za operator  $A \in L(\mathbb{C}^{10})$  vrijedi  $\text{tr}(A) = 5$  i  $\mu_A(x) = x(1-x)^4$ . Odredite Jordanovu formu od  $A$ .
- (b) (3 boda) Odredite Jordanovu formu operatora  $B \in L(\mathbb{C}^{10})$ , ako je poznato da vrijedi

$$k_B(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5, \quad \mu_B(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3, \quad r(B-3I) = r(B-I).$$

### Zadatak 4

(7 bodova) Na realnom vektorskom prostoru  $\mathcal{P}_2$  svih polinoma s realnim koeficijentima stupnja  $\leq 2$  zadano je preslikavanje  $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$\langle p | q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(-1)q(-1).$$

Dokažite da je to preslikavanje skalarni produkt na  $\mathcal{P}_2$  i odredite neku ortonormiranu bazu za  $\mathcal{P}_2$  u odnosu na taj skalarni produkt.

### Zadatak 5

- (a) (2 boda) Operator  $C \in L(\mathbb{C}^3)$  zadan je matricno u kanonskoj bazi  $(e)$  sa

$$C(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Postoji li ortonormirana baza  $(f)$  za  $\mathbb{C}^3$  takva da je  $C(f)$  dijagonalna matrica?

- (b) (5 bodova) Neka je  $V$  konačnodimenzionalan unitaran vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$ . Unitaran operator  $U \in L(V)$  zadovoljava relaciju

$$U^2 + U - 2I = 0.$$

Dokažite da vrijedi  $U = I$ .

---

Vrijeme pisanja: 2h

Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja zadnjih tri zadatka.