

Vektorski prostori - nastavnički smjer

1. kolokvij
29.11.2023.

Zadatak 1

Neka je V vektorski prostor.

- (i) (3 boda) Definirajte sliku $R(A)$ operatora $A \in L(V)$ i dokažite da je vektorski potprostor u V .
- (ii) (4 boda) Iskažite i dokažite teorem koji daje odnos između invertibilnosti operatora A i slobodnog člana minimalnog polinoma od A .

Zadatak 2

- (i) (4 boda) Definirajte nilpotentan operator. Opišite nilpotentne operatore punog indeksa nilpotentnosti tako da opišete njihov matricni zapis u cikličkoj bazi.
- (ii) (3 boda) Iskažite opći teorem o nilpotentnim operatorima.

Zadatak 3

(7 bodova) Dani su vektori $v_1 = (1, 2, 3, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1, -1)$ u \mathbb{R}^4 . Neka je $L = [\{v_1, v_2, v_3\}]$ potprostor razapet tim vektorima. Odredite realne brojeve A, B, C, D takve da je

$$L = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0\}.$$

Zadatak 4

(7 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u nekoj bazi (e) matricno s

$$A(e) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odredite minimalni polinom, karakteristični polinom i spektar od A , te odredite može li se A dijagonalizirati.

Zadatak 5

(i) (3 boda) Neka je $B \in L(\mathbb{C}^4)$ operator zadan matricno u kanonskoj bazi (e) s

$$B(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dokažite da je B nilpotentan indeksa 4 te odredite neku cikličku bazu za B .

(ii) (4 boda) Neka je $N \in L(\mathbb{C}^{17})$ nilpotentan operator za koji vrijedi $\text{ind } N = 7$, $\text{r}(N) = 14$, $\text{r}(N^5) = 2$, $\text{r}(N^6) = 1$. Odredite Jordanovu formu od N .

Vrijeme pisanja: 2h

Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja zadnjih tri zadatka.