Sadržaj

Poglavlje 1

Prostor test funkcija

Definicija 1.1.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren skup. S $C_c^\infty(\Omega)$ ćemo označavati prostor svih funkcija klase C^∞ na Ω čiji je nosač kompaktan u Ω. Osim oznake $C_c^\infty(\Omega)$ nekad ćemo koristiti i oznaku $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Na prvi pogled nije uopće jasno da postoje netrivijalne funkcije s tim svojstvom. U idućem zadatku ćemo konstruirati upravo jednu takvu (za $\Omega = \mathbb{R}^d$), dok ćemo kasnije vidjeti kako pomoću nje možemo generirati pregršt drugih takvih funkcija.

Zadatak 1.1.2. *Označimo s $f(t) = e^{-1/t}\mathbb{1}_{\langle 0,\infty\rangle}(t)$. Tada je*

a) $f \in C^\infty(\mathbb{R})$,

b) funkcija $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\rho(x) = Cf(1 - |x|^2) = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

pri čemu je $C = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \rho\right)^{-1}$, je klase C^∞ te vrijedi $\operatorname{supp}\rho = K[0,1]$.

Rješenje. a) Očito je f klase C^∞ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, te je u 0 neprekidna. Preostaje provjeriti da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\lim_{t\to 0^+} f^{(n)}(t) = 0$. Ovdje indukcijom možemo pokazati da je n-ta derivacija oblika

$$f^{(n)}(t) = e^{-1/t}p_{n-1}(t)t^{-2n},$$

pri čemu je p_{n-1} polinom stupnja $n-1$. Da bi pokazali da je gornji limes jednak nuli, dovoljno je provjeriti da vrijedi

$$\lim_{t\to 0^+} e^{-1/t}t^{-k} = \lim_{s\to\infty} e^{-s}s^k = 0, \qquad k > 0,$$

što vrlo lako slijedi ponovljenom primjenom L'Hopitala.

b) Direktno iz a) slijedi da je funkcija $x \mapsto f(1 - |x|^2)$ klase C^∞, te da joj je nosač upravo $K[0,1]$. Posebno je tada i $0 < \int_{\mathbb{R}^d} f(1 - |x|^2)(x)dx < \infty$, pa onda i ρ očito zadovoljava ista dva svojstva.

■

Napomena 1.1.3. *Konstanta C u prethodnoj konstrukciji je odabrana na način da bi vrijedilo*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1.$$

Pomoću ρ definiramo i tzv. **poseban izglađujući niz** $(\rho_n)_n$ formulom

$$\rho_n(x) := n^d \rho(nx).$$

Za ovaj niz tada očito vrijedi

1. $\rho_n \geq 0$,
2. $\operatorname{supp} \rho_n = K[0, 1/n]$,
3. $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n(x)dx = 1$.

Primijetimo prvo kako se test funkcije nalaze u svakom od dosad na poznatih funkcijskih prostora:

1. prostor neprekidnih funkcija na Ω, u oznaci $C(\Omega)$,
2. prostor funkcija klase C^m na Ω, $m \in \mathbb{N}$, u oznaci $C^m(\Omega)$.
3. prostori $L^p(\Omega)$, za $1 \leq p \leq \infty$.

Prve dvije tvrdnje, kao i slučaj $p = \infty$ u trećoj su očiti, dok je za $1 \leq p < \infty$ i $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$||\varphi||_{L^p(\Omega)} \leq |\operatorname{supp} \varphi|^{1/p} \cdot ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Međutim, sama činjenica da se test funkcije nalaze u svakom od ovih prostora nam ne znači puno; ono što je daleko bitnije je činjenica da ćemo pomoću test funkcija moći dobro i aproksimirati neke funkcije iz nadprostora (pritom podrazumijevamo aproksimaciju u odgovarajućoj normi nadprostora). Glavno sredstvo u aproksimaciji će nam biti operacija **konvolucije**. Prisjetimo se da za dvije funkcije f, g (definirane na $\mathbb{R}^d$) definiramo konvoluciju f i g (u oznaci $f * g$) s

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y)dy.$$

Više o konvoluciji, njenim svojstvima i primjenama ćemo vidjeti kasnije u drugom poglavlju. S obzirom da zasad želimo da nam barem jedna od funkcija bude iz test prostora, napomenimo kako gornja definicija ima smisla, odnosno integral u definiciji konvergira za s.s. $x \in \mathbb{R}^d$, ako uzmemo funkciju $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ te $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Zaista, uz oznaku $K = \operatorname{supp} g$ imamo

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy = \int_K f(x-y)g(y)dy \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^d)}||g||_{L^\infty(K)}.$$

Očito su sve neprekidne funkcije, odnosno funkcije klasa C^m kao ranije sadržane u $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Također, jednostavnom primjenom Hölderove nejednakosti slijedi $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ za $1 \leq p \leq \infty$. Stoga je dobro definirana konvolucija C_c^∞ funkcija i funkcija iz 1.-3., za $\Omega = \mathbb{R}^d$. Aproksimacijski niz ćemo dobiti *izglađivanjem* zadane funkcije u na sljedeći način:

$$u_n(x) := (u * \rho_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\rho_n(x-y)dy = \int_{K[0,1]} u(x - z/n)\rho(z)dz.$$

Vrijede sljedeći rezultati.

Teorem 1.1.4. *Neka je $u \in L^1(\Omega)$, s kompaktnim nosačem K. Tada je $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$ za sve n za koje je $d(K, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$. Ako je u neprekidna, onda u_n konvergira k u uniformno, dok u slučaju da je $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, vrijedi $||u_n - u||_{L^p} \to 0$.*

Propozicija 1.1.5. *Neka je $1 \leq p < \infty$. Tada je $C_c^\infty(\Omega)$ gust u $L^p(\Omega)$.*

Napomena 1.1.6. *Iz prethodnog rezultata slijedi da za $1 \leq p < \infty$ uvijek možemo aproksimirati funkcije iz $L^p(\Omega)$ test funkcijama, dok u slučaju $p = \infty$, kao i u slučaju prostora $C(\Omega)$ isto ne vrijedi. Naime, već za funkciju $u \equiv 1$ na Ω vidimo da za bilo koju $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ vrijedi $\max_{x\in\Omega} |u(x) - \varphi(x)| = 1$, pa uniformnu aproksimaciju nije moguće postići. Problem je u tome što u nema kompaktan nosač unutar Ω.*

Zadatak 1.1.7. *Odredite $\mathbb{1}_{[-1,1]} * n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$, $n \in \mathbb{N}$, te skicirajte graf te funkcije.*

Rješenje. Imamo

$$\mathbb{1}_{[-1,1]} * n\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 - \frac{1}{2n}, \\ n(x + 1 + \frac{1}{2n}), & -1 - \frac{1}{2n} \leq x < -1 + \frac{1}{2n}, \\ 1, & -1 + \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n}, \\ -n(x - 1 - \frac{1}{2n}), & 1 - \frac{1}{2n} < x \leq 1 + \frac{1}{2n}, \\ 0, & x > 1 + \frac{1}{2n}. \end{cases}$$

■

Osim samog postupka izglađivanja funkcije, često će nam biti potrebna i tzv. *funkcija rezanja*, tj. C_c^∞ funkcija koja će služiti predstavljati glatku verziju karakteristične funkcije skupa.

Zadatak 1.1.8. *Neka je $K \subseteq \Omega$ kompakt. Tada postoji $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ takva da vrijedi*

1. $0 \leq \psi \leq 1$,
2. $\psi \equiv 1$ *na nekoj okolini kompakta K.*

Rješenje. Označimo s $\delta = d(K, \partial\Omega) > 0$, te neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{4}{n} < \delta$. Neka je $K_n := \{x \in \Omega : d(x, K) < \frac{2}{n}\}$, te neka je $\psi = \mathbb{1}_{K_n} * \rho_n$. Kako je $d(\operatorname{supp} \mathbb{1}_{K_n}, \partial\Omega) > \frac{1}{n}$, vrijedi $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Očito je $0 \leq \psi \leq 1$. Konačno, za $x \in \{y \in \Omega : d(y, K) < \frac{1}{n}\}$ je

$$\psi(x) = \int_{K[0,1]} \mathbb{1}_{K_n}(x - y/n)\rho(y)dy = \int_{K[0,1]} \rho(y)dy = 1,$$

pa je $\{y \in \Omega : d(y, K) < \frac{1}{n}\}$ tražena okolina. ∎

Preostaje reći nešto o tipu konvergencije koji bismo htjeli imati na ovom prostoru, odnosno topologiji. Kako smo već vidjeli, C_c^∞ funkcije su potprostori velikog broja poznatih funkcijskih prostora, pa bi jedan mogući pristup bio definirati promotriti $C_c^\infty(\Omega)$ s nasljeđenom topologijom iz odgovarajućeg nadprostora. Međutim, svaka od tih topologija se pokazuje preslaba da bi se postigli željeni rezultati. Na način kao što je napravljeno na predavanjima, može se uvesti topološka struktura na prostoru $C_c^\infty(\Omega)$, međutim za sve naše potrebe to je prekomplicirano i od manje važnosti za razumijevanje i baratanje test funkcijama. U ovom trenutku ćemo samo istaknuti sljedeću definiciju **nizovne konvergencije**.

Definicija 1.1.9. *Za niz $(\varphi_n)_n \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ kažemo da* ***konvergira u*** $\mathcal{D}(\Omega)$ *prema $u \in C_c^\infty(\Omega)$ i pišemo $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}} u$ ako vrijedi*

1. $\operatorname{supp} u_n \subseteq K$, *za neki fiksni kompakt K i sve $n \in \mathbb{N}$,*
2. $\partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{u} \partial^\alpha \varphi$, *za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

Za kraj ovog dijela usporedimo konvergenciju u $\mathcal{D}(\Omega)$ s ostalim konvergencijama.

Zadatak 1.1.10. *Neka je $(\varphi_n)_n$ niz u $C_c^\infty(\Omega)$ takav da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, te označimo s K kompakt u Ω takav da je $\operatorname{supp} \varphi_n, \operatorname{supp} \varphi \subseteq K$. Pokažite da tada vrijedi:*

(a) $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \varphi$, *za $1 \leq p \leq \infty$.*

(b) $\varphi_n \xrightarrow{C^m(K)} \varphi$, *za $1 \leq p \leq \infty$ i $m \in \mathbb{N}_0$, pri čemu je norma na prostoru $C^m(K)$ dana s*

$$\|u\|_{C^m(K)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty.$$

Zadatak 1.1.11. *Pokažite kontraprimjerima da niz $(\varphi_n)_n$ u $C_c^\infty(\Omega)$ može konvergirati prema 0 u L^p normi, odnosno uniformno (zajedno s derivacijama reda manje ili jednako m), ali da ne vrijedi $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.*

Poglavlje 2

Distribucije

2.1 Uvod; primjer delta distribucije

Prije nego što uvedemo precizno pojam distribucija, dati ćemo kratku motivaciju za iste, prije svega u vidu objekta koji je spomenut na kolegiju ODJ, a riječ je o tzv. **Diracovoj delta funkciji**. Diracova delta funkcija je uvedena kroz nekoliko svojstava, te su ona pretežito koristila pri postavljanju, odnosno rješavanju linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi. No, što je zapravo delta funkcija, i kojem matematičkom okviru ona pripada? Kao što se moglo vidjeti u svakom od kolegija koji u nekoj mjeri obuhvaćaju teoriju diferencijalnih jednažbi, ovo područje matematike je prije svega nastalo kako bi se mogli opisati, modelirati a zatim i riješiti (ili predivdjeti) razni fizikalni procesi, odnosno zakoni. Pri tome smo često navikli na određena pojednostavljivanja ili idealizacije stvarne situacije:

- Iako gotovo svi objekti u stvarnosti imaju volumen, zamišljamo ih kao točkaste objekte u kojima su koncentrirani svi njihovi atributi, bilo da je riječ o masi, električnom naboju ili potencijalu, temperaturi itd.

- Odvijanje fizikalnih procesa, a samim time i promjene koje se u njima događaju, često smatramo instantnima. Primjerice, ukoliko lopta miruje, te ju zatim u trenutku t_0 udarimo nogom, trajanje prijenos količine gibanja p smatramo beskonačno kratkim, ne uzimajući u obzir ipak netrivijano vrijeme međudjelovanja noge i lopte, kako na makroskopskoj razini, tako i na samoj subatomskoj razini, te nakon toga lopta nastavlja imati količinu gibanja p.

Stoga se javila potreba za načinom na koji bismo takve aproksimacije mogli zapisati, ali i računati s njima na način koji nam fizikalna opažanja sugeriraju. Naravno, očiti način označavanja gornjih pojava bi bio:

- Karaterističnom funkcijom točkastog objekta, $\mathbb{1}_{x_0}(x)$,

- Step funkcijom $\mathbb{1}_{t \geq t_0}(t)$.

Obje ove funkcije imaju sličan problem u vidu onoga što želimo postići: u dosadašnjoj teoriji mjere i izmjerivih funkcija, obje ove funkcije zapravo "ne vide" što se događa u ključnom trenutku. Naime, prva funkcija je zapravo s.s. jednaka nuli, dok druga funkcija ima s.s. derivaciju jednaku nuli, dok u $t = t_0$ derivacija ne postoji. Dakle, za svaki tip računa nam prva funkcija uopće ni ne može očuvati informaciju o količini koja se nalazi u točki x_0, dok u drugom slučaju nemamo nikakvu informaciju o tome da je nekakve promjene u trenutku t_0 uopće bilo, a kamoli kolika je. Diracova delta funkcija će biti rješenje prvog od tih problema; objekt koji nam označava koncentraciju cijele mase/naboja/itd. u jednoj jedinoj točki, ali pritom ne narušavajući neka svojstva koja posjeduju trodimenzionalni objekti. Drugi dio problema će zapravo voditi na pitanje deriviranja funkcija koje nisu nužno više derivabilne u klasičnom smislu, čuvajući informacije o tome gdje se pojavio skok, i koliki je on bio.

Iako je već sugerirano da delta funkcija neće zapravo biti standardna funkcija, pogledajmo kako bismo htjeli da ona izgleda kada bi to ipak bio slučaj. Poslužimo se opet fizikalnim primjerom tijela u prostoru u tu svrhu. Radi jednostavnosti, neka je naše tijelo kugla oko ishodišta radijusa 1 (K_1) mase $m > 0$. U slučaju da je kugla homogena, njena funkcija gustoće je dana s $\rho(x) = \frac{m}{|K_1|}\mathbb{1}_{K_1}(x)$, gdje je $|\cdot|$ oznaka za volumen u $\mathbb{R}^3$, tj. vrijedi

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(x)dx.$$

Naš je cilj reći nešto o slučaju koji se nalazi na drugoj krajnosti; kada tijelo nije homogeno već je cijela masa koncentrirana u jednoj točki (npr. ishodištu). Za aproksimaciju tog efekta možemo prvo uzeti niz gustoća koje su uniformne na vrlo maloj kugli oko ishodišta (K_ε), ali tako da masa tijela i dalje ostane m. Drugim riječima, označimo s $\rho_\varepsilon(x) = \frac{m}{|K_\varepsilon|} \cdot \mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x)$. Tada ponovno imamo

$$m = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x)dx.$$

Za aproksimacijske funkcije ρ_ε vrijedi

$$\rho_0(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Kako je za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedilo $\int \rho_\varepsilon = m$, te uzevši u obzir fizikalnu interpretaciju ("masa = integriranje gustoće po volumenu"), htjeli bismo da vrijedi i

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_0(x)dx = m. \tag{2.2}$$

Naravno, iz teorije mjere i integrala znamo da ne postoji izmjeriva funkcija koja zadovoljava i (2.1) i (2.2). Stoga vidimo da promatranje jakog limesa prethodnog niza funkcija nema smisla. Umjesto toga, promotrit ćemo slabi limes toga niza. Drugim riječima, smisao našoj "funkciji" ρ_0, koju ćemo sada označiti s δ (za normaliziran slučaj $m = 1$)

ćemo dati tek kada ju "testiramo" na dovoljno dobrim funkcijama. Preciznije, **Diracovu delta distribuciju** ćemo definirati kao linearan funkcional na prostoru testnih funkcija, $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, na sljedeći način

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|K_\varepsilon|} \int_{K_\varepsilon} \varphi(x)dx = \varphi(0).$$

(a) Nekad se za djelovanje $\langle \delta, \varphi \rangle$ na test funkciju φ, u skladu s uvodnom pričom, koristi i neprecizna oznaka

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)\varphi(x)dx.$$

(b) Gornja definicija, odnosno račun, ima smisla i za funkcije φ koje su samo neprekidne u nuli.

(c) Primijetimo da nam ovakav objekt daje upravo ono što nismo mogli postići s običnim funkcijama; informaciju o mjeri nekog atributa u jednoj jedinoj točki.

(d) Ukoliko uvrstimo $\varphi \equiv 1$, tada bismo dobili upravo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(x)dx = 1.$$

(e) Delta distribucija nam da je informaciju o tome što se događa u ishodištu. Ukoliko želimo isto napraviti za neki drugi $a \in \mathbb{R}^d$, tada bismo promotrili "funkciju" $\delta(x-a)$, odnosno preciznije distribuciju definiranu kao slabi limes funkcija $x \mapsto \rho_\varepsilon(x-a) = \frac{1}{|K_\varepsilon|}\mathbb{1}_{K_\varepsilon}(x-a)$. Koristeći ponovno oznaku kao u (a) imamo za sve $a \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \delta(a-x)f(x)dx = f(a),$$

što bismo mogli zapisati i kao $\delta * f = f$. Dakle, δ možemo smatrati kao neutralni element za operaciju konvolucije.

Osim pitanja mjerenja vrijednosti koncentrirani u jednoj točki, tu je i drugo pitanje koje nam je od velike važnosti; pitanje možemo li derivirati funkcije koje nisu nužno derivabilne, odnosno možemo li slično kao i gore dati smisao takvoj operaciji. Kao što smo spomenuli na samom početku, fizikalni procesi koje opisujemo jednadžbama ne moraju nužno biti glatki (možemo zamisliti kretanje tijela koje je samo po dijelovima glatko, ili primjerice vršenje mjerenja koje ima skokove), te nam je cilj i za takve probleme dati pojam "rješenja". U nastavku ćemo vidjeti na koji se način takva operacija dobiva, a zasad se možemo osvrnuti natrag na primjer koji smo naveli, a to je step-funkcija. Označimo s

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Vrijedi $H'(x) = 0$ za $x \neq 0$ dok u nuli derivacija ne postoji. Međutim, htjeli bismo ipak na neki način pri deriviranju dobiti informaciju i kakav se pomak dogodio u točki gubitka glatkoće. Primijenit ćemo isti pristup kao i u slučaju definiranja delta funkcije, a to je zamjena pitanjem jakog limesa slabim. Time dolazimo do idućeg kandidata za H' kao distribucije:

$$\langle H', \varphi \rangle = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{H(x) - H(x-h)}{h} \varphi(x) dx = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \varphi(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Primijetimo da nam H' u ovom smislu zaista daje informaciju koju želimo; pojava δ u derivaciji sugerira upravo da se u nuli dogodio skok visine 1, dok je van toga derivacija "jednaka nuli".

2.2 Osnovni primjeri

Definicija 2.2.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren. Za linearan funkcional $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***distribucija*** *ako*

$$(\forall K \in \mathcal{K}(\Omega))(\exists C > 0, m \in \mathbb{N})) \quad \varphi \in C_K^\infty(\Omega) \Rightarrow \big|\langle T, \varphi \rangle\big| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} ||\partial^\alpha \varphi||_{L_\infty(K)}.$$

S $\mathcal{D}'(\Omega)$ ćemo označavati skup svih distribucija na Ω. Ukoliko m možemo izabrati neovisno o kompaktu K, kažemo da je distribucija T ***reda manje ili jednako*** *m. Najmanji takav m zovemo* ***redom distribucije****. Ukoliko takav ne postoji, kažemo da je distribucija beskonačnog reda.*

Propozicija 2.2.2. *Za linearan funkcional $T : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ ekvivalentno je:*

a) T je distribucija,

b) T je nizovno neprekidan, tj. $\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, kad god $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

(c) T je nizovno neprekidan u nuli, tj. $\langle T, \varphi \rangle \to 0$ kad god $\varphi \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$.

Primjer 2.2.3. *Za funkciju $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ definiramo funkcional na $C_c^\infty(\Omega)$ s*

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_\Omega f(x) \varphi(x) dx.$$

Linearnost ovog preslikavanja je očita. Za proizvoljan $K \in \mathcal{K}(\Omega)$ i $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ takvu da je supp $\varphi \subseteq K$ imamo

$$\big|\langle T_f, \varphi \rangle\big| = \left| \int_K f \varphi \right| \leq ||f||_{L^1(K)} ||\varphi||_{L^\infty(K)},$$

te vidimo da je s T_f dobro definirana jedna distribucija reda 0.

Definicija 2.2.4. *Za distribuciju $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ćemo reći da je* **regularna** *ako postoji $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da je $T = T_f$.*

Napomena 2.2.5. *Od sad nadalje poistovjećujemo funkciju $f \in L^1_{loc}$ s pripadnom distribucijom T_f, te umjesto $\langle T_f, \varphi\rangle$ pišemo $\langle f, \varphi\rangle$.*

Napomena 2.2.6. *Osnovna lema varijacijskog računa nam osigurava da je ulaganje $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ injektivno.*

Primjer 2.2.7. *(**Diracova delta funkcija**) Za $x \in \Omega$ definiramo $\langle \delta_x, \varphi\rangle := \varphi(x)$. Zbog $|\langle \delta_x, \varphi\rangle| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||_{L^\infty}$ je $\delta_x \in \mathcal{D}'$, za sve $x \in \Omega$, te je očito δ_x distribucija reda 0. Pokažimo da δ_x nije regularna distribucija:*

Dokaz. Uzmimo, jednostavnosti radi, da je $x = 0$ i $\Omega = \mathbb{R}^d$. Pretpostavimo da postoji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ takva da je

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)dx = \langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0), \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$

Neka je $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ standardni izglađivač. Tada bi imali

$$0 < |\rho(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\rho(nx)dx \right| \leq \int_{K[0,\frac{1}{n}]} |f(x)|\rho(nx)dx \leq ||\rho||_{L^\infty} \int_{K[0,\frac{1}{n}]} |f(x)|dx \overset{LTDK}{\longrightarrow} 0,$$

što je očito nemoguće. □

Napomena 2.2.8. *Prethodni primjer nam pokazuje kako ulaganje $L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ nije surjektivno.*

Zadatak 2.2.9. *Jesu li sljedeći funkcionali distribucije?*

a) $\langle T, \varphi\rangle = |\varphi(0)|$,

b) $\langle T, \varphi\rangle = a, \quad a \in \mathbb{C}$,

c) $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^\alpha \varphi(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Funkcionali iz a) i b) nisu linearni, pa ne mogu biti distribucije.
Provjerimo za koje je $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $x \mapsto |x|^\alpha$ u $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Dovoljno je provjeriti kada je $|x|^\alpha$ integrabilna na nekoj kugli oko 0 (dalje od 0 je riječ o neprekidnoj funkciji). Računamo

$$\int_{K[0,1]} |x|^\alpha dx = \int_0^1 \int_{S(0,r)} r^\alpha d\sigma(y)dr = \begin{cases} d\omega_d \ln r\Big|_0^1, & \alpha = -d, \\ \\ d\omega_d \frac{r^{\alpha+d}}{\alpha+d}\Big|_0^1, & \alpha \neq -d, \end{cases}$$

odakle vidimo da se funkcija nalazi u $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ako i samo ako je $\alpha > -d$.
Pokažimo za kraj da u slučaju $\alpha \leq -d$ zaista pripadni integral ne konvergira. Neka je $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ takva da je $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ na $K[0,1]$. Tada je

$$\langle T, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^\alpha \psi(x) dx \geq \int_{K[0,1]} |x|^\alpha dx = \infty,$$

odakle slijedi da T nije uopće dobro definirano, pa samim time ni distribucija. ■

Primjer 2.2.10. ***Glavna vrijednost*** $\frac{1}{x}$ ***(p.v.*** $\frac{1}{x}$***))*** *Promotrimo linearno preslikavanje na* $C_c^\infty(\mathbb{R})$ *definirano s*

$$\langle T, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Tvrdimo da je T *distribucija reda 1.*

Dokaz. Za početak, pokažimo da je T dobro definirano preslikavanje, tj. da gornji limes postoji. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ te neka je $K = \operatorname{supp} \varphi$. Za $\varepsilon > 0$ imamo

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx.$$

Prema teoremu srednje vrijednosti, za svaki $x \in \langle 0, \infty \rangle$ postoji $\xi \in \langle -x, x \rangle$ takav da je $\varphi(x) - \varphi(-x) = 2x\varphi'(\xi)$, iz čega zaključujemo da je za svaki $x \in \langle 0, \infty \rangle$

$$\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \right| \leq 2|\varphi'(\xi)| \leq 2||\varphi'||_{L^\infty},$$

odakle zaključujemo da su funkcije $\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} \cdot \mathbb{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}$ ograničene (uniformno po ε) s $2||\varphi'||_{L^\infty} \cdot \mathbb{1}_{K \cup (-K)} \in L^1(\mathbb{R})$, pa primjenom LTDK-a dobivamo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

postoji, odnosno da je T zaista dobro definirano preslikavanje. Iz gornje ograde također slijedi da je ono reda manje ili jednako 1.

Preostaje pokazati da T nije reda 0. Da bismo to pokazali konstruirat ćemo niz funkcija čiji će nosač biti sve bliži nuli, kako bi odgovarajući integrali divergirali (želimo nekako iskoristiti činjenicu da $\frac{1}{x}$ nije integrabilno blizu 0). U tu svrhu promotrimo niz $(\varphi_n) \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R})$ koji zadovoljava sljedeće:

- $0 \leq \varphi_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}$,
- $\varphi_n = 1$ na $[\frac{1}{n}, 1], \quad n \in \mathbb{N}$,
- $\varphi_n = 0$ na $[\frac{1}{2n}, 2]^c, \quad n \in \mathbb{N}$.

Očito je $||\varphi_n||_{L^\infty} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. S druge strane,

$$\langle T, \varphi_n \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{[\frac{1}{2n}, 2]} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \geq \int_{[\frac{1}{n}, 1]} \frac{dx}{x} = \ln n \longrightarrow \infty.$$

Dakle, s jedne strane je niz $||\varphi_n||_{L^\infty}$ ograničen s 1, dok s druge strane niz $\langle T, \varphi_n \rangle$ divergira, pa očito ne možemo dobiti ogradu za djelovanje T samo pomoću vrijednosti funkcija (nultih derivacija) kao u definiciji. □

Ovu distribuciju ćemo ubuduće označavati s p.v.$\frac{1}{x}$ *(glavna vrijednost pridružena funkciji* $\frac{1}{x}$*).*

2.3 Operacije na distribucijama

Htjeli bismo na distribucijama definirati neke osnovne operacije, prije svega deriviranje, množenje funkcijom te translatiranje. Kao motivaciju za definicije koje slijede, pogledajmo što se događa u slučaju da je distribucija regularna.

Primjer 2.3.1. *1. Pretpostavimo da je $f \in C^1(\mathbb{R})$. Tada je za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$*

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)dx = -\langle f, \varphi' \rangle.$$

2. Pretpostavimo da je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ te $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Posebno je onda i $\psi f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Tada je za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle \psi f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} (\psi f)(x)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)(\psi\varphi)(x)dx = \langle f, \psi\varphi \rangle.$$

3. Pretpostavimo da je $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, te $a \in \mathbb{R}$. Očito je onda i $\tau_a f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Tada je za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x-a)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x+a)dx = \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle.$$

Prethodni primjer nam nameće prirodne definicije navedenih operacija.

Propozicija 2.3.2. *1. (**deriviranje distribucija**) Za $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ linearan funkcional $\partial^\alpha T$ na $C_c^\infty(\Omega)$ definiran s*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^\alpha \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

je distribucija. Štoviše, ako je T distribucija reda manje ili jednako m, tada je $\partial^\alpha T$ distribucija reda manje ili jednako $m + |\alpha|$.

2. ***(množenje distribucija C^∞ funkcijom)*** *Za $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ i $\psi \in C^\infty(\Omega)$ linearan funkcional ψT na $C_c^\infty(\Omega)$ definiran s*

$$\langle \psi T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\varphi\rangle, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

je distribucija.

3. ***(translacija distribucija)*** *Za $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ i $a \in \mathbb{R}^d$ linearan funkcional $\tau_a T$ na $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiran s*

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle := \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

je distribucija.

Zadatak 2.3.3. *Odredite $f^{(n)}$ u smislu distribucija, gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.*

Rješenje. Računamo po definiciji za $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi\rangle &= -\langle f, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_0^\infty x\varphi'(x)dx \\
&\overset{P.I.}{=} -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{0} + \int_0^\infty \varphi(x)dx - x\varphi(x)\Big|_0^\infty \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)dx \\
&= \langle \operatorname{sgn}, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, $f' = \operatorname{sgn}$. Za $n = 2$ imamo:
$\langle f'', \varphi\rangle = -\langle f', \varphi'\rangle = -\langle \operatorname{sgn}, \varphi'\rangle = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)dx - \int_0^\infty \varphi'(x)dx = 2\varphi(0) = \langle 2\delta_0, \varphi\rangle$.
Za $n \geq 3$ onda direktno slijedi $f^{(n)} = 2\delta_0^{(n-2)}$. ■

Lema 2.3.4. *Neka je $u \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{a\})$, te pretpostavimo da u točki a ima prekid prve vrste. Tada vrijedi:*

$$u' = \{u\} + h\delta_a, \quad h = u(a+) - u(a-),$$

gdje je $\{u\}$ funkcija koja je jednaka u' u onim točkama gdje u' postoji i naziva se regularni dio derivacije u smislu distribucija funkcije u.

Dokaz.

$$
\begin{aligned}
\langle u', \varphi \rangle &= -\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{a} u(x)\varphi'(x)dx - \int_{a}^{\infty} u(x)\varphi'(x)dx \\
&\overset{P.I.}{=} \int_{-\infty}^{a} u'(x)\varphi(x)dx - u(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{a} + \int_{a}^{\infty} u'(x)\varphi(x)dx - u(x)\varphi(x)\Big|_{a}^{\infty} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \{u\}(x)\varphi(x)dx + [u(a+) - u(a-)]\varphi(a).
\end{aligned}
$$

□

Napomena 2.3.5. *Gornji rezultat se na jednostavan način može poopćiti na funkcije klase C^1 osim u konačno mnogo točaka s prekidom prve vrste.*

Zadatak 2.3.6. *Odredite distribucijsku derivaciju funkcije*

$$
f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \\ x^2, & x \ge \pi. \end{cases}
$$

Rješenje.

$$
f' = \{f\} + (0-0)\delta_0 + (\pi^2 - 0)\delta_\pi = \{f\} + \pi^2\delta_\pi,
$$

gdje je

$$
\{f\}(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0 \\ \cos x, & 0 < x < \pi \\ 2x, & x \ge \pi. \end{cases}
$$

■

Zadatak 2.3.7. *a) Pokažite: $\tau_a\delta_b = \delta_{a+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

b) Pokažite da je s $T := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{na}$, $a > 0$ dobro definirana jedna distribucija s periodom a (tj., $\tau_a T = T$).

c) Pokažite da je s $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ dobro definirana jedna distribucija te joj odredite red.

Rješenje. a) $\langle \tau_a\delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_b, \tau_{-a}\varphi \rangle = (\tau_{-a}\varphi)(b) = \varphi(b - (-a)) = \langle \delta_{a+b}, \varphi \rangle$.

b) Neka je K proizvoljan kompakt u $\mathbb{R}$. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq [-Na, Na]$. Uzmimo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takvu da je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$. Tada imamo ocjenu

$$
\big|\langle T, \varphi \rangle\big| \le \sum_{n=-N}^{N} |\varphi(na)| \le (2N+1)||\varphi||_{L^\infty(K)}.
$$

Dakle, T je dobro definirano, linearno, te je iz gornjeg distribucija reda 0. Također, uz oznake kao prije,

$$\langle \tau_a T, \varphi\rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi\rangle = \sum_{n=-N-1}^{N-1} \varphi(n(a+1)) = \sum_{n=-N}^{N} \varphi(na) = \langle T, \varphi\rangle.$$

c) Neka je K proizvoljan kompakt u $\mathbb{R}$. Tada postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq [-N, N]$. Uzmimo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takvu da je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq K$. Tada imamo ocjenu

$$\big|\langle T, \varphi\rangle\big| \leq \sum_{n=0}^{N} |\varphi^{(n)}(n)| \leq (N+1)\max_{k\leq N} ||\varphi^{(k)}||_{L_\infty(K)}.$$

Dakle, T je dobro definirano, linearno, te iz gornjeg distribucija. Pokažimo da je beskonačnog reda. Za to nam je dovoljno pokazati da je $\delta_0^{(n)}$ distribucija reda n. Naime, lagano je za vidjeti da translacija distribucije ne mijenja njen red, pa uzimanjem $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takve da je $\operatorname{supp}\varphi = [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ gornja distribucija se svodi upravo na $\tau_n \delta_0^{(n)}$.

Jasno je da je $\delta_0^{(n)}$ distribucija reda manje ili jednako n. Da bi pokazali da nije reda manjeg od n konstruirat ćemo familiju funkcija φ_ε takvih da $\langle \delta^{(n)}, \varphi_\varepsilon\rangle$ teži u beskonačnost brže nego $\max\limits_{k<n}||\varphi^{(k)}||_{L_\infty}$ kako ε teži k nuli (slično kao i u primjeru 1.1.11., želimo pokazati da ne možemo ograničiti djelovanje distribucije pomoću derivacija nižeg reda). Neka je $\varphi \in C_c^\infty$ takva da je $\varphi^{(n)}(0) = 1$ te $\operatorname{supp}\varphi = [-1, 1]$ (primjer jedne takve funkcije bi bila $x^n \vartheta(x)$, gdje je $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takva da je $\vartheta(0) = \frac{1}{n!}$). Za $\varepsilon > 0$ definiramo

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Uočimo kako je tada $\varphi_\varepsilon^{(n)}(0) = \varepsilon^{-n}$ i $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$. Dodatno, za $x \in \operatorname{supp}\varphi_\varepsilon$ i $k < n$ vrijedi ocjena

$$\big|\langle \delta^{(k)}, \varphi_\varepsilon\rangle\big| = \varepsilon^{-k}\Big|\varphi^{(k)}\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big| \leq \varepsilon^{-k}||\varphi^{(k)}||_{L^\infty}.$$

Kada bi $\delta^{(n)}$ bila reda manjeg od n, recimo m, tada bi postojao $C > 0$ takav da je za sve $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon^{-n} = \big|\langle \delta^{(n)}, \varphi_\varepsilon\rangle\big| \leq C\max_{k\leq m}||\varphi_\varepsilon^{(k)}||_{L_\infty} \leq C\varepsilon^{-m}\max_{k\leq m}||\varphi^{(k)}||_{L_\infty},$$

odnosno

$$\varepsilon^{m-n} \leq C\max_{k\leq m}||\varphi^{(k)}||_{L_\infty}.$$

Puštanjem $\varepsilon \to 0$, zbog toga što je $m < n$, lijeva strana teži prema beskonačno, dok je desna strana konstantna, što nas navodi na kontradikciju.

■

Zadatak 2.3.8. *Za funkciju $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pokažite da je $g\delta_a = g(a)\delta_a$.*

Rješenje.
$$\langle g\delta_a, \varphi\rangle = \langle \delta_a, g\varphi\rangle = (g\varphi)(a) = g(a)\varphi(a) = \langle g(a)\delta_a, \varphi\rangle.$$

■

Zadatak 2.3.9. *Pokažite da vrijedi $x \cdot p.v.\frac{1}{x} = 1$.*

Rješenje. Za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ imamo

$$\langle x \cdot p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle = \langle p.v.\frac{1}{x}, x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{x\varphi(x)}{x}dx = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx = \langle 1, \varphi\rangle.$$

■

Zadatak 2.3.10. *Pokažite da je funkcija $f(x) = \ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ te odredite njenu distribucijsku derivaciju.*

Rješenje. Zbog parnosti funkcije f, dovoljno je pokazati da je $\int_0^1 \ln x dx < \infty$. Računamo:

$$\int_\varepsilon^1 \ln x dx \overset{P.I.}{=} x\ln x\Big|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon \longrightarrow 0$$

zbog $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\ln\varepsilon = 0$. Dakle, $\ln|x| \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Odredimo još $(\ln|\cdot|)'$. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Imamo

$$\begin{aligned}
\langle \ln|\cdot|', \varphi\rangle = -\langle \ln|\cdot|, \varphi'\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\epsilon}\ln|x|\varphi'(x)dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\ln(-x)\varphi'(x)dx + \int_\varepsilon^\infty \ln x\varphi'(x)dx\Big] \\
&\overset{P.I.}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx + (\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon\Big] \\
&= \langle p.v.\frac{1}{x}, \varphi\rangle + \lim_{\varepsilon\to 0}(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon.
\end{aligned}$$

Kao i ranije, koristeći teorem srednje vrijednosti, imamo ocjenu

$$|(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))\ln\varepsilon| \leq 2\varepsilon|\ln\varepsilon|||\varphi'||_{L^\infty},$$

odakle uzimanjem limesa $\varepsilon \to 0$ konačno dobivamo

$$\ln|\cdot|' = p.v.\frac{1}{x}.$$

■

2.4 Konvergencija distribucija

Na prostoru distribucija gledamo slabo-* topologiju. Posebno, za niz distribucija $(T_n)_n$ reći ćemo da konvergira k T ako:

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \quad \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

U tom slučaju pišemo $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$.

Primjer 2.4.1. *Neka je u_n niz u $C(\Omega)$ te $u \in C(\Omega)$ takva da $u_n \xrightarrow{u} u$. Tada $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$.*

Dokaz. Uzmimo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Imamo

$$\begin{aligned} \big|\langle u_n, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle\big| &= \Big| \int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \Big| \\ &\leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq |\operatorname{supp}\varphi| \cdot ||\varphi||_{L^\infty} \cdot ||u_n - u||_{L^\infty(\operatorname{supp}\varphi)} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.4.2. *Neka su u_n i u funkcije iz $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$, za sve $n \in \mathbb{N}$, te pretpostavimo da vrijedi $u_n \xrightarrow{L^p} u$. Tada $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$.*

Dokaz. Uzmimo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Imamo

$$\begin{aligned} \big|\langle u_n, \varphi \rangle - \langle u, \varphi \rangle\big| &= \Big| \int_\Omega u_n(x)\varphi(x)dx - \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \Big| \\ &\leq \int_\Omega |u_n(x) - u(x)||\varphi(x)|dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} ||u_n - u||_{L^p} ||\varphi||_{L^{p'}} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Iz prethodnih primjera vidimo kako konvergencija u većini poznatih prostora (prostori $C^k, k \in \mathbb{N}_0$, odnosno $L^p, p \in [1, \infty]$) povlači konvergenciju u prostoru distribucija (drugim riječima, konvergencija u $\mathcal{D}'$ je slabija od navedenih). Sada ćemo pokazati da je ta konvergencija strogo slabija.

Primjer 2.4.3. *Definiramo niz funkcija $u_n(x) := \sin(nx)$. Kako je riječ o nizu neprekidnih funkcija, on je posebno sadržan u $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Prema tome, u_n definira niz distribucija. Pokažimo da vrijedi $u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$, ali da ista konvergencija ne vrijedi u nijednom od navedenih prostora.*

Dokaz. Za $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ imamo

$$\langle u_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \sin(nx)\varphi(x)dx \overset{P.I.}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)dx \overset{\text{LTDK}}{\longrightarrow} 0.$$

S druge strane, za $p \in [1, \infty\rangle$, funkcije u_n se uopće ne nalaze u $L^p(\mathbb{R})$, pa je jasno da ne mogu ni konvergirati k 0 u tom prostoru. U slučaju $p = \infty$ i $C(\mathbb{R})$ ne konvergiraju k 0 zbog $||u_n||_{L^\infty} = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Zadatak 2.4.4. *Dokažite da vrijedi $\rho_n \longrightarrow \delta_0$.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\big|\langle \rho_n, \varphi \rangle - \langle \delta_0, \varphi \rangle\big| &= \left| \int \rho_n(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| \\
&= \left| \int \rho_n(x)\varphi(x)dx - \int \rho_n(x)\varphi(0)dx \right| \\
&\leq \int |\rho_n(x)||\varphi(x) - \varphi(0)|dx \\
&\leq ||\rho||_{L^\infty} \cdot n^d \int_{K[0,\frac{1}{n}]} |\varphi(x) - \varphi(0)|dx \\
&= \omega_d ||\rho||_{L^\infty} \fint_{K[0,\frac{1}{n}]} |\varphi(x) - \varphi(0)|dx \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

■

Napomena 2.4.5. *Deriviranje distribucija je (nizovno) neprekidno preslikavanje na $\mathcal{D}'$. Zaista, ako je (T_n) niz distribucija te T takva da vrijedi $T_n \overset{\mathcal{D}'}{\longrightarrow} T$, tada za sve $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ imamo:*

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle.$$

Zadatak 2.4.6. *Odredite limes u prostoru $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ niza $f_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$.*

Rješenje. Primijetimo prvo kako je $f_n = g_n'$, gdje je $g_n(x) = \operatorname{arctg} nx$. Odredimo stoga $\lim_n g_n$ u $\mathcal{D}'$. Neka je K kompakt u $\mathbb{R}$ te $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R})$. Za niz g_n imamo

- $g_n \longrightarrow \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}$ s.s. u K,
- $|g_n| \leq \frac{\pi}{2} \in L^1(K)$,

pa primjenom LTDK-a slijedi

$$\lim_n \langle g_n, \varphi \rangle = \lim_n \int_K g_n \varphi = \int_K (\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn})\varphi = \langle \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}, \varphi \rangle.$$

Konačno, zbog neprekidnosti deriviranja u $\mathcal{D}'$, imamo

$$\lim_n f_n = \lim_n g_n' = (\lim_n g_n)' = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn})' = \pi\delta_0.$$

■

2.5 Nosač distribucije, jednadžbe u $\mathcal{D}'$

Definicija 2.5.1. *Kažemo da je distribucija $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ **nula** na otvorenom skupu $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ako vrijedi*

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)) \quad \operatorname{supp} \varphi \subseteq \Omega \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

***Nosač distribucije** T tada definiramo kao komplement najvećeg otvorenog skupa na kojem je T nula.*

Zadatak 2.5.2. *Ako je $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nula na otvorenim skupovima Ω_1 i Ω_2, pokažite da je T nula na $\Omega_1 \cup \Omega_2$.*

Rješenje. Uzmimo proizvoljnu $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, te označimo s $K = \operatorname{supp} \varphi$. Koristeći particiju jedinice, nalazimo funkcije $\psi_1 \in C_c^\infty(\Omega_1)$ te $\psi_2 \in C_c^\infty(\Omega_2)$ takve da je $\psi_1 + \psi_2 \equiv 1$ na K. Stoga je

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, (\psi_1 + \psi_2)\varphi \rangle = \langle T, \psi_1 \varphi \rangle + \langle T, \psi_2 \varphi \rangle = 0,$$

jer je $\operatorname{supp}(\psi_1 \varphi) \subseteq \Omega_1$, te $\operatorname{supp}(\psi_2 \varphi) \subseteq \Omega_2$. ■

Lema 2.5.3. *Ako $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ zadovoljava $\varphi(0) = 0$, tada postoji funkcija $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ takva da je $\varphi(x) = x\psi(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Za fiksni $x \in \mathbb{R}$ definiramo $\vartheta(t) := \varphi(tx)$. Posebno je $\vartheta(1) = \varphi(x)$ i $\vartheta(0) = 0$. Tada je

$$\varphi(x) = \vartheta(1) - \vartheta(0) = \int_0^1 \vartheta'(t)dt = \int_0^1 x\varphi'(tx)dt = x\int_0^1 \varphi'(tx)dt.$$

Stavljanjem $\psi(x) := \int_0^1 \varphi'(tx)dt$ dobivamo traženu tvrdnju. □

Napomena 2.5.4. *U slučaju da $\varphi(0) \neq 0$, primjenjujemo prethodnu lemu na funkciju $\varphi - \varphi(0)\vartheta$, gdje je $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ takva da je $\vartheta(0) = 1$. U tom slučaju dobivamo postojanje funkcije $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ takve da je*

$$\varphi(x) = \varphi(0)\vartheta(x) + x\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Izračunat ćemo ovdje i vrijednost $\psi(0)$ (kasnije će se pokazati potreba za tim izrazom):

$$\psi(0) = \int_0^1 \varphi'(0)dt = \varphi'(0)$$

u slučaju $\varphi(0) = 0$, odnosno

$$\psi(0) = \int_0^1 [\varphi'(0) - \varphi(0)\vartheta'(0)]dt = \varphi'(0) - \varphi(0)\vartheta'(0)$$

u slučaju $\varphi(0) \neq 0$.

Teorem 2.5.5. *$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zadovoljava $T' = 0$ ako i samo ako je T konstanta, tj.*

$$\langle T, \varphi \rangle = C \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}).$$

Pomoću ovih rezultata ćemo pokazati na nekoliko primjera kako se rješavaju jednadžbe u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Zadatak 2.5.6. *U $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ riješite jednadžbu*

$$xT = 0.$$

Rješenje. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ proizvoljna. Na način koji je prikazan u napomeni 1.4.4., dolazimo do funkcije $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ takve da vrijedi

$$\varphi(x) = \varphi(0)\vartheta(x) + x\psi(x).$$

Djelovanjem T na φ dobivamo

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \varphi(0)\vartheta + x\psi \rangle \overset{LIN.}{=} \varphi(0)\langle T, \vartheta \rangle + \langle T, x\psi \rangle \overset{1.2.3.}{=} \varphi(0)\langle T, \vartheta \rangle + \langle xT, \varphi \rangle.$$

Uvrštavanjem $xT = 0$ dobivamo konačno

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \vartheta \rangle \varphi(0),$$

iz čega čitamo

$$T = \langle T, \vartheta \rangle \delta_0 = C\delta_0,$$

gdje je C konstanta koja ne ovisi o φ. Dakle, da bi $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zadovoljavala $xT = 0$ nužno je da je T oblika kao gore. Pokažimo da je to i dovoljan uvjet. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, te pretpostavimo da je $T = C\delta_0$, za neku konstantu C. Imamo

$$\langle xT, \varphi \rangle = \langle T, x\varphi \rangle = C\langle \delta_0, x\varphi \rangle = C \cdot (0 \cdot \varphi(0)) = 0.$$

■

Promatrimo sada jednadžbe oblika

$$fT = U, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}), U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Jednadžbu iz prethodnog zadatka možemo nazvati homogenom (desna strana je distribucija pridružena konstantnoj funkciji 0). U općenitom slučaju možemo postupiti na sličan način kao i u ODJ-u: prvo riješimo homogenu jednadžbu

$$fT_H = 0,$$

a zatim pronađemo jedno partikularno rješenje T_P,

$$fT_P = U.$$

Konačan skup rješenja gornje jednadžbe je tada dan s $T = T_H + T_P$.

Zadatak 2.5.7. *U $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ riješite jednadžbu*

$$xT = \delta_0.$$

Rješenje. Postupamo na isti način kao u prošlom zadatku:

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi \rangle &= \varphi(0)\langle T, \vartheta \rangle + \langle \delta_0, \psi \rangle \\
&= \varphi(0)\langle T, \vartheta \rangle + \psi(0) \\
&= \varphi(0)\langle T, \vartheta \rangle + \varphi'(0) - \varphi(0)\vartheta'(0) \\
&= (\langle T, \vartheta \rangle - \vartheta'(0))\varphi(0) + \varphi'(0) \\
&= C \cdot \varphi(0) + \varphi'(0) \\
&= \langle C\delta_0 - \delta_0', \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, nužan uvjet na T je da je to distribucija oblika

$$T = C\delta_0 - \delta_0',$$

gdje je C neka konstanta. Provjerimo da je to i dovoljan uvjet, tj. da je za svaku konstantu C distribucija gornjeg oblika rješenje jednadžbe $xT = \delta_0$:

$$\begin{aligned}
\langle x(C\delta_0 - \delta_0'), \varphi \rangle &= \langle C\delta_0 - \delta_0', x\varphi \rangle \\
&= 0 + \langle \delta_0, (x\varphi)' \rangle \\
&= \langle \delta_0, \varphi \rangle + \langle \delta_0, x\varphi' \rangle \\
&= \varphi(0) + 0 \\
&= \langle \delta_0, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Alternativno, s obzirom da iz prethodnog zadatka već znamo rješenje homogene jednadžbe, mogli smo samo pogoditi jedno partikularno rješenje. Jedan način na koji možemo doći do partikularnog rješenja je sljedeći: znamo da vrijedi

$$x\delta_0 = 0,$$

pa nakon deriviranja dobijemo

$$x\delta_0' + \delta_0 = 0,$$

odnosno

$$x(-\delta_0') = \delta_0.$$

■

Zadatak 2.5.8. *U $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ riješite jednadžbu*

$$xT = 1.$$

Rješenje. Rješenje homogene jednadžbe smo već odredili, to je $T_H = C\delta_0$. Prema zadatku 1.2.11., jedno partikularno rješenje je $p.v.\frac{1}{x}$. Dakle, skup svih rješenja gornje jednadžbe je dan s

$$T = C\delta_0 + p.v.\frac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{C}.$$

■

Napomena 2.5.9. *Prije sljedećeg zadatka, promotrimo sljedeću situaciju: neka je* $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *takva da je i* $\frac{1}{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$*, te pretpostavimo da* T *zadovoljava jednadžbu* $fT = U$*, gdje je* $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$*. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, (f\frac{1}{f})\varphi \rangle = \langle fT, \frac{1}{f}\varphi \rangle. = \langle U, \frac{1}{f}\varphi \rangle = \langle \frac{1}{f}U, \varphi \rangle,$$

odnosno, zaključujemo da je

$$T = \frac{1}{f}U.$$

Drugim riječima, jednadžbe u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *možemo "množiti"* C^∞ *funkcijama koje nisu nigdje* 0 *(polinomi bez realnih nultočaka će biti česti primjer).*

Zadatak 2.5.10. *U* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *riješite jednadžbu*

$$(1 + x^2)(1 - x^2)T = 0.$$

Rješenje. Koristeći napomenu prije zadatka, jednadžbu množimo s $\frac{1}{1+x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$, te dolazimo do ekvivalentnog problema

$$(1 - x^2)T = 0.$$

Označimo s $V := (1 - x)T$. Gornju jednadžbu tada možemo zapisati kao

$$(1 + x)V = 0.$$

Rješavamo sada ovaj problem.

$$\begin{aligned} (1 + x)V = 0 &\iff \\ \tau_{-1}(x)V = 0 &\iff \\ \tau_{-1}(x(\tau_1 V)) = 0 &\iff \\ x(\tau_1 V) = 0&. \end{aligned}$$

Prema zadatku 1.4.5., slijedi da je

$$\tau_1 V = C_1\delta_0, \quad C_1 \in \mathbb{C},$$

odnosno

$$V = \tau_{-1}(C_1\delta_0) = C_1\delta_{-1}, \quad C_1 \in \mathbb{C}.$$

Preostaje riješiti jednadžbu

$$(1 - x)T = V.$$

Imamo

$$\begin{aligned} (1 - x)T = V &\iff \\ (x - 1)T = -V &\iff \\ \tau_1(x)T = -V &\iff \\ \tau_1(x(\tau_{-1}T)) = -V &\iff \\ x(\tau_{-1}T) = -\tau_{-1}V &\iff \\ x(\tau_{-1}T) = C_1\delta_{-2}&. \end{aligned}$$

Ponovno, zbog zadatka 1.4.5., znamo da su sva homogena rješenja posljednje jednadžbe dana s

$$\tau_{-1}T_H = C_2\delta_0,$$

odnosno

$$T_H = \tau_1(C_2\delta_0) = C_2\delta_1.$$

Preostaje pogoditi jedno partikularno rješenje. S obzirom da je $\operatorname{supp}(C_1\delta_{-2}) = \{-2\}$, vidimo da mora biti i $\operatorname{supp}(x(\tau_{-1}T_P)) = \{-2\}$, pa onda i $\operatorname{supp}(\tau_{-1}T_P) = \{-2\}$, odnosno $\operatorname{supp} T_P = \{-1\}$. Rezultat s predavanja nam tada kaže da T_P mora biti linearna kombinacija derivacija Diracovih delta funkcija u 2. Vidimo da već za $T_P = -\frac{C_1}{2}\delta_{-1}$ dobivamo traženo partikularno rješenje, pa su sva rješenja početne jednadžbe dana s

$$T = T_H + T_P = C_2\delta_1 - \frac{C_1}{2}\delta_{-1} = C_3\delta_{-1} + C_2\delta_1, \quad C_2, C_3 \in \mathbb{C}.$$

■

Zadatak 2.5.11. *U $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ riješite jednadžbu*

$$T'' = \delta_0.$$

Rješenje. Kako je $\operatorname{supp}\delta_0 = \{0\}$, to mora biti i $\operatorname{supp} T'' = \{0\}$. Posebno, T'' je nula na otvorenim skupovima $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \infty\rangle$, što zbog teorema 1.4.5. povlači da je

$$T' = \begin{cases} C_1, & \text{na } \langle -\infty, 0\rangle \\ C_2, & \text{na } \langle 0, \infty\rangle \end{cases}$$

Zapravo, T' je obična funkcija (i to po dijelovima konstantna). S obzirom da se sada radi o običnoj funkciji, lako zaključujemo da je onda

$$T(x) = \begin{cases} C_1x + D_1, & x < 0 \\ C_2x + D_2, & x > 0 \end{cases}$$

Nadalje, kako je $T'' = \delta_0$, po lemi 1.2.6. zaključujemo da je

$$T'(0+) - T'(0-) = 1,$$

odnosno

$$C_2 = C_1 + 1.$$

Konačno, zbog toga što se u distribucijskoj derivaciji ne pojavljuje δ_0 (u protivnom bi u T'' imali član s δ_0'), zaključujemo da T mora biti neprekidna funkcija, što nas navodi na

$$D_1 = D_2.$$

Dakle, sva rješenja gornje jednadžbe su dana s

$$T(x) = \begin{cases} Cx + D, & x < 0 \\ (C+1)x + D, & x > 0 \end{cases}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

■

Zadatak 2.5.12. *U $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ riješite sljedeće jednadžbe:*

a) $xT' = 0$,

b) $x^2T = \delta_0$,

c) $xT' = \delta_0$.

Napomena 2.5.13. *Jednadžba $T' = U$, $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ima rješenje u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i dano je s*

$$T = F + C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, a $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ takva da vrijedi

$$F' = U.$$

Dakle, dovoljno je naći jedno rješenje gornje jednadžbe, ostala se tada razlikuju do na konstantu. Kao i u slučaju realnih funkcija, to je posljedica teorema 1.4.5.

Napomena 2.5.14. *Prethodni zadatak smo mogli riješiti i pomoću Napomene. Znamo da je jedno rješenje jednadžbe*

$$U' = \delta_0$$

Heavysideova funkcija H. Ukoliko imamo $T'' = \delta_0$, tada slijedi

$$T' = H + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Ponovno, jednostavno vidimo da je jedno rješenje ove distribucijske jednadžbe dano (funkcijom)

$$T(x) = \begin{cases} Cx, & x < 0 \\ (C+1)x, & x > 0 \end{cases}$$

Dakle, i na ovaj način, dodavanjem svih mogućih konstanti $D \in \mathbb{R}$, dolazimo do istog oblika rješenja kao i ranije.

Poglavlje 3

Fourierova analiza

U poglavlju koje slijedi će domena funkcija koje promatramo uvijek biti cijeli prostor $\mathbb{R}^d$ (eventualno će se napomenuti o kojoj se dimenziji radi, ako je to potrebno), stoga ćemo koristiti kraći zapis za odgovarajuće funkcijske prostore (L^p umjesto $L^p(\mathbb{R}^d)$, C_c^∞ umjesto $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ i slično).

3.1 Fourierova transformacija

Za $f \in L^1$ definiramo **Fourierovu transformaciju** funkcije f s

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}dx.$$

Zbog toga što je $f \in L^1$ gornji integral ima smisla, te vrijedi ocjena

$$||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1,$$

pa zapravo imamo da je preslikavanje $\mathcal{F} : L^1 \to L^\infty$ ograničen linearan operator norme manje ili jednake 1 (kasnije ćemo pokazati na primjeru da se gornja jednakost postiže, štoviše, da operator $\mathcal{F}$ ima fiksnu točku).
Vrijedi i nešto više: kao jednostavna posljedica teorema o dominiranoj konvergencije slijedi da je Fourierova transformacija L^1 funkcije neprekidna funkcija, i još dodatno, da je to neprekidna funkcija koja **trne u beskonačnosti**, odnosno element prostora C_0. Preciznije, C_0 je prostor svih neprekidnih funkcija f koje zadovoljavaju sljedeći uvjet:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists M > 0) \quad |x| > M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Ove rezultate rezimiramo u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1.1 (Riemann-Lebesgueova lema). *Preslikavanje $\mathcal{F}$ je ograničen linearan operator s L^1 u C_0.*

Primjer 3.1.2. *Odredimo Fourierovu transformaciju elementarne funkcije,* $f(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= \int_a^b e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i \xi} e^{-2\pi i \xi x}\Big|_a^b \\
&= \frac{e^{-2\pi i \xi a} - e^{-2\pi i \xi b}}{2\pi i \xi}.
\end{aligned}$$

Gornja formula naizgled nema smisla za $\xi = 0$*, međutim, znamo da je za* L^1 *funkcije njena Fourierova transformacija neprekidna funkcija pa je gornji izraz smislen i za* $\xi = 0$ *na limesu, gdje se dobije da je* $\hat{f}(0) = b - a$*, što bi se dobilo i da se na početku uvrstilo* $\xi = 0$ *u integralu.*

Napomena 3.1.3. *Primijetimo kako već za ograničenu funkciju s kompaktnim nosačem, kao što je* f *iz prethodnog zadatka, Fourierova transformacija neće više imati kompaktan nosač. Štoviše,* $\hat{f}$ *ne mora biti ni integrabilna. Zaista, stavimo* $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ *da bi dobili*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right| d\xi &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin \pi\xi}{\xi}\right| d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} \left|\frac{\sin \pi\xi}{\xi}\right| d\xi \\
&\geq \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{n-1}^{n} |\sin \pi\xi| d\xi \\
&= \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty,
\end{aligned}$$

odnosno $\hat{f} \notin L^1$.

Sada ćemo navesti nekoliko osnovnih svojstava Fourierove transformacije.

Propozicija 3.1.4. *Pretpostavimo da su* $f, g \in L^1$*. Tada vrijedi:*

a) $(\tau_y f)\hat{\ }(\xi) = e^{-2\pi i \xi \cdot y}\hat{f}(\xi)$ *i* $\tau_\eta(\hat{f}) = (e^{2\pi i \eta \cdot x} f)\hat{\ }$.

b) Ako je $x^\alpha f \in L^1$ *za* $|\alpha| \leq k$*, onda je* $\hat{f} \in C^k$ *i vrijedi*

$$\partial^\alpha \hat{f} = [(-2\pi i x)^\alpha f]\hat{\ }.$$

c) Ako je $f \in C^k$, $\partial^\alpha f \in L^1$ za $|\alpha| \leq k$ i $\partial^\alpha f \in C_0$ za sve $|\alpha| \leq k-1$, onda je

$$(\partial^\alpha f)\hat{}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{f}(\xi).$$

d) $(f(ax))\hat{}(\xi) = \frac{1}{|a|^d}\hat{f}(\frac{\xi}{a}), \quad a \in \mathbb{R}.$

e) $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$.

Pokažimo sada kako izgleda Fourierova transformacija jedne bitne klase funkcija, tzv. *Gaussijana.*

Zadatak 3.1.5. *Stavimo $f(x) = e^{-a|x|^2}$, gdje je $a > 0$. Tada je $\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}$.*

Rješenje. Pokažimo prvo tvrdnju za $d = 1$ i $a = 1$. Kako je

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

koristeći propoziciju 3.1.4.b), c) dobivamo

$$(\hat{f})'(\xi) = (-2\pi i x e^{-x^2})\hat{}(\xi) = \pi i (f')\hat{}(\xi) = \pi i (2\pi i \xi)\hat{f}(\xi) = -2\pi^2 \xi \hat{f}(\xi).$$

Rješavanjem ove diferencijalne jednadžbe dobivamo da je

$$\hat{f}(\xi) = Ce^{-\pi^2\xi^2},$$

za neku konstantu C. Preostaje još odrediti tu konstantu, što činimo uvrštavanjem $\xi = 0$, te korištenjem poznatog identiteta

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

U slučaju općenitog $a > 0$ koristimo propoziciju 2.1.4 d):

$$(e^{-ax^2})\hat{}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2\xi^2}{a}}.$$

Konačno, za višedimenzionalni slučaj koristimo Fubinijev teorem te činjenicu da je $|x|^2 = \sum_{i=1}^d |x_i|^2$:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \prod_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{-ax_j^2} e^{-2\pi i \xi_j x_j} dx_j \\
&= \prod_{i=1}^d \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi^2\xi_j^2}{a}} \\
&= \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.
\end{aligned}$$

■

Stavljanjem $a = \pi$ u funkciji iz prethodne propozicije dolazimo do primjera funkcije za koju vrijedi $\hat{f} = f$. Posebno, to pokazuje da je Fourierova transformacija zaista operator norme 1.

Zadatak 3.1.6. *Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = e^{-a|x|^2}$, gdje je $a \in \mathbb{C}$ takav da je Re$(a) > 0$.*

Rješenje. Na skupu $\Omega = \{a \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(a) > 0\}$ promatramo funkciju

$$a \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|^2} \cdot e^{-2\pi i\xi \cdot x} dx.$$

Ta je funkcija holomorfna na tom skupu. Kako iz prethodnog zadatka znamo da je za $a \in \langle 0, \infty\rangle \subseteq \Omega$ ova funkcija jednaka

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}},$$

što je također holomorfna funkcija na skupu Ω, to te dvije funkcije moraju biti jednake i na čitavom Ω, pa je Fourierova transformacija funkcije f dana s

$$\hat{f}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{a}} = \left|\frac{\pi}{a}\right|^{\frac{d}{2}} e^{-i\frac{d\cdot \arg(a)}{2}} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

■

Zadatak 3.1.7. *Pretpostavimo da je $f \in L^1$ (ne)parna funkcija. Tada je i $\widehat{f}$ također (ne)parna.*

Rješenje. Pretpostavimo da je f neparna funkcija (drugi slučaj ide analogno). Tada imamo

$$\widehat{f}(-\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot(-\xi)}dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(-y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}dy = -\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}dy = -\widehat{f}(\xi).$$

■

Zadatak 3.1.8. *Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, gdje je $a > 0$.*

Rješenje. Kako je $f \in L^1$, njenu Fourierovu transformaciju računamo po definiciji:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{a^2+x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{(x+ia)(x-ia)}dx.$$

Promatramo prvo slučaj $\xi < 0$ kako bi mogli primijeniti Jordanovu lemu na podintegralnu funkciju (prisjetite se tehnike računanja integrala realne funkcije iz kompleksne analize). Tako dobivamo

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi i \cdot \mathrm{res}\left(\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{a^2+z^2}, ia\right) = 2\pi i \lim_{z\to ia}\left((z-ia)\cdot\frac{e^{-2\pi i\xi z}}{a^2+z^2}\right) = \frac{\pi}{a}e^{2\pi a\xi}.$$

Kako je f parna funkcija, za određivanje vrijednosti $\hat{f}(\xi)$ za $\xi > 0$ koristimo pretohdni zadatak. Tako dobivamo da je za $\xi > 0$

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a \xi}.$$

Konačno, možemo zapisati

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a |\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

■

Zadatak 3.1.9. *Neka je $a \in \mathbb{C}$ takav da je Re$(a) > 0$. Izračunajte Fourierovu transformaciju sljedećih funkcija:*

a) $f_1(x) = e^{-ax} H(x)$,

b) $f_2(x) = e^{ax} H(-x)$,

c) $f_3(x) = \frac{x^k}{k!} e^{-ax} H(x)$,

d) $f_4(x) = \frac{x^k}{k!} e^{ax} H(-x)$,

e) $f_5(x) = e^{-a|x|}$,

f) $f_6(x) = \operatorname{sgn}(x) e^{-a|x|}$,

gdje je H Heavisideova funkcija.

Rješenje. a)

$$\hat{f}_1(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-ax} H(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-(2\pi i \xi + a)x} dx = -\frac{1}{2\pi i \xi + a} e^{-(2\pi i \xi + a)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi i \xi + a},$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili činjenicu da je

$$\lim_{x \to \infty} e^{-(2\pi i \xi + a)x} = \lim_{x \to \infty} e^{-(2\pi i \xi + i \operatorname{Im}(a))x} e^{-\operatorname{Re}(a)x} = 0,$$

zbog toga što je prvi faktor uvijek modula 1, dok drugi zbog Re$(a) > 0$ teži k 0.

b) Primijetimo kako je $f_2 = \tilde{f}_1$, pa je stoga

$$\hat{f}_2(\xi) = \hat{\tilde{f}}_1(\xi) = \hat{f}_1(-\xi) = \frac{1}{a - 2\pi i \xi}.$$

c) Primijetimo kako f_3 možemo zapisati pomoću f_1 kao

$$f_3(x) = (-2\pi i x)^k f_1(x) \frac{1}{k!} (-2\pi i)^{-k}.$$

Sada možemo lakše primijeniti propoziciju 3.1.4 b):

$$\hat{f}_3(\xi) = \frac{1}{k!} (-2\pi i)^{-k} \hat{f}_1^{(k)}(\xi) = \frac{1}{(a + 2\pi i \xi)^{k+1}}.$$

d) Slično kao ranije, primijetimo kako je $f_4 = (-1)^k \tilde{f}_3$, pa je

$$\hat{f}_4(\xi) = (-1)^k \hat{f}_3(-\xi) = -\frac{1}{(2\pi i\xi - a)^{k+1}}.$$

e) Primijetimo kako je $f_5 = f_1 + f_2$ s.s. Stoga je

$$\hat{f}_5(\xi) = \hat{f}_1(\xi) + \hat{f}_2(\xi) = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}.$$

f) Primijetimo kako je $f_6 = f_1 - f_2$, pa je onda

$$\hat{f}_6(\xi) = -\frac{4\pi i\xi}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}.$$

■

3.2 Inverzna Fourierova transformacija

Slično kao ranije, za $f \in L^1$ definiramo preslikavanje

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2\pi i\xi\cdot x} dx.$$

Analogno kao i u slučaju Fourierove transformacije, vidimo da je ovo preslikavanje ograničen linearan operator s L^1 u C_0. Sljedeći rezultat nam daje vezu između preslikavanja $f \mapsto \hat{f}$ i $f \mapsto \check{f}$.

Teorem 3.2.1. *Pretpostavimo da je $f \in L^1$ takva da je i njena Fourierova transformacija $\hat{f} \in L^1$. Tada postoji neprekidna funkcija f_0 takva da vrijedi:*

a) $f = f_0$ *s.s,*

b) $(\hat{f})^{\check{}} = (\check{f})^{\hat{}} = f_0$.

Posebno, za neprekidnu funkciju f koja zadovoljava uvjete teorema 2.2.1. vrijedi

$$\hat{\hat{f}}(x) = \tilde{f}(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Navedimo još jednu jednostavnu posljedicu prethodnog teorema.

Korolar 3.2.2. *Ako je $f \in L^1$ takva da je $\hat{f} = 0$, tada je i $f = 0$ s.s.*

Napomena 3.2.3. *Prethodni korolar nam također govori kako je Fourierova transformacija injektivan operator.*

Primjer 3.2.4. *Sada ćemo vidjeti kako možemo prethodne rezultate primijeniti na funkcije iz zadatka 3.1.9.*

a) *Funkcija* f_1 *ne zadovoljava uvjete teorema; naime, njena Fourierova transformacija* $\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{a+2\pi i\xi}$ *nije u* L^1*, jer je za* $|\xi| \geq \frac{|a|}{2\pi}$

$$\left|\frac{1}{a+2\pi i\xi}\right| \geq \frac{1}{|a|+2\pi|\xi|} \geq \frac{1}{2\pi|\xi|} \notin L^1.$$

Stoga zasad nemamo način kako bismo izračunali njenu inverznu Fourierovu transformaciju i što bi ona uopće trebala biti.

b) *Isti zaključak kao u a).*

c) *Funkcija* $\hat{f}_3(\xi) = \frac{1}{(a+2\pi i\xi)^{k+1}}$ *je u* L^1 *za sve* $k \in \mathbb{N}$*, pa možemo primijeniti teorem:*

$$\hat{\hat{f}}_3(x) = f_3(-x) = (-1)^k f_4(x).$$

d) *Isto kao i u b) dolazimo do*

$$\hat{\hat{f}}_4(x) = (-1)^k f_3(x).$$

e) *Fourierova transformacija funkcije* f_5 *je u* L^1*, pa primjenom teorema dobivamo*

$$\hat{\hat{f}}_5(x) = f_5(-x) = f_5(x).$$

f) *Fourierova transformacija funkcije* f_6 *se ne nalazi u* L^1*; slično kao u a), za* $|\xi| \geq \frac{|a|}{2\pi}$ *je*

$$\left|\frac{-4\pi i\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}\right| \geq \frac{4\pi|\xi|}{|a|^2+4\pi^2|\xi|^2} \geq \frac{1}{\pi|\xi|} \notin L^1.$$

Stoga ni za $\widehat{f_6}$ *ne možemo u ovom trenutku izračunati inverznu Fourierovu transformaciju.*

3.3 Schwartzov prostor

Već smo vidjeli kako je za proučavanje svojstava Fourierove transformacije L^1 nezahvalan prostor; često su potrebne dodatne tehničke pretpostavke kako bi se određeni rezultati mogli dokazati. Također, slika prostora L^1 pri tom preslikavanju je, kako smo vidjeli, (strogi) potprostor prostora C_0, a funkcije koje dobijemo u slici ne moraju više uopće biti integrabilne (odnosno, gube svojstva koja su imala njihovi originali). Također, htjeli bismo dati smisao i Fourierovoj transformaciji nekih objekata koji nisu nužno u L^1; primjerice preostali L^p prostori, a u konačnici ćemo reći i što bi bila Fourierova transformacija (temperirane) distribucije. Stoga u ovom trenutku uvodimo novi prostor funkcija na kojem ćemo imati daleko bolja, i lakše dostižna svojstva, a zatim ćemo definiciju proširiti gdje je to moguće koristeći standardne tehnike funkcionalne analize.

Definicija 3.3.1. *Za funkciju $f \in C^\infty$ definiramo sljedeće dvije familije polunormi:*

$$||f||_{\alpha,\beta} := ||x^\alpha \partial^\beta f||_{L^\infty}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d,$$

$$||f||_k := \max_{|\alpha+\beta|\leq k} ||f||_{\alpha,\beta}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Prostor svih C^∞ funkcija f takvih da je $||f||_k < \infty$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$ zovemo ***Schwartzov prostor*** *te označavamo s $\mathcal{S}$.*

Drugim riječima, $\mathcal{S}$ je prostor svih C^∞ funkcija čija svaka derivacija u beskonačnosti trne brže od svakog polinoma. Primjere takvih funkcija nije teško naći; primjerice, sve funkcije oblika $x^\alpha e^{-|x|^2}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ se nalaze u $\mathcal{S}$. Također, očito je da vrijedi i $C_c^\infty \subseteq \mathcal{S}$.
Sada ćemo navesti nekoliko rezultata o Schwartzovom prostoru.

Propozicija 3.3.2. *Schwartzov prostor $\mathcal{S}$ uz topologiju definiranu (prebrojivom) familijom polunormi $\{|| \cdot ||_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ je Fréchetov prostor.*

Prostor $\mathcal{S}$ je metrizabilan, što posebno znači da su nizovi dovoljni za opis svih topoloških svojstava $\mathcal{S}$ (posebno, pitanja konvergencije i neprekidnosti nekakvih preslikavanja). Podsjetimo još kako izgleda konvergencija u $\mathcal{S}$:
Niz $(f_n)_n$ u $\mathcal{S}$ konvergira k $f \in \mathcal{S}$ ako

$$(\forall k \in \mathbb{N}_0) \quad ||f_n - f||_k \to 0,$$

odnosno

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d) \quad ||f_n - f||_{\alpha,\beta} \to 0.$$

Zadatak 3.3.3. *Neka je $(\varphi_n)_n$ niz u C_c^∞ takav da konvergira prema φ u topologiji prostora C_c^∞. Tada taj niz konvergira prema φ i u $\mathcal{S}$.*

Propozicija 3.3.4. *C_c^∞ je gusto u $\mathcal{S}$.*

Napomena 3.3.5. *Ovdje je zgodno spomenuti i kako izgleda standardna aproksimacija funkcije iz $\mathcal{S}$ test funkcijama. Neka je $f \in \mathcal{S}$, te neka je $\vartheta \in C_c^\infty$ takva da je $\varphi(0) = 1$. Tada vrijedi*

$$\varphi\Big(\frac{\cdot}{n}\Big) f \xrightarrow{\mathcal{S}} f.$$

Propozicija 3.3.6. *Neka je $f \in \mathcal{S}$. Tada vrijedi sljedeće:*

a) $(\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d)$ $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}$, *te je deriviranje neprekidno preslikavanje na* $\mathcal{S}$,

b) $(\forall \psi \in \mathcal{O})$ $\psi f \in \mathcal{S}$, *te je to množenje neprekidno preslikavanje na* $\mathcal{S}$,

c) $f \in L^p, p \in [1, \infty]$. *Za* $p \in [1, \infty\rangle$ *imamo i više: kako vrijedi* $C_c^\infty \subseteq \mathcal{S} \subseteq L^p$ *te kako otprije znamo da je* C_c^∞ *gusto u* L^p, *to je onda i* $\mathcal{S}$ *gusto u* L^p, *za gornje p-ove.*

Sljedeće navodimo jednu korisnu karakterizaciju prostora $\mathcal{S}$.

Propozicija 3.3.7. *Neka je $f \in C^\infty$. Tada je ekvivalentno:*

a) $||x^\alpha \partial^\beta f||_{L^\infty} < \infty$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$,

b) $||\partial^\beta (x^\alpha f)||_{L^\infty} < \infty$ *za sve* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$,

c) $||(1+|x|)^N \partial^\beta f||_{L^\infty} < \infty$ *za sve* $N \in \mathbb{N}_0, \beta \in \mathbb{N}_0^d$,

d) $||(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}} \partial^\beta f||_{L^\infty} < \infty$ *za sve* $N \in \mathbb{N}_0, \beta \in \mathbb{N}_0^d$.

Dokaz. Ekvivalencija a) i b) slijedi jednostavno iz činjenice da je svaki od $\partial^\beta(x^\alpha f)$ linearna kombinacija izraza oblika $x^\gamma \partial^\delta f$ i obrnuto (Leibnizovo pravilo). Pokažimo sada ekvivalenciju a) i c). Očito za svaki x vrijedi $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq (1+|x|)^{|\alpha|}$, pa imamo da c) povlači a). S druge strane, $\sum_{j=1}^d |x_j|^N$ je strogo pozitivno za sve x na jediničnoj sferi, pa taj izraz poprima svoj pozitivni minimum M tamo. Tada za proizvoljni x, s obzirom da je $\frac{x}{|x|}$ na jediničnoj sferi (0 je trivijalan slučaj) vrijedi

$$\sum_{j=1}^d |x_j|^N \geq M|x|^N,$$

pa imamo

$$(1+|x|)^N \leq 2^N(1+|x|^N) \leq 2^N\left(1 + \frac{1}{M}\sum_{j=1}^d |x_j^N|\right) \leq \frac{2^N}{M}\sum_{|\beta|\leq N} |x^\beta|,$$

što daje i drugu implikaciju.
Konačno, ekvivalencija familije polunormi u d) s preostalima slijedi lagano iz

$$|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|} \leq (1+|x|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}},$$

odnosno

$$(1+|x|^2)^{\frac{N}{2}} \leq (1+|x|^2)^N \leq C \max_{|\alpha|\leq 2N} |x^\alpha|.$$

□

U prethodnoj propoziciji smo zapravo pokazali da su familije polunormi iz naše definicije *ekvivalentne familiji polunormi* iz c), odnosno d) dijela propozicije; podsjećamo, za dvije familije polunormi $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ i $(q_\beta)_{\beta\in B}$ na vektorskom prostoru V kažemo da su ekvivalentne ako vrijedi:

$$(\forall \alpha \in A)(\exists \beta_1, \ldots, \beta_m \in B, \, C > 0) \quad p_\alpha(x) \leq C\sum_{i=1}^m q_\beta(x), \quad x \in V,$$

$$(\forall \beta \in B)(\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A, \, C > 0) \quad q_\beta(x) \leq C\sum_{i=1}^m q_\alpha(x), \quad x \in V,$$

Posebno, one generiraju i istu topologiju na prostoru $\mathcal{S}$, te ćemo mi ponekad radi praktičnosti koristiti i te norme, uz oznaku $|| \cdot ||_{N,\beta}$.

Također, možemo definirati i familiju normi analognu onoj iz definicije 2.3.1: za $f \in \mathcal{S}$ i $k \in \mathbb{N}_0$ stavimo

$$||f||_k := \max_{N+|\beta|\leq k} ||f||_{N,\beta}.$$

Ove norme ponovno generiraju istu topologiju na $\mathcal{S}$.

Kao što smo već najavili, Schwartzov prostor će nam biti pogodan zbog dobrog ponašanja Fourierove transformacije na njemu. Preciznije, imamo idući rezultat.

Teorem 3.3.8. *Fourierova transformacija je izomorfizam prostora $\mathcal{S}$ na samog sebe.*

3.4 Fourierova transformacija na L^2

Teorem 3.4.1 (Plancherel). *Fourierova transformacija definirana integralom na $\mathcal{S} \subseteq L^1$ se na jedinstven način može proširiti s $\mathcal{S}$ do unitarnog operatora na L^2 i vrijedi Parsevalova formula*

$$\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle, \quad f, g \in L^2.$$

Zadatak 3.4.2. *Izračunajte $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.*

Rješenje. Primijetimo prvo da je $\frac{\sin x}{x} \in L^2$; na $[-1, 1]$ je funkcija ograničena zbog neprekidnosti i činjenice da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, dok zbog $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{|x|}$ je kvadratno integrabilna na $[-1, 1]^c$. Primjenom Plancherelovog teorema slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)\hat{}(\xi)\right)^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \pi^2 \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi) d\xi = \pi.$$

■

3.5 Temperirane distribucije

Definicija 3.5.1. *Za neprekidan linearan funkcional $T : \mathcal{S} \to \mathbb{F}$ kažemo da je* ***temperirana distribucija****. Drugim riječima, T je temperirana distribucija ako postoje konstanta $C > 0$ i $k \in \mathbb{N}_0$ takvi da vrijedi*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C||\varphi||_k, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Ekvivalentno, T je temperirana distribucija ako postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ i $C > 0$ takvi da vrijedi

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sum_{i=1}^{m} \|\varphi\|_{\alpha_i,\beta_i}, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Prostor svih temperiranih distribucija označavamo s $\mathcal{S}'$.

Primjer 3.5.2. *Svaka temperirana distribucija T može se na prirodan način shvatiti kao element prostora $\mathcal{D}'$. Promatramo restrikciju tog funkcionala na prostor test funkcija, $T|_{C_c\infty}$. Neka je $(\varphi_n)_n$ niz u C_c^∞ takav da $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$. Tada taj niz konvergira prema φ i u $\mathcal{S}$ (zad. 2.3.3.) pa zbog toga što je $T \in \mathcal{S}'$ niz $\langle T, \varphi_n\rangle$ konvergira prema $\langle T, \varphi\rangle$.*
Štoviše, zbog gustoće test funkcija u prostoru $\mathcal{S}$, preslikavanje $T \mapsto T|_{C_c^\infty}$ je injektivno, pa stoga imamo željeno ulaganje $\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$.

Razumno se nakon ovoga pitati može li se svaka distribucija (element $\mathcal{D}'$) proširiti do temperirane distribucije (elementa $\mathcal{S}'$). Odgovor je ne. Promotrimo primjer funkcije $f(x) = e^{x^2}$. Ovo je dobro definiran element $\mathcal{D}'$. S druge strane, $f \notin \mathcal{S}'$ (dovoljno je vidjeti da je $\langle f, e^{-\frac{1}{2}x^2}\rangle = \infty$). Pretpostavimo da se f može proširiti do neprekidnog funkcionala na $\mathcal{S}$ (uz istu oznaku). Neka je $\vartheta \in \mathcal{D}$ takva da je $0 \le \vartheta \le 1$ te $\vartheta = 1$ na $[-1, 1]$. Tada imamo $\vartheta(\cdot/n)e^{-\frac{1}{2}x^2} \xrightarrow{\mathcal{S}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$, što dalje povlači

$$\langle f, e^{-\frac{1}{2}x^2}\rangle = \lim_n \langle f, \vartheta(\cdot/n)e^{-\frac{1}{2}x^2}\rangle \ge \lim_n \int_{-n}^{n} e^{\frac{1}{2}x^2} dx \ge \lim_n 2n = \infty.$$

Dakle, takvo proširenje je nemoguće.

Zadatak 3.5.3. *Pokažite da je svaka distribucija s kompaktnim nosačem ujedno i temperirana.*

Primjer 3.5.4. *Vrijedi $L^p \hookrightarrow \mathcal{S}'$, za $p \in [1, \infty]$. Zaista, neka je $p \in [1, \infty]$ i $f \in L^p$. Za svaku $\varphi \in \mathcal{S}$ imamo*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \le \int |f(x)\varphi(x)|dx \le ||f||_{L^p}||\varphi||_{L^q} \le (2\pi)^d ||f||_{L^p}||\varphi||_{2d}.$$

Također, iz osnovne leme varijacijskog računa vidimo da je ta identifikacija zapravo injektivna. Posebno, kako je $\mathcal{S} \subseteq \cap_{p=1}^{\infty} L^p$, na sličan način zaključujemo i da je $\mathcal{S}$ uložen u $\mathcal{S}'$.

Primjer 3.5.5. *Neka su $T \in \mathcal{S}'$ i $\psi \in \mathcal{O}$. Tada je i $\psi T \in \mathcal{S}'$, gdje je ψT definirano s*

$$\langle \psi T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\varphi\rangle.$$

Primjer 3.5.6. $\delta_0 \in \mathcal{S}'$. *Naime,* $|\langle \delta_0, \varphi\rangle| = |\varphi(0)| \le ||\varphi||_0$.

Primjer 3.5.7. *Pretpostavimo da je $T \in \mathcal{S}'$. Tada je i $x^\alpha \partial^\beta T \in \mathcal{S}'$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$. Zaista, za svaki $\varphi \in \mathcal{S}$ imamo*

$$\langle x^\alpha \partial^\beta T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle \partial^\beta T, x^\alpha \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\beta(x^\alpha\varphi)\rangle.$$

Propozicija 3.3.6. sad daje tvrdnju.

Primjer 3.5.8. *Pokažimo da je $\ln|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Kao posljedicu toga ćemo imati i da je $(\ln|x|)' = p.v.\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$. Neka je $(\varphi_n) \in \mathcal{S}$. Ocjenjujemo*

$$|\langle \ln|x|, \varphi\rangle| \le \int |\ln|x|||\varphi(x)|dx = \int \frac{|\ln|x||}{(1+|x|)^3}[(1+|x|)^3|\varphi(x)|]dx.$$

Funkcija $x \mapsto (1+|x|)^3\varphi_n$ *je ponovno u* $\mathcal{S}$*. S druge strane, funkcija* $x \mapsto \frac{\ln|x|}{(1+|x|)^3}$ *je u* L^1*. Da bi ovo vidjeli, primijetimo kako na segmentu* $\langle 0, 1]$ *imamo*

$$\frac{|\ln x|}{(1+x)^3} \leq |\ln x|,$$

za koju smo već pokazali da je tamo integrabilna, dok na $[1, \infty\rangle$ *imamo*

$$\frac{\ln x}{(1+x)^3} = \frac{\ln x}{1+x} \cdot \frac{1}{(1+x)^2},$$

pa kako je prva funkcija ograničena, a druga integrabilna, slijedi tvrdnja o integrabilnosti funkcije $\frac{|\ln|x||}{(1+|x|)^3}$ *na* $\mathbb{R}$*. Sada možemo iskoristiti Hölderovu nejednakost da zaključimo*

$$|\langle \ln|x|, \varphi\rangle| \leq \left|\left|\frac{\ln|x|}{(1+|x|)^3}\right|\right|_{L^1} ||\varphi_n||_{3,0}.$$

Napomena 3.5.9. *Na prostoru* $\mathcal{S}'$ *također promatramo slabo-* konvergenciju nizova: niz* $(T_n)_n$ *u* $\mathcal{S}'$ *konvergira k* $T \in \mathcal{S}'$ *ako vrijedi*

$$\langle T_n, \varphi\rangle \to \langle T, \varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Definicija 3.5.10. *Za* $T \in \mathcal{S}'$ *definiramo njenu Fourierovu transformaciju* $\hat{T}$ *kao temperiranu distribuciju koja djeluje na sljedeći način:*

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Napomena 3.5.11. *Vrijedi formula inverzije:* $\hat{\hat{T}} = \tilde{T}$*. Dakle, Fourierova transformacija je linearna bijekcija sa* $\mathcal{S}'$ *u samog sebe.*

Napomena 3.5.12. *Fourierova transformacija je nizovno neprekidno preslikavanje na* $\mathcal{S}'$*. Zaista, neka je* $(T_n)_n$ *niz u* $\mathcal{S}'$ *te* $T \in \mathcal{S}'$ *takav da vrijedi* $T_n \xrightarrow{*} T$*. Tada za svaki* $\varphi \in \mathcal{S}$ *imamo*

$$\langle \hat{T}_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \hat{\varphi}\rangle \to \langle T, \hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{T}, \varphi\rangle.$$

Napomena 3.5.13. *Prisjetimo se kako za distribuciju* T *kažemo da je parna ako vrijedi* $\tilde{T} = T$*, odnosno neparna ako vrijedi* $\tilde{T} = -T$*. Formula inverzije nam govori kako je Fourierova transformacija (ne)parne distribucije ponovno (ne)parna.*

Primjer 3.5.14. *Sada ima smisla promatrati* $\hat{\hat{f}}$ *za funkcije iz zadatka 3.1.9., odnosno primjera 3.2.4.*

a) *Funkcija* $\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{a+2\pi i\xi}$ *je u* L^∞*, pa ju ima smisla promatrati kao objekt u* $\mathcal{S}'$*. Koristeći formulu inverzije dobivamo*

$$\hat{\hat{f}}_1(x) = \tilde{f}_1(x) = f_2(x).$$

b) S obzirom da je $f_2 = \tilde{f}_1$, *to je* $\hat{\hat{f}}_2 = f_1$.

f) Funkcija $\hat{f}_6(\xi) = -\frac{4\pi i\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}$ *je u* L^∞, *pa ima smisla promatrati njenu Fourierovu transformaciju. Ponovno formulom inverzije dolazimo do*

$$\hat{\hat{f}}_6(x) = -\operatorname{sgn}(x)e^{-a|x|}.$$

Primjer 3.5.15. *Odredimo* $\hat{\delta}_0$. *Za* $\varphi \in \mathcal{S}$ *imamo*

$$\langle\hat{\delta}_0, \varphi\rangle = \langle\delta_0, \hat{\varphi}\rangle = \hat{\varphi}(0) = \int \varphi(x)dx = \langle 1, \varphi\rangle.$$

Dakle, $\hat{\delta}_0 = 1$. *Koristeći propoziciju 2.1.4. a) i b) dolazimo i do*

$$\hat{\delta}_a = \widehat{\tau_a\delta_0} = e^{-2\pi ia\xi}\hat{\delta}_0 = e^{-2\pi ia\xi},$$

odnosno

$$\widehat{\delta_0^{(k)}} = (2\pi i\xi)^k.$$

Posebno, formulom inverzije vidimo da vrijedi

$$\widehat{x^k} = \frac{1}{(-2\pi i)^k}\delta_0^{(k)}.$$

Napomena 3.5.16. *Primijetimo kako prethodni primjer zapravo daje sljedeće: za parne* k *je* $\delta_0^{(k)}$ *parna distribucija, dok je za neparne riječ o neparnoj distribuciji. Imamo i više: kao u slučaju funkcija, derivacija parne distribucije je neparna (i obratno). Pretpostavimo da je* T *parna, tj.* $\tilde{T} = T$. *Tada je*

$$\langle\widetilde{(T')}, \varphi\rangle = \langle T', \widetilde{\varphi}\rangle = -\langle T, (\widetilde{\varphi})'\rangle = -\langle T, -\widetilde{(\varphi')}\rangle = \langle\tilde{T}, \varphi'\rangle = \langle T, \varphi'\rangle = \langle -T', \varphi\rangle.$$

Analogno pokazujemo i slučaj neparne distribucije.

Zadatak 3.5.17. *Odredite* $\widehat{p.v.\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Označimo s $T = p.v.\frac{1}{x}$. Za $\varphi \in \mathcal{S}$ imamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned}
\langle\delta_0, \varphi\rangle &= \langle\hat{1}, \varphi\rangle \\
&= \langle 1, \hat{\varphi}\rangle \\
&= \langle x \cdot T, \hat{\varphi}\rangle \\
&= \langle T, x\hat{\varphi}\rangle \\
&= \langle T, \frac{1}{2\pi i}\widehat{\varphi'}\rangle \\
&= \langle\frac{1}{2\pi i}\hat{T}, \varphi'\rangle \\
&= \langle -\frac{1}{2\pi i}(\hat{T})', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi
$$\hat{T}' = -2\pi i\delta_0.$$
Rješenje ove jednadžbe su funkcije oblika
$$\hat{T}(\xi) = -2\pi i H(\xi) + C,$$
gdje je H Heavisideova funkcija, a C proizvoljna konstanta. Međutim, naše rješenje mora biti jedinstveno, stoga moramo nekako odrediti tu konstantu. To ćemo učiniti koristeći već spomenuto svojstvo Fourierove transformacije: slika neparne distribucije je ponovno neparna. Dakle, $\hat{T}$ mora biti neparna funkcija, što nam daje da mora biti $C = i\pi$, odnosno
$$\widehat{p.v.\frac{1}{x}}(\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi).$$
■

Primjer 3.5.18. *Primjenom formule inverzije na prethodni zadatak dobivamo*
$$\widehat{\mathrm{sgn}} = \frac{1}{i\pi} p.v.\frac{1}{x}.$$

Sada ćemo pokazati na već poznatom primjeru kako možemo računati Fourierovu transformaciju koristeći do sad izvedene rezultate.

Zadatak 3.5.19. *Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$, $a > 0$.*

Rješenje. Funkciju f zapišimo na sljedeći način:
$$f(x) = \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right),$$
pa je
$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2ai}\left[\left(\frac{1}{x-ia}\right)\hat{}(\xi) - \left(\frac{1}{x+ia}\right)\hat{}(\xi)\right].$$
Sada računamo Fourierove transformacije pribrojnika u zagradi:
$$\left(\frac{1}{x-ia}\right)\hat{}(\xi) = i\left(\frac{1}{a+2\pi i(\frac{x}{2\pi})}\right)\hat{}(\xi) = 2\pi i e^{2\pi a\xi} H(-\xi).$$
$$\left(\frac{1}{x+ia}\right)\hat{}(\xi) = -i\left(\frac{1}{a+2\pi i(\frac{x}{-2\pi})}\right)\hat{}(\xi) = 2\pi i e^{-2\pi a\xi} H(\xi).$$
Uvrštavanjem dobivenih transformacija na kraju dobivamo
$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}.$$
■

Zadatak 3.5.20. *Koristeći kompleksne trigonometrijske identitete pokažite:*

a) $(\cos(ax))\hat{}(\xi) = \frac{1}{2}\big(\delta_{\frac{a}{2\pi}} + \delta_{-\frac{a}{2\pi}}\big)$, $a \in \mathbb{R}$,

b) $(\sin(ax))\hat{}(\xi) = \frac{1}{2i}\big(\delta_{\frac{a}{2\pi}} - \delta_{-\frac{a}{2\pi}}\big)$, $a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3.5.21. *Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije* $f(x) = e^{-ia|x|^2}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rješenje. Neka je $(a_n)_n$ niz kompleksnih brojeva takvih da je $\mathrm{Re}(a_n) > 0$ za sve n te da vrijedi $a_n \to ia$. Za $\varphi \in \mathcal{S}$, zbog teorema o dominiranoj konvergenciji vrijedi

$$\int e^{-a_n|x|^2}\varphi(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int e^{-ia|x|}\varphi(x)dx,$$

$$\int e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a_n}}\varphi(\xi)d\xi \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int e^{\frac{i\pi^2|\xi|^2}{a}}\varphi(\xi)d\xi.$$

Označimo s $f_n(x) = e^{-a_n|x|^2}$. Iz prvog reda čitamo da vrijedi $f_n \overset{\mathcal{S}'}{\to} f$, pa zbog nizovne neprekidnosti Fourierove transformacije mora biti i $\hat{f} = \lim_n \hat{f}_n$. Prema zadatku 2.1.6. vrijedi

$$\hat{f}_n(\xi) = \left|\frac{\pi}{a_n}\right|^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{d\cdot\arg(a_n)}{2}} e^{-\frac{\pi^2|\xi|^2}{a_n}}.$$

Iz drugog reda i činjenice da

$$\left|\frac{\pi}{a_n}\right|^{\frac{d}{2}} e^{i\frac{d\cdot\arg(a_n)}{2}} \to \left|\frac{\pi}{a}\right|^{\frac{d}{2}} e^{i\frac{d\pi\,\mathrm{sgn}(a)}{4}}$$

konačno dobivamo

$$\hat{f}(\xi) = \left|\frac{\pi}{a}\right|^{\frac{d}{2}} e^{i\frac{d\pi\,\mathrm{sgn}(a)}{4}} e^{\frac{i\pi^2|\xi|^2}{a}}.$$

■

3.6 Konvolucije i Fourierova transformacija

Za f, g izmjerive funkcije definiramo konvoluciju kao

$$(f * g)(x) := \int f(x-y)g(y)dy$$

za one x za koje gornji integral konvergira. Postoji nekoliko uvjeta na funkcije f i g pod kojim gornji integral konvergira za skoro svaki x. Navest ćemo jedan od najpoznatijih.

Propozicija 3.6.1 (Youngova nejednakost). *Neka su* $p, q \in [1, \infty]$. *Pretpostavimo da su* $f \in L^p$ *i* $g \in L^q$. *Tada je* $f * g \in L^r$, *gdje je* r *takav da vrijedi* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, *te vrijedi ocjena*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p ||g||_q.$$

Dobro svojstvo konvolucije dviju funkcija je, okvirno govoreći, činjenica da je rezultat onoliko gladak koliko je glatka "bolja" od funkcija.

Propozicija 3.6.2. *Neka su $f \in L^1$, te $g \in C^k$. Pretpostavimo dodatno da je $\partial^\alpha g$ ograničena funkcija za sve $|\alpha| \leq k$. Tada je $f * g \in C^k$ i vrijedi*

$$\partial^\alpha (f * g) = f * (\partial^\alpha g), \quad |\alpha| \leq k.$$

Lako je za vidjeti da je konvolucija dvije funkcije iz L^1 ponovno u L^1 (između ostalog, možemo to vidjeti i u Youngovoj nejednakosti za $p = q = r = 1$). Kako je $\mathcal{S} \subseteq L^1$, konvolucija dvije funkcije iz $\mathcal{S}$ je dobro definiran element u L^1. Postavlja se pitanje vrijedi li i više, odnosno, je li konvolucija dvije Schwartzove funkcije ponovno Schwartzova.

Propozicija 3.6.3. *Neka su $f, g \in \mathcal{S}$. Tada je i $f * g \in \mathcal{S}$.*

Dokaz. Za $N \in \mathbb{N}_0$ i $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ imamo

$$\begin{aligned}
(1 + |x|)^N |\partial^\beta (f * g)|(x) &\leq \int (1 + |x|)^N |\partial_x^\beta f(x - y)||g(y)| dy \\
&\leq \int (1 + |x - y|)^N |\partial_x^\beta f(x - y)|(1 + |y|)^N |g(y)| dy \\
&\leq ||f||_{N,\beta} ||g||_{N+d+1,0} \int \frac{dy}{(1 + |y|)^{d+1}}.
\end{aligned}$$

Kako je posljednji integral konačan, slijedi tvrdnja. □

Sada ćemo se posvetiti vezi konvolucije funkcija i Fourierove transformacije.

Propozicija 3.6.4. *Neka su $f, g \in L^1$. Tada je $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.*

Zadatak 3.6.5. *Neka su $f, g \in L^2$. Tada je*

$$(\hat{f}\hat{g})\check{} = f * g.$$

Rješenje. Kako su $f, g \in L^2$, to je $\hat{f}\hat{g} \in L^1$, pa lijeva strana ima smisla i može se računati integralom. Za $x \in \mathbb{R}^d$ označimo s $h(y) := \overline{g(x - y)} = \overline{\widetilde{\tau_x g}(y)} \in L^2$. Tada je

$$f * g(x) = \int f(y)\overline{h(y)} \overset{\text{Planch.}}{=} \int \hat{f}(\xi)\overline{\widehat{h(\xi)}} = \int \hat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi = (\hat{f}\hat{g})\check{}(x).$$

■

Zadatak 3.6.6. *Odredite Fourierovu transformaciju funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Rješenje. Primijetimo prvo kako je $f(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} * \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$. Primjenom prethodne propozicije dobivamo

$$\hat{f}(\xi) = (\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]})\widehat{\ }(\xi)^2 = \left(\frac{\sin \pi\xi}{\pi\xi}\right)^2.$$

■

Zadatak 3.6.7. *Odredite Fourierovu transformaciju funkcije $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.*

Rješenje. Primijetimo prvo kako je zbog zadatka 3.5.19.

$$f(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 = (\widehat{\pi e^{-2\pi|\xi|}})(x)^2.$$

Sada koristeći prethodnu propoziciju imamo

$$f(x) = \pi^2(e^{-2\pi|\xi|} * e^{-2\pi|\xi|})\widehat{\ }(x),$$

pa primjenom Fourierove transformacije dobivamo

$$\hat{f}(\xi) = \pi^2(e^{-2\pi|\xi|} * e^{-2\pi|\xi|}) = \frac{\pi}{2}(1 + 2\pi|\xi|)e^{-2\pi|\xi|}.$$

■

Za kraj se bavimo pitanjem konvolucije u slučaju da jednu od funkcija zamijenimo distribucijom.

Propozicija 3.6.8. *Za $T \in \mathcal{D}'$ i $\psi \in C_c^\infty$ definiramo njihovu konvoluciju $T * \psi$ kao distribuciju*

$$\langle T * \psi, \varphi\rangle = \langle T, \tilde{\psi} * \varphi\rangle.$$

Tada vrijedi

a) $T * \psi \in C^\infty$, te je dana formulom $(T * \psi)(x) = \langle T, \tau_x\tilde{\psi}\rangle$,

b) $\partial^\alpha(T * \psi) = (\partial^\alpha T) * \psi = T * (\partial^\alpha\psi)$,

c) $\tau_a(T * \psi) = (\tau_a T) * \psi = T * (\tau_a\psi)$.

Propozicija 3.6.9. *Za $T \in \mathcal{S}'$ i $f \in \mathcal{S}$ definiramo njihovu konvoluciju $T * f$ kao temperiranu distribuciju*

$$\langle T * f, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{f} * \varphi\rangle.$$

Tada vrijedi

a) $T * f \in \mathcal{O}$, te je dana formulom $(T * f)(x) = \langle T, \tau_x\tilde{f}\rangle$,

b) $\partial^\alpha(T * f) = (\partial^\alpha T) * f = T * (\partial^\alpha f)$,

c) $\tau_a(T * f) = (\tau_a T) * f = T * (\tau_a f)$, *d)* $\widehat{T * f} = \hat{T}\hat{f}$.

Napomena 3.6.10. *Primijetimo kako zbog $T * f \in \mathcal{O}$ vrijedi i $T * f \in \mathcal{S}'$, pa zaista ima smisla promatrati $\widehat{T * f}$. Pokažimo usput tvrdnju d) prethodne prepozicije. Neka je $\varphi \in \mathcal{S}$. Imamo*

$$\langle \widehat{T * f}, \varphi \rangle = \langle T * f, \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \tilde{f} * \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \hat{\hat{f}} * \hat{\varphi} \rangle = \langle T, \widehat{\hat{f}\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \hat{f}\varphi \rangle = \langle \hat{f}\hat{T}, \varphi \rangle.$$

Za definiranje konvolucije dviju općenitih distribucija potrebne su neke dodatne pretpostavke (kao što je recimo kompaktnost nosača barem jedne od dviju distribucije koje konvoluiramo), no mi se ovdje nećemo previše baviti tim pitanjem. Napomenimo samo kako svojstva analogna svojstvima b) i c) iz prethodnih propozicija vrijede i u tom slučaju. Istaknimo svejedno jedan bitan primjer.

Primjer 3.6.11. *Za $T \in \mathcal{D}'$ vrijedi*

$$\delta_0 * T = T * \delta_0 = T.$$

Dokaz. Neka je $\varphi \in C_c^\infty$. Imamo

$$\langle T * \delta_0, \varphi \rangle = \langle T, \langle \delta_0, \varphi(x + \cdot) \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Analogno dobivamo i $\delta_0 * T = T$. □

Napomena 3.6.12. *Slično kao i ranije, imamo također za $T \in \mathcal{D}'$*

$$\delta_a * T = T * \delta_a = \tau_a(\delta_0 * T) = \tau_a T.$$

Zadatak 3.6.13. *Izračunajte Fourierovu transformaciju funkcije*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{ix}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Rješenje. Zapišimo prvo funkciju iz zadatka kao

$$f = g \cdot H,$$

gdje je

$$g(x) = e^{ix}, \qquad H \text{ - Heavysideova funkcija.}$$

Znamo da je

$$g(x) = e^{ix} = e^{-2\pi i(-\frac{1}{2\pi})x} = \widehat{\delta_{-\frac{1}{2\pi}}},$$

te da je

$$H(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{i}{\pi}p.v.\frac{1}{\xi} + \delta_0)\widehat{}.$$

Stoga primjenom Fourierove transformacije na f dobivamo

$$\hat{f} = \widehat{g \cdot H} = \widehat{\widehat{\check{g} * \check{H}}} = \widetilde{\check{g} * \check{H}} = \tilde{\check{g}} * \tilde{\check{H}},$$

pa uvrštavanjem gore navedenih izraza za $\check{g}$ i $\check{H}$ dobivamo

$$\hat{f} = \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2\pi}} * \left(\delta_0 - \frac{i}{\pi}p.v.\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2\pi}} - \frac{i}{2\pi}p.v.\frac{1}{\xi - \frac{1}{2\pi}}.$$

■

3.7 Primjena Fourierove transformacije na PDJ

U ovom dijelu ćemo na nekoliko primjera pokazati kako primjenom rezultata Fourierove analize možemo riješiti početnu zadaću. Za početak ćemo pogledati primjer jednadžbe provođenja:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

gdje za početak pretpostavljamo $u_0 \in \mathcal{S}$. Primjenom Fourierove transformacije u prostornoj varijabli x jednadžba provođenja prelazi u

$$\hat{u}_t + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = 0,$$

zbog

$$-\widehat{\Delta u} = -\sum_{i=1}^{n} \widehat{u_{ii}} = \sum_{i=1}^{n} 4\pi^2\xi_i^2 = 4\pi^2|\xi|^2.$$

Ovo je sada ODJ (u varijabli t), čije je rješenje, uz transformirani početni uvjet $\widehat{u_0} \in \mathcal{S}$ dano s

$$\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}.$$

Funkcija s desne strane je ponovno u $\mathcal{S}$, pa možemo primijeniti inverznu Fourierovu transformaciju, te dobivamo

$$u(x,t) = u_0 * (e^{-4\pi^2|\xi|^2 t})\check{}(x) = u_0(x) * (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)dy.$$

Napomena 3.7.1. *Na predavanjima je pokazano da sličan rezultat vrijedi ukoliko je $u_0 \in H^s$ ili L^p prostorima. Posebno, gornju jednadžbu možemo riješiti i uz početni uvjet $u_0 = \delta_0 \in H^s$, za dovoljno mali s. U tom slučaju, istim postupkom kao i gore, dobivamo*

$$u(x,t) = \delta_0 * (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

što je već otprije poznato elementarno rješenje jednadžbe provođenja.

Slično možemo postupiti i kod Schrödingerove jednadžbe

$$\begin{cases} u_t - i\Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = u_0, \end{cases}$$

gdje je $u_0 \in \mathcal{S}$.

Primjenom Fourierove transformacije po prostornoj varijabli dobivamo ODJ

$$\hat{u}_t + 4\pi^2 i|\xi|^2\hat{u} = 0.$$

Rješenje ove ODJ je dano s

$$\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi)e^{-4\pi^2 i|\xi|^2 t}.$$

Ovdje treba biti nešto oprezniji jer funkcija

$$\xi \mapsto e^{-4\pi^2 i|\xi|^2 t}$$

nije u $\mathcal{S}$, već samo u $\mathcal{S}'$, što znači da je s desne strane produkt funkcije iz $\mathcal{S}$ i elementa $\mathcal{S}'$. Međutim, konvolucija takva dva elementa je ponovno u $\mathcal{S}'$, te smijemo koristiti inverznu Fourierovu transformaciju te formulu, pa kao i prije dolazimo do

$$u(x,t) = u_0 * (e^{-4\pi^2 i|\xi|^2 t})\check{}(x) = u_0(x) * (4\pi it)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4it}} = (4\pi it)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4it}} u_0(y)dy.$$

Za kraj, izvest ćemo i formulu rješenja valne jednadžbe u jednoj dimenziji, D'Alembertovu formulu, istim pristupom. Dakle, rješavamo početnu zadaću

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(\cdot, 0) = u_0 \\ u_t(\cdot, 0) = u_1, \end{cases}$$

gdje su $u_0, u_1 \in \mathcal{S}$. Kao i do sada, primjenjujemo Fourierovu transformaciju po prostornim varijablama te dobivamo ODJ

$$\hat{u}_{tt} + 4\pi^2 \xi^2 \hat{u} = 0,$$

uz početne uvjete $\hat{u}(\cdot, 0) = \widehat{u_0}$ i $\hat{u}_t(\cdot, 0) = \widehat{u_1}$. Rješenje istog je dano s

$$\hat{u}(\xi, t) = \widehat{u_0}(\xi) \cos(2\pi t\xi) + \widehat{u_1}(\xi) \frac{\sin(2\pi t\xi)}{2\pi\xi}.$$

Prema zadatku 2.5.19. je

$$\frac{1}{2}\big(\delta_{-t} + \delta_t\big)\hat{}(\xi) = \cos(2\pi t\xi),$$

te prema primjeru 2.1.2. je

$$\frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_{[-t,t]}\big)\hat{}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi t)}{2\pi\xi}.$$

Sada možemo primijeniti inverznu Fourierovu transformaciju, te odgovarajuće formule za konvoluciju $\mathcal{S} * \mathcal{S}'$, te dobivamo

$$u(x,t) = \frac{1}{2} u_0 * \big(\delta_{-t} + \delta_t\big)(x) + \frac{1}{2} u_1 * \mathbb{1}_{[-t,t]}(x) = \frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy.$$

Zadatak 3.7.2. *Riješite sljedeću početnu zadaću*

$$\begin{cases} 4\pi^2 u_t + 4\pi^2 u - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 x^2}. \end{cases}$$

Rješenje. Primjenom Fourierove transformacije na zadaću dobivamo ODJ

$$4\pi^2\hat{u}_t + 4\pi^2\hat{u} + 4\pi^2\xi^2\hat{u} = 0,$$

odnosno

$$\hat{u}_t + (1+\xi^2)\hat{u} = 0,$$

uz početni uvjet

$$\widehat{u_0}(\xi) = e^{-\xi^2}.$$

Rješenje je dano s

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2} \cdot e^{-(1+\xi^2)t} = e^{-t} \cdot e^{-(1+t)\xi^2}.$$

Primjenom inverzne Fourierove transformacije dobivamo

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{\pi}{1+t}} e^{-t} \cdot e^{-\frac{\pi^2 x^2}{1+t}}.$$

■

Poglavlje 4

Prostori Soboljeva

4.1 Soboljevljevi prostori cjelobrojnog reda na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

U nastavku podrazumijevamo da je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otvoren i ograničen.

Definicija 4.1.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}_0$. Definiramo prostor Soboljeva $H^k(\Omega)$ s*

$$H^k(\Omega) := \{u \in \mathcal{D}'(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ za sve multiindekse } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ takve da je } |\alpha| \leq k\}.$$

Napomena 4.1.2. *(a) Uvjet definicije posebno kaže da su sami elementi prostora H^k, kao i derivacije reda manjeg ili jednakog k, zapravo funkcije, i to kvadratno integrabilne.*

(b) Primijetimo da vrijedi $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

(c) Ako je $k \leq l$, tada je očito $H^l(\Omega) \subseteq H^k(\Omega)$.

Na ovom prostoru definiramo skalarni produkt i normu na sljedeći prirodan način:

$$\langle f, g\rangle_{H^k} := \sum_{|\alpha|\leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g\rangle_{L^2},$$

$$||f||_{H^k} := \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha f||_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zadatak 4.1.3. *Pokažite da je $\|\cdot\|_{H^k}$ zaista norma.*

S obzirom da je riječ o normiranom prostoru, opis konvergencije je jednostavan, i direktna je posljedica definicije norme na ovom prostoru: niz $(u_n)_n \subseteq H^k(\Omega)$ konvergira k $u \in H^k(\Omega)$ u $H^k(\Omega)$ ako i samo ako za svaki $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ takav da je $|\alpha| \leq k$ vrijedi

$$\|\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$$

tj. ako i samo ako

$$\partial^\alpha u_n \xrightarrow{L^2} \partial^\alpha u.$$

Zadatak 4.1.4. *$H^k(\Omega)$ je Hilbertov prostor.*

Rješenje. Preostalo je pokazati da je $H^k(\Omega)$ potpun. Neka je stoga $(u_n)_n$ Cauchyjev niz u $H^k(\Omega)$. Kako je

$$||u_n - u_m||_{H^k}^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} ||\partial^\alpha u_n - \partial^\alpha u_m||_{L^2}^2$$

vidimo da su posebno onda i $(\partial^\alpha f u_n)_n$ Cauchyjevi nizovi u $L^2(\Omega)$ za sve $|\alpha| \leq k$. Kako je $L^2(\Omega)$ potpun, to svaki od $\partial^\alpha u_n$ konvergira prema nekoj funkciji u $L^2(\Omega)$, koju ćemo označiti s g_α. Dakle, imamo

$$\partial^\alpha u_n \xrightarrow{L^2} g_\alpha, \quad |\alpha| \leq k.$$

Posebno vrijedi i

$$u_n \xrightarrow{L^2} g_0.$$

S obzirom da konvergencija u L^2 povlači konvergenciju u smislu distribucija, slijedi

$$u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} g_0,$$

kao i

$$\partial^\alpha u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} g_\alpha.$$

Kako je deriviranje distribucija nizovno neprekidno, imamo

$$\partial^\alpha u_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \partial^\alpha g_0.$$

Sada zbog jedinstvenosti limesa u prostoru distribucija slijedi $g_\alpha = \partial^\alpha g_0$, odnosno

$$u_n \xrightarrow{H^k} g_0.$$

■

Napomena 4.1.5. *U slučaju $k = 1$, tj. promatrajući prostor $H^1(\Omega)$, pripadna je norma dana s*

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \sum_{j=1}^d \|\partial_j u\|_{L^2}^2.$$

Dio koji pripada derivacijama prvog reda ćemo kraće označavati s $\|\nabla u\|_{L^2}$, tj. koristit ćemo ništa drugo nego definiciju L^2-norme vektorske funkcije:

$$||\nabla u||_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d ||\partial_j u||_{L^2}^2.$$

Naravno, vrijedi

$$\nabla u \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d) \iff \partial_j u \in L^2(\Omega), \quad j = 1, \dots, d.$$

Sljedeći rezultat koji navodimo je vrlo bitna **Poincareova nejednakost**.

Teorem 4.1.6. *Ako je $|\Omega| < \infty$, onda postoji $C > 0$ takav da vrijedi*

$$(\forall u \in C_c^\infty) \quad ||u||_{L^2} \leq C_{\Omega,d}\,||\nabla u||_{L^2}.$$

Napomena 4.1.7. *Prostor $C_c^\infty(\Omega)$ nije gust u $H^k(\Omega)$. Zapravo je dovoljno vidjeti da to ne vrijedi za $k = 1$. Uzmimo konstantnu funkciju $u \equiv 1 \in H^1(\Omega)$. Pretpostavimo da postoji niz $(\varphi_n) \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ takav da*

$$\varphi_n \xrightarrow{H^1} u.$$

Kako smo već vidjeli, to je ekvivalentno s

$$||\varphi_n - u||_{L^2} \to 0,$$
$$||\nabla \varphi_n||_{L^2} \to 0$$

Prema Poincareovoj nejednakosti imamo

$$||\varphi_n||_{L^2} \leq C||\nabla \varphi_n||_{L^2} \to 0,$$

što povlači

$$\varphi_n \xrightarrow{L^2} 0.$$

Zbog jedinstvenosti limesa u L^2, zaključujemo $u = 0$, što je kontradikcija.

Kako sam prostor $C_c^\infty(\Omega)$ nije gust u $H^k(\Omega)$, prirodno je promatrati idući potprostor prostora $H^k(\Omega)$, zatvarač od $C_c^\infty(\Omega)$ u normi prostora $H^k(\Omega)$

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^k}.$$

Napomena 4.1.8. *Kao zatvoren potprostor Hilbertovog prostora, H_0^k je i sam Hilbertov prostor.*

Pokažimo sada da tvrdnja Poincareove nejednakosti vrijedi i za funkcije iz $H_0^1(\Omega)$. Pritom koristimo sljedeći jednostavan rezultat iz teorije mjere i integrala.

Zadatak 4.1.9. *Neka je X normiran prostor te neka su $x_n, x \in X$ takvi da vrijedi $x_n \xrightarrow{X} x$. Tada vrijedi i $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.*

Rješenje. Nejednakost trokuta za normu nam daje

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|,$$

odnosno

$$\|x\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n\|.$$

Odavde slijedi

$$-\|x_n - x\| \leq \|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - x\|,$$

tj.

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\|,$$

pa slijedi tvrdnja. ∎

Zadatak 4.1.10. *Ako je $|\Omega| < \infty$, onda postoji $C > 0$ takav da vrijedi*

$$(\forall u \in H_0^1(\Omega)) \quad ||u||_{L^2} \leq C_{\Omega,d} ||\nabla u||_{L^2}.$$

Rješenje. Neka je $(u_n)_n \subseteq C_c^\infty(\Omega)$ niz takav da vrijedi

$$u_n \xrightarrow{H^1} u.$$

Tvrdnja zadatka vrijedi za u_n, pa primjenom zadatka 4.1.9. na u_n i ∇u_n (u L^2) slijedi

$$\|u\|_{L^2} = \lim_n \|u_n\|_{L^2} \leq C \lim_n \|\nabla u_n\|_{L^2} = C\|\nabla u\|_{L^2}.$$

■

Napomena 4.1.11. *Na prostoru $H_0^1(\Omega)$ su norme $u \mapsto ||u||_{H^1}$ i $u \mapsto ||\nabla u||_{L^2}$ ekvivalentne. Zaista, očito je*

$$||\nabla u||_{L^2}^2 \leq ||u||_{L^2}^2 + ||\nabla u||_{L^2}^2 = ||u||_{H^1}^2,$$

dok drugu ogradu daje upravo Poincareova nejednakost:

$$\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (C+1)\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

Sada definiramo Soboljevljeve prostore negativnog reda na Ω. Razlog za ovakvu definiciju može se pronaći u odgovarajućoj vezi prostora $H^s(\mathbb{R}^d)$ i $H^{-s}(\mathbb{R}^d)$; oni su međusobno dualni (kao što je slučaj s prostorima L^p i $L^{p'}$ za konjugirane eksponente). Pritom radimo jednu prilagodbu; kako prostor test funkcija nije sam po sebi gust u $H^k(\Omega)$ (što ipak je slučaj u $H^s(\mathbb{R}^d)$), promatrat ćemo umjesto toga dual prostora $H_0^k(\Omega)$.

Definicija 4.1.12. *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Prostor $H^{-k}(\Omega)$ definiramo kao prostor svih neprekidnih funkcionala na $H_0^k(\Omega)$.*

Drugim riječima, zbog gustoće C_c^∞ u H_0^k imamo iduću karakterizaciju:

$$u \in H^{-k}(\Omega) \iff |\langle u, \varphi\rangle| \leq C||u||_{H^k}, \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Primjer 4.1.13. *Ako je $u \in L^2(\Omega)$, tada je $\partial_j u \in H^{-1}$. Zaista, neka je $\varphi \in C_c^\infty$. Imamo*

$$|\langle \partial_j u, \varphi\rangle| \leq |\langle u, \partial_j \varphi\rangle| \leq \int |u||\partial_j \varphi| \leq ||u||_{L^2}||\partial_j\varphi||_{L^2} \leq ||u||_{L^2}||\varphi||_1.$$

Na vrlo sličan način dobivamo i idući rezultat.

Zadatak 4.1.14. *Neka je $k \in \mathbb{Z}$ te $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Neka je $u \in H^k(\Omega)$. Tada je $\partial^\alpha u \in H^{k-|\alpha|}$.*

Pokažimo sada na konkretnom primjeru kakve funkcije pripadaju prostorima $H^1(\Omega)$, odnosno $H_0^1(\Omega)$.

Primjer 4.1.15. *Neka je* $\Omega = \langle -1, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je* $u \in H^1(\langle -1,1\rangle)$ *tada postoji* $\tilde{u} \in C([-1,1])$ *takva da je* $u = \tilde{u}$ *s.s. i* $u' = \tilde{u}'$ *s.s. Dodatno, prostor* $H_0^1(\langle -1,1\rangle)$ *je tada jednak* $\{u \in H^1(\langle -1,1\rangle) : u(-1) = u(1) = 0\}$.

Dokaz. Neka je $u \in H^1$. Kako smo na prostoru konačne mjere, to je $u' \in L^2 \subseteq L^1$. Stoga je funkcija g na $\langle -1,1\rangle$ dana s

$$g(x) = \int_{-1}^{x} u'(y)dy$$

dobro definirana i neprekidna na $[-1,1]$. Pokažimo sada da je $g' = u'$. Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\langle -1,1\rangle)$. Imamo

$$\begin{aligned}
\langle g', \varphi\rangle &= -\langle g, \varphi'\rangle \\
&= -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{x} u'(y)dy\right)\varphi'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1} u'(y)\left(\int_{y}^{1} \varphi'(x)dx\right)dy \\
&= \int_{-1}^{1} u'(y)\varphi(y)dy \\
&= \langle u', \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Zbog toga je $u = g + C$ s.s. za neku konstantu C, pa stavljanjem $\tilde{u} = g + C$ dobivamo prvu tvrdnju. Zbog ovog rezultata od sad na dalje podrazumijevamo da je $u \in H^1(\Omega)$ neprekidna (odnosno promatramo njenog neprekidnog reprezentanta). Prije nego dokažemo drugu tvrdnju, pokažimo da je $\delta_x \in H^{-1}(\langle -1,1\rangle)$ za svaki $x \in [-1,1]$ (primijetimo kako zbog prvog dijela zadatka ima smisla promatrati i vrijednosti na rubu). Neka je $\varphi \in C_c^\infty(\langle -1,1\rangle)$. Tada je

$$|\delta_x, \varphi\rangle| = |\varphi(x)| \leq \int_0^x |\varphi'(y)|dy \leq \sqrt{2}\|\varphi'\|_{L^2(\langle -1,1\rangle)} \leq \sqrt{2}\|\varphi\|_{H^1(\langle -1,1\rangle)}.$$

Kako su posebno δ_{-1} i δ_1 u $H^{-1}(\langle -1,1\rangle)$, te se oni poništavaju na $C_c^\infty(\langle -1,1\rangle)$, to za svaku $u \in H_0^1(\Omega)$ vrijedi $u(-1) = u(1) = 0$.

Obratno, neka je $u \in H^1$ takva da je $u(-1) = u(1) = 0$. Da bi pokazali da je $u \in H_0^1(\Omega)$ potrebno je aproksimirati u pomoću funkcija iz $C_c^\infty(\Omega)$ u H^1 normi. Za početak, označimo s h proširenje funkcije u na cijeli $\mathbb{R}$ nulom. Kako je $u(\pm 1) = 0$, h je također neprekidna funkcija, te je posebno i $h \in H^1(\mathbb{R})$ i vrijedi $h' = u' \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}$. Neka je sada za $0 < \lambda < 1$ funkcija h_λ definirana s

$$h_\lambda(x) := h\Big(\frac{x}{\lambda}\Big).$$

Vidimo ovdje da je $\operatorname{supp} h_\lambda \subseteq [-\lambda, \lambda] \subset [-1,1]$. Primijetimo također kako vrijedi sljedeće za $\lambda \to 1$:

- $h_\lambda \xrightarrow{s.s.} h$,
- $\|h_\lambda\|_{H^1} \longrightarrow \|h\|_{H^1}$.

Koristeći zadatak 4.1.16. (ispod), slijedi

$$h_\lambda \xrightarrow{H^1} h.$$

Neka je sada $\epsilon > 0$ te λ takav da je $\|h_\lambda - h\|_{H^1} < \frac{\varepsilon}{2}$. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\rho_n * h_\lambda \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} h_\lambda,$$

$$(\rho_n * h_\lambda)' = \rho_n * (h'_\lambda) \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} h'_\lambda,$$

tj.

$$\rho_n * h_\lambda \xrightarrow{H^1(\mathbb{R})} h_\lambda.$$

Uzmimo sada samo takav n da je $\frac{1}{n} + \lambda < 1$. Tada je $\operatorname{supp} \rho_n * h_\lambda \subseteq [-\lambda - \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n}]$, što je kompakt u $\langle -1, 1\rangle$, pa vidimo da je $\rho_n * h_\lambda \in C_c^\infty(\langle -1, 1\rangle)$. Konačno, uzmimo još takav n da vrijedi $\|\rho_n * h_\lambda - h_\lambda\|_{H^1(\mathbb{R})} = \|\rho_n * h_\lambda - h_\lambda\|_{H^1(\langle -1,1\rangle)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\|\rho_n * h_\lambda - u\|_{H^1(\langle -1,1\rangle)} &= \|\rho_n * h_\lambda - h\|_{H^1(\langle -1,1\rangle)} \\
&\le \|\rho_n * h_\lambda - h_\lambda\|_{H^1(\langle -1,1\rangle)} + \|h_\lambda - h\|_{H^1(\langle -1,1\rangle)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 4.1.16. *Neka su $(f_n)_n, f \in L^2(\Omega)$. Pretpostavimo da vrijedi*

- $f_n \xrightarrow{s.s.} f$,
- $\|f_n\|_{L^2} \longrightarrow \|f\|_{L^2}$.

Tada $f_n \xrightarrow{L^2} f$.

Rješenje. Označimo s $g_n = 2(|f_n|^2 + |f|^2) - |f_n - f|^2$. Tada je $g_n \ge 0$ s.s. te vrijedi $g_n \xrightarrow{s.s.} 4|f|^2$, pa primjenom Fatouve leme slijedi

$$\begin{aligned}
4\int |f|^2 = \int \liminf_n g_n &\le \liminf_n \int g_n \\
&= \liminf_n \int 2(|f_n|^2 + |f|^2) - |f_n - f|^2 \\
&= 4\int |f|^2 + \liminf_n \Big(- \int |f_n - f|^2 \Big)
\end{aligned}$$

Odavde slijedi

$$\liminf_n \Big(- \int |f_n - f|^2 \Big) \ge 0,$$

odnosno

$$\limsup_n \int |f_n - f|^2 \le 0.$$

■

4.2 Lax-Milgramova lema i primjene

Teorem 4.2.1 (**Lax-Milgram**). *Neka je H Hilbertov prostor te*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

bilinearna forma za koju postoje konstante $\alpha, \beta > 0$ takve da vrijedi

1. *(neprekidnost)* $|B(u,v)| \leq \alpha ||u|| \, ||v||$, $u, v \in H$,
2. *(koercitivnost)* $B(u,u) \geq \beta ||u||^2$, $u \in H$.

Također, neka je $f : H \to \mathbb{R}$ ograničen linearni funkcional. Tada postoji jedinstveni element $u \in H$ takav da vrijedi

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle, \; v \in H.$$

Dokaz. Za fiksni $u \in H$ definiramo linearni operator $A_u : H \to \mathbb{R}$ s

$$A_u(v) = B(u,v).$$

A_u je ograničen linearan operator zbog

$$|A_u(v)| = |B(u,v)| \leq \alpha ||u|| \cdot ||v||,$$

pa prema Rieszovom teoremu reprezentacije za ograničene linearne funkcionale postoji jedinstveni vektor $Au \in H$ takav da je

$$A_u(v) = \langle Au, v \rangle.$$

Preslikavanje $A : H \to H$ definirano s

$$u \mapsto Au$$

je ponovno linearan operator. Zaista, za svaki $v \in H$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\langle A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle &= B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) \\
&= \lambda_1 B(u_1, v) + \lambda_2 B(u_2, v) \\
&= \lambda_1 \langle Au_1, v \rangle + \lambda_2 \langle Au_2, v \rangle \\
&= \langle \lambda_1 Au_1 + \lambda_2 Au_2, v \rangle.
\end{aligned}$$

Pokažimo da je A ograničen i odozgo i odozdo. Imamo

$$||Au||^2 = \langle Au, Au \rangle = A_u(Au) = B(u, Au) \leq \alpha ||u|| ||Au||.$$

Dijeljenjem s $||Au||$ dobivamo željenu ograničenost odozgo. S druge strane, imamo

$$||u|| \, ||Au|| \geq |\langle Au, u \rangle| = |B(u,u)| \geq \beta ||u||^2.$$

Ponovno, dijeljenjem s $||u||$ dobivamo i željenu ograničenost odozdo. Kako je A odozdo ograničen, on je injektivan i njegova je slika zatvorena. Iz relacije

$$H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A$$

vidimo da je A i surjektivan operator. Neka je $u \in H$ takav da vrijedi $Au = f$. Konačno, za sve $v \in H$ imamo

$$\langle f, v \rangle = \langle Au, v \rangle = B(u, v).$$

□

Promotrimo sada rubnu zadaću

$$\begin{cases} -u'' + a(x)u = f, & \text{na } I \\ u = 0, & \text{na } \partial I, \end{cases}$$

gdje je I otvoren i ograničen interval u $\mathbb{R}$, te $f, a \in C(I)$ unaprijed poznate funkcije. Pretpostavimo da je $u \in C^2(I)$ rješenje gornjeg problema. Pomnožimo prvu jednakost s proizvoljnom $v \in C_c^\infty(I)$ te prointegriramo:

$$\int_I -u''v + auv = \int_I fv,$$

odakle parcijalnom integracijom prvog člana prvog integrala dobivamo

$$\int_I u'v' + auv = \int_I fv.$$

Upravo smo vidjeli da u koji je klasično rješenje rubne zadaće zadovoljava gornju relaciju za svaki $v \in C_c^\infty(I)$, pa onda i za svaki $v \in H_0^1(I)$. Primijetimo kako u gornjoj relaciji možemo oslabiti pretpostavke na funkcije a i f, a da ta relacija i dalje bude valjana i smislena. Pretpostavimo sada da je $f \in L^2(I)$ i $a \in L^\infty(I)$ te da je dodatno $a \geq 0$ s.s. (razlozi za ovakve pretpostavke će postati jasni uskoro). Motivirani ovom raspravom uvodimo pojam **slabog rješenja**.

Definicija 4.2.2. *Kažemo da je $u \in H_0^1(I)$ slabo rješenje rubne zadaće ako vrijedi*

$$\int_I u'v' + auv = \int_I fv, \quad v \in H_0^1(I).$$

Razlog zbog kojeg tražimo $u \in H_0^1(I)$ jesu rubni uvjeti ($u = 0$ na rubu). Pokažimo da tada postoji $u \in H_0^1(I)$ slabo rješenje rubne zadaće. Ključan alat je, naravno, Lax-Milgramova lema. Na $H_0^1(I)$ definiramo bilinearnu formu $B : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ s

$$B(u, v) = \int_I u'v' + auv.$$

S druge strane, za $f \in L^2(I)$ je preslikavanje

$$v \mapsto \int_I fv$$

neprekidan linearni funkcional na $H_0^1(I)$ zbog

$$\left| \int_I fv \right| \leq ||f||_{L^2}||v||_{L^2} \leq ||f||_{L^2}||v||_{H_0^1}.$$

Dakle, ukoliko pokažemo da je B neprekidna i koercitivna bilinearna forma na $H_0^1(I)$, Lax-Milgramova lema nam osigurava postojanje jedinstvenog elementa $u \in H_0^1(I)$ takvog da vrijedi

$$\int_I u'v' + auv = B(u,v) = \int_I fv.$$

Neprekidnost slijedi iz:

$$\begin{aligned}
|B(u,v)| &\leq \int_I |u'v'| + |auv| \\
&\leq ||u'||_{L^2}||v'||_{L^2} + ||a||_{L^\infty}||u||_{L^2}||v||_{L^2} \\
&\leq (1 + ||a||_{L^\infty})||u||_{H_0^1}||v||_{H_0^1}.
\end{aligned}$$

S druge strane, koercitivnost dobivamo zbog

$$B(u,u) = \int_I |u'|^2 + au^2 \overset{a\geq 0}{\geq} \int_I |u'|^2 = ||u'||_{L^2}^2 \overset{\text{Poincare}}{\geq} C||u||_{H_0^1}^2.$$

Lax-Milgramova lema sada daje jedinstveni $u \in H_0^1(I)$ slabo rješenje rubne zadaće. Nakon što smo došli do slabog rješenja, prirodno se pitati je li (i pod kojim uvjetima) to ujedno i jako (klasično) rješenje. Za početak primijetimo kako je za svaki $v \in C_c^\infty(I)$

$$\langle u'', v \rangle = -\langle u', v' \rangle = \int_I u'v' = \int_I (f - au)v = \langle f - au, v \rangle,$$

odakle zaključujemo da je $u'' = f - au \in L^2(I)$, tj. $u \in H^2(I)$. Pretpostavimo stoga (ponovno kao na početku) da su $f, a \in C(I)$. Podsjećamo kako zbog primjera 3.3.6. svaku funkciju $u \in H^1(I)$ smatramo neprekidnom na $\overline{I}$. Tada je, kako smo maloprije dobili, $u'' = f - au \in C(I)$, odnosno $u \in C^2(I)$. Sada se možemo "vratiti natrag" iz relacije koju zadovoljava takvo slabo rješenje u do jake formulacije: za svaki $v \in C_c^\infty(I)$ vrijedi

$$\int_I u'v' + auv - fv = 0,$$

odakle parcijalnom integracijom prvog člana dobivamo

$$\int_I (-u'' + au - f)v = 0.$$

Kako ova jednakost vrijedi za svaki $v \in C_c^\infty(I)$, osnovna lema varijacijskog računa daje

$$-u'' + au = f.$$

Primijetimo ovdje za kraj jedno svojstvo koje ima pridruženi (eliptički) parcijalni diferencijalni operator L

$$Lu = -u'' + au.$$

Slabo rješenje pripadne rubne zadaće će biti "za dva prostora" bolje od desne strane koja je određena funkcijom f. Ovdje smo vidjeli kako je za $f \in L^2(I) = H^0(I)$ rješenje bilo u H^2, dok je za $f \in C(I)$ ono bilo u $C^2(I)$.

4.3 Dodatak: Soboljevljevi prostori s realnim eksponentom

Za sam početak, uvodimo dvije oznake

$$D^\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}}\partial^\alpha,$$

te posebno

$$D_j = \frac{1}{(2\pi i)^{|\alpha|}}\partial_j.$$

Razlog tome je nešto jednostavniji zapis pri korištenju svojstava Fourierove transformacije; uz ove oznake imamo

$$\widehat{D^\alpha f} = \xi^\alpha \hat{f}.$$

Od sad na dalje λ će označavati funkciju $\lambda(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$, te ćemo općenito, za $s \in \mathbb{R}$ pisati $\lambda^s(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$. Još jedna česta oznaka za ovu funkciju je i $\langle\xi\rangle$.

Zadatak 4.3.1. *Za svaki $s \in \mathbb{R}$ i $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ postoji $C_{s,\alpha} > 0$ takav da vrijedi*

$$|\partial^\alpha \lambda^s(\xi)| \leq C_{s,\alpha}\lambda^{s-|\alpha|}.$$

Posebno, za sve $s \in \mathbb{R}$ je $\lambda^s \in \mathcal{O}$.

Rješenje. Kako je

$$\partial_j \lambda^s(\xi) = s\lambda^{s-2}(\xi)\xi_j,$$

vidimo da će općenite derivacije $\partial^\alpha\lambda^s(\xi)$ biti linearna kombinacija (s koeficijentima koji ovise o s i α) izraza oblika $\xi^\beta\lambda^{s-|\beta|-1}(\xi)$, pri čemu je $|\beta| \leq |\alpha|$. Kako je $|\xi^\beta| \leq \lambda^{|\beta|}(\xi)$ vidimo da je dovoljno dokazati slučaj $\partial^\alpha = \partial_j$. Ovdje slično kao ranije dobivamo

$$|\partial_j\lambda^s(\xi)| = s\lambda^{s-2}(\xi)|\xi_j| \leq s\lambda^{s-1}(\xi).$$

Tvrdnja slijedi indukcijom. ■

Definicija 4.3.2. *Neka je $s \in \mathbb{R}$.* ***Prostor Soboljeva*** *$H^s(\mathbb{R}^d)$ definiramo kao*

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \{u \in \mathcal{S}' : \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = ||\lambda^s\hat{u}||_{L^2}^2 < \infty\}.$$

Napomena 4.3.3. *Na prostoru H^s definiramo skalarni produkt i normu na prirodan način:*

$$\langle f, g\rangle_s := \langle \lambda^s f, \lambda^s g\rangle_{L^2} = \int \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}(1+|\xi|^2)^s d\xi,$$
$$||f||_s := ||\lambda^s f||_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pokažimo u ovom trenutku da se za cjelobrojne vrijednosti te za $\Omega = \mathbb{R}^d$ prostori definirani u prethodnom poglavlju zaista podudaraju s ovom novom definicijom. Neka je $k \in N_0$. Imamo

$$\begin{aligned}
||u||_k^2 &= ||\lambda^k \hat{u}||_{L^2}^2 \\
&= ||(1+\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2)^{\frac{k}{2}}\hat{u}||_{L^2}^2 \\
&= \sum_{|\alpha|\le k}\binom{k}{\alpha}||\xi^\alpha \hat{u}||_{L^2}^2 \\
&= \sum_{|\alpha|\le k}\binom{k}{\alpha}||\widehat{D^\alpha u}||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Iz prethodnoga možemo zaključiti sljedeće:

$$\widehat{D^\alpha u} \in L^2, \text{ za sve } |\alpha| \le k \iff u \in H^k.$$

odnosno, zbog Plancherelovog teorema

$$D^\alpha u \in L^2, \text{ za sve } |\alpha| \le k \iff u \in H^k,$$

čime je pokazano da se prostori podudaraju (skupovno). Štoviše, vidimo da su norme

$$\begin{aligned}
||u||_k &= ||\lambda^k \hat{u}||_{L^2} \\
||u|| &= \Big(\sum_{|\alpha|\le k}||\partial^\alpha u||_{L^2}^2\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ekvivalentne, što dodatno znači da je struktura na ovom prostoru ista u oba slučaja.

Primijetimo ovdje kako obje definicije imaju svoje prednosti i nedostatke. Dok je očiti nedostarak prve definicije taj što ona ima smisla samo za $k \in N_0$, nju možemo koristiti i za skupove osim samog $\mathbb{R}^d$. S druge strane, druga definicija je dobra za sve realne brojeve, međutim, zbog korištenja Fourierove transformacije u definiciji, ograničeni smo samo na promatranje cijelog prostora kao domene funkcija/distribucija.

4.4 Soboljevljevi prostori na $\mathbb{R}^d$

U ovom dijelu ćemo prokomentirati neke od osnovnih svojstava Soboljevljevih prostora H^s.

a) Kako je za svaki $\varphi \in \mathcal{S}$ funkcija $\lambda^s \hat{\varphi} \in L^2$, to je $\mathcal{S} \subseteq H^s$ za svaki $s \in \mathbb{R}$. S druge strane, iz same definicije je $H^s \subseteq \mathcal{S}'$ za sve $s \in \mathbb{R}$.

b) Fourierova transformacija je unitarni izomorfizam između prostora H^s i $L^2(\mathbb{R}^d, \mu_s)$, gdje je $d\mu_s(\xi) = \lambda^s(\xi)d\xi$. To je vrlo jednostavno za vidjeti iz same definicije:

$$||f||_s = ||\lambda^s \hat{f}||_{L^2} = ||\hat{f}||_{(L^2, d\mu_s)}.$$

Posebno, H^s je Hilbertov prostor. Alternativno, tu tvrdnju možemo dokazati i direktno. Neka je $(u_n)_n$ Cauchyjev niz u H^s. Tada je niz $(\lambda^s \widehat{u_n})_n$ Cauchyjev niz u L^2. Stoga postoji $v \in L^2$ takav da vrijedi

$$||\lambda^s \widehat{u_n} - v||_{L^2} \to 0.$$

Stavimo $u := (\lambda^{-s} v)^{\check{}}$. To je dobro definiran element prostora H^s, te vrijedi

$$||u_n - u||_s = ||\lambda^s(\widehat{u_n} - \hat{u})||_{L^2} = ||\lambda^s \widehat{u_n} - v||_{L^2} \to 0.$$

c) $\mathcal{S}$ je gust potprostor od H^s, za sve $s \in \mathbb{R}$. Dokazu ove tvrdnje također možemo pristupiti na dva načina. Prvi je konkretna aproksimacija elementa iz H^s Schwartzovim funkcijama, i taj je dokaz proveden na predavanjima. Alternativno, možemo se koristiti tvrdnjom a) te činjenicom da je C_c^∞ gusto podskup prostora $(L^2, d\mu_s)$. Kako je Fourierova transformacija unitarni izomorfizam, to je onda $\widehat{C_c^\infty}$ gust podskup od $(\widehat{L^2, d\mu_s}) = H^s$. S obzirom da je $C_c^\infty \subseteq \mathcal{S}$ i $\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$, tvrdnja slijedi.

d) C_c^∞ je gusto u H^s za svaki $s \in \mathbb{R}$. Kako smo u b) pokazali da je $\mathcal{S}$ gusto u H^s, to je dovoljno pokazati da je C_c^∞ gusto u $\mathcal{S}$, ali gledano u normi H^s prostora. U tu svrhu, uzmimo $\psi \in C_c^\infty$ takvu da je $\psi(0) = 1$, te stavimo $\psi_n(x) := \psi(x/n)$. Za $\varphi \in \mathcal{S}$ definiramo niz $\varphi_n := \psi_n \varphi \in C_c^\infty$. Imamo

$$\begin{aligned}
||\varphi_n - \varphi||_s &= ||\lambda^s(\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi})||_{L^2} \\
&= \left(\int \lambda^s(\xi) |\hat{\varphi}_n(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left(\lambda^{s+(d+1)/2}(\xi) |\hat{\varphi}_n(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)| \right) \cdot \left(\int \lambda^{-d-1}(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 ||\widehat{\varphi_n - \varphi}||_{s+d+1} \\
&\leq C_2 ||\varphi_n - \varphi||_{s+2d+1}.
\end{aligned}$$

Dakle, H^s normu ove razlike smo ocijenili pomoću jedne od normi prostora $\mathcal{S}$, pa bi nam za konvergenciju gornjeg niza u H^s bila dovoljna konvergencija istog u $\mathcal{S}$. Međutim, taj niz je isti onaj koji smo koristili u dokazu tvrdnje da je C_c^∞ gusto u $\mathcal{S}$, što daje tvrdnju.

e) Za $t, s \in \mathbb{R}$, $t < s$, je H^s gust potprostor od H^t, te vrijedi $||\cdot||_t \leq ||\cdot||_s$. Prva tvrdnja slijedi zbog b) i
$$\mathcal{S} \subseteq H^s \subseteq H^t,$$
dok je druga tvrdnja očita iz definicije.

f) $H^0 = L^2$ i $||\cdot||_0 = ||\cdot||_{L^2}$. Ovo je direktna posljedica Plancherelovog teorema.

g) Za svaki $s \in \mathbb{R}$ vrijedi
$$u \in H^{s+1} \iff u, D_1 u, \cdots, D_d u \in H^s,$$
te vrijedi jednakost
$$||u||_{s+1}^2 = ||u||_s^2 + \sum_{j=1}^{d} ||D_j u||_s^2.$$
Kako je $\lambda^2(\xi) = 1 + |\xi|^2 = 1 + \sum_{j=1}^d \xi_j^2$, za $\hat{u}$ imamo
$$|\lambda^{s+1}\hat{u}|^2 = \lambda^2|\lambda^s\hat{u}|^2 = |\lambda^s\hat{u}|^2 + \sum_{j=1}^{d} |\lambda^s \xi_j \hat{u}|^2 = |\lambda^s\hat{u}|^2 + \sum_{j=1}^{d} |\lambda^s \widehat{D_j u}|^2,$$
iz čega integriranjem odmah dobivamo tvrdnju.

h) ∂^α je ograničen linearan operator s H^s u $H^{s-|\alpha|}$. Tvrdnja f) nam osigurava da je slika zaista u $H^{s-|\alpha|}$, dok zbog
$$|\xi^\alpha| \leq |\xi|^{|\alpha|} \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}$$
vrijedi
$$||\partial^\alpha u||_{s-|\alpha|} = ||\lambda^{s-|\alpha|}\widehat{\partial^\alpha u}||_{L^2} = 2\pi^{|\alpha|}||\lambda^{s-|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}||_{L^2} \leq C_\alpha ||\lambda^s \hat{u}||_{L^2} = C_\alpha ||u||_s.$$

i) Za $s \geq 0$, zbog c) i d), distribucije u H^s su zapravo i L^2 funkcije. Za $s < 0$ to općenito ne mora biti slučaj. Primjer toga je i δ_0; prisjetimo se kako je $\widehat{\delta_0} = 1$. Stoga je $\delta_0 \in H^s$ ako i samo ako je $s < -\frac{d}{2}$.

Propozicija 4.4.1. *Neka je $s > k + \frac{d}{2}$.*

a) Ako je $u \in H^s$, onda je $(\partial^\alpha u)\hat{} \in L^1$ i $||(\partial^\alpha u)\hat{}||_{L^1} \leq C_{k,s}||u||_s$, za sve $|\alpha| \leq k$.

b) $\partial^\alpha u \in C_0$, za sve $|\alpha| \leq k$, uz ocjenu $||\partial^\alpha u||_{L^\infty} \leq C_{k,s}||u||_s$ (posebno je $u \in C^k$).

Dokaz. a) Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k. Za $k = 0$, zbog $s > \frac{d}{2}$ imamo $\lambda^{-s} \in L^2$, pa je stoga
$$\hat{u} = \lambda^{-s}(\lambda^s \hat{u}) \in L^1,$$
uz ocjenu
$$||\hat{u}||_{L^1} \leq ||\lambda^{-s}||_{L^2}||\lambda^s\hat{u}||_{L^2} = C_s||u||_s.$$
Korak indukcije radimo na sljedeći način. Ukoliko tvrdnja vrijedi za neki k, tada iz $s > (k+1) + \frac{d}{2}$ i pretpostavke $u \in H^s$ slijedi $\partial_j u \in H^{s-1}$, gdje sada imamo $s - 1 > k + \frac{d}{2}$. Primjenom pretpostavke na $\partial_j u$ slijedi tvrdnja.

b) Zbog a) dijela i Riemann-Lebesgueovoj leme vrijedi $\partial^\alpha u \in C_0$, za sve $|\alpha| \leq k$. Također, koristeći ocjenu iz a) dijela te neprekidnost Fourierove transformacije s L^1 u C_0, imamo i ocjenu

$$||\partial^\alpha u||_{L^\infty} \leq ||\widehat{\partial^\alpha u}||_{L^1} \leq C_{|\alpha|,s}||u||_s.$$

$\square$

Korolar 4.4.2. *Ako je $u \in H^s$ za sve $s \in \mathbb{R}$, onda je $u \in C^\infty$.*

Sljedeći rezultat je svojevrsna verzija reprezentacije neprekidnih linearnih funkcionala za Soboljevljeve prostore. Mi ga ovdje nećemo dokazivati, a osim što je sam po sebni bitan rezultat, poslužit će nam i kao alat za proširivanje opisa prostora H^{-k} za cjelobrojni eksponent kao u raspravi prošlog dijela.

Propozicija 4.4.3. *Neka je $s \in \mathbb{R}$ i $u \in H^{-s}$. Linearan funkcional na $\mathcal{S}$ dan s*

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle$$

se na jedinstven način proširuje do ograničenog linearnog funkcionala na H^s, s operatorskom normom jednakom $||f||_{-s}$. Štoviše, svaki se element $(H^s)'$ dobiva na takav način.

S obzirom da je prostor C_c^∞ gust u H^k, to imamo sljedeću karakterizaciju prostora H^{-k}, za pozitivne cjelobrojne k.

Propozicija 4.4.4. *Neka je $k \in \mathbb{N}$. Prostor $H^{-k}(\mathbb{R}^d)$ je jednak prostoru svih linearnih funkcionala u na $H^k(\mathbb{R}^d)$ čija je restrikcija na $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ neprekidna, odnosno, za koje postoji $C > 0$ takav da vrijedi*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C||\varphi||_k, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d).$$