Vektorski prostori - nastavnički smjer

1. ispit
6.2.2024.

Zadatak 1

(i) (8 bodova) Definirajte minimalni polinom linearnog operatora. Definirajte nilpotentan operator. Iskažite i dokažite teorem o minimalnom polinomu nilpotentnog operatora.

(ii) (6 bodova) Definirajte korijene potprostore. Što je direktna suma svih korijenih potprostora? Svoj odgovor iskažite u obliku teorema. Teorem ne treba dokazivati.

Zadatak 2

(i) (8 bodova) Definirajte unitarne operatore. Iskažite i dokažite propoziciju o spektru unitarnog operatora.

(ii) (6 bodova) Iskažite teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora na kompleksnom vektorskom prostoru.

Zadatak 3

Operator $T \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi (e) sa

$$T(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (8 bodova) Odredite minimalni polinom od T.

(b) (6 bodova) Označimo sa $R(T)$ sliku operatora T. Odredite, ako postoje, realne brojeve A, B, C, D takve da je

$$R(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0\}.$$

Zadatak 4

(a) (6 bodova) Operator $N \in L(\mathbb{C}^{10})$ zadan je svojim djelovanjem na kanonskoj bazi sa $Ne_i = e_{2i}$ za $1 \leq i \leq 5$, $Ne_i = e_{i-1}$ za $6 \leq i \leq 9$, te $Ne_{10} = 0$. Dokažite da je N nilpotentan i odredite mu indeks.

(b) (8 bodova) Za operator $A \in L(\mathbb{C}^{10})$ vrijedi $\mathrm{tr}(A) = 5$ i $\mu_A(x) = x(1-x)^4$. Odredite Jordanovu formu od A.

Zadatak 5

Neka je V konačnodimenzionalan unitaran vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.

(a) (4 boda) Neka je $S \in L(V)$ normalan operator. Pretpostavimo da za polinom $p(x)$ s kompleksnim koeficijentima vrijedi da je $p(S)$ nilpotentan. Dokažite da je $p(S) = 0$.

(b) (10 bodova) Unitaran operator $U \in L(V)$ zadovoljava relaciju

$$U^2 + U - 2I = 0.$$

Dokažite da vrijedi $U = I$.

Vrijeme pisanja: 2h
Molimo da odvojite rješenja prva dva zadatka od rješenja zadnjih tri zadatka.